Студенческие олимпиады мехмата МГУ

И. В. Аржанцев В. И. Богачёв А. А. Заславский
В. Ю. Протасов А. М. Райгородский А. Б. Скопенков

Мы приводим задачи всемехматовских олимпиад 2001 (второй тур), 2008 и 2009 годов, а также указания, решения и комментарии.[1] См. введение в [1].

Благодарим Я. Абрамова и Д. Янга за полезное замечание.

2001-1. Пусть $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — монотонно убывающая функция, для которой $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(n) < \infty$. Докажите, что существует последовательность α_n положительных чисел, монотонно убывающая к нулю, для которой $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(\alpha_n n) < \infty$.

2001-2. Докажите, что для любого целого положительного n матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

имеет два равных элемента на главной диагонали.

2001-3. Пусть P_n и Q_n — правильные n-угольники, причём P_n вписан в круг диаметра 1, а Q_n описан около этого круга. Обозначим через p_n и q_n их периметры. В какой трети интервала (p_n, q_n) лежит число π?

[1] Вот победители этих олимпиад: А. Авилов (2009), В. Арутюнов (2008), В. Астахов (2008, 2009), А. Буфетов (2009), А. Гаврилюк (2009), Е. Горинов (2009), Р. Гимадеев (МФТИ, 2009), Р. Девятов (2008, 2009), А. Ефимов (2008), М. Илюхина (2008), А. Киселёв (МФТИ, 2009), П. Козлов (2009), И. Митрофанов (2008), П. Мищенко (МФТИ, 2009), А. Перепечко (2009), С. Смирнов (2008), А. Трепалин (2008), В. Шмаров (2009). А вот кто предложили задачи на олимпиады: И. В. Аржанцев (2008-3), В. И. Богачёв (2008-1, 2008-2, 2009-5), А. А. Заславский (2008-4, 2009-3), В. Ю. Протасов (2009-1), А. М. Райгородский (2008-5, 2009-2), А. Б. Скопенков (2008-3, 2009-4). Фамилии математиков, предложивших задачи 2001 года, утрачены, за что мы приносим свои извинения. Предложивший не обязательно является автором. Многие из приводимых задач не новы. Но мы полагаем, что многие из них оригинальны. Все варианты составлены В. И. Богачёвым. В [1] приведены задачи первого тура олимпиады 2001 года, а задачи второго тура ошибочно названы утраченными.

2001-4. Для любых целых p и λ обозначим через $J(\lambda,p)$ число целочисленных решений $(x_1,\ldots,x_6)$ уравнения $x_1^3+x_2^3+x_3^3=x_4^3+x_5^3+x_6^3+\lambda$, для которых $1\leqslant x_1,\ldots,x_6\leqslant p$. Докажите, что $J(\lambda,p)\leqslant J(0,p)$ для любого p.

2001-5. Положим $S=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$. Каково наибольшее возможное количество точек в пересечении $P^{-1}(1)\cap S$ по всем полиномам P третьей степени, для которых $P^{-1}(1)\not\supset S$?

2001-6. Можно ли покрыть пространство $\mathbb{R}^n$ семейством замкнутых шаров с положительными радиусами и попарно непересекающимися внутренностями?

2001-7. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(2^n x)$ сходится только в точках $x=$ $=\pi 2^{-k}$, $k\in\mathbb{Z}$.

2001-8. Пусть $\{\alpha_n\}$ — последовательность вещественных чисел, для которой последовательность функций $\sin(\alpha_n x)$ сходится на множестве, имеющем положительную меру Лебега. Докажите, что последовательность $\{\alpha_n\}$ имеет конечный предел.

2001-9. Найдите все выпуклые равноугольные многоугольники с вершинами в узлах целочисленной решётки на плоскости.

2008-1. Докажите, что для всякого n найдётся число $c_n>0$ со следующим свойством: каждое открытое выпуклое множество объёма v в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$ содержит шар радиуса $c_n v$.

2008-2. Для возрастающих функций $f,g:[0,\pi/2]\to\mathbb{R}$ докажите неравенство[2)]

$$\int_0^{\pi/2} f(x)g(x)\sin x\,dx\geqslant\int_0^{\pi/2} f(x)\sin x\,dx\int_0^{\pi/2} g(x)\sin x\,dx.$$

2008-3. Обозначим через A подгруппу $\mathbb{Z}^2\oplus 0\oplus 0$ группы $\mathbb{Z}^4$. Для каких элементов $(b_1,b_2,c_1,c_2)\in\mathbb{Z}^4$ существует такая подгруппа D группы $\mathbb{Z}^4$, что $(b_1,b_2,c_1,c_2)\in D$ и $\mathbb{Z}^4=A\oplus D$? Дайте ответ в терминах делимости чисел b_1,b_2,c_1,c_2 и наибольших общих делителей подмножеств этого множества.[3)]

[2)]Здесь можно заменить $\sin x$ на любую интегрируемую функцию $\varrho:[0,\pi/2]\to[0,+\infty)$ с интегралом 1. Общий результат принадлежит П. Л. Чебышёву. Неравенство Чебышёва из «элементарной» математики — дискретный аналог этого неравенства.

[3)]Аналогично решается следующая более общая задача. Пусть C есть прямая сумма свободных конечно порождённых абелевых групп A и B. Для каких элементов $(a,b)\in A\oplus B=C$ найдётся такая подгруппа D в C, что $(a,b)\in D$ и $C=A\oplus D$?

2008-4. Докажите, что существует выпуклая ограниченная фигура на плоскости, не имеющая центра симметрии, но обладающая следующим свойством: всякая прямая, делящая пополам её периметр, делит пополам и её площадь.

2008-5. Пусть W — 11^n-элементное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, любое 10^n-элементное подмножество которого содержит две точки x, y на расстоянии 1: $|x-y| = 1$. Докажите, что для достаточно большого n количество единичных расстояний между точками множества W больше, чем $0.99 \cdot 12.1^n$:

$$\frac{1}{2}\#\{(x,y) \in W_n \times W_n\colon\ |x-y| = 1\} > 0.99 \cdot 12.1^n,$$

где через $\#A$ обозначено число элементов в множестве A. [4)]

2009-1. Для каких размерностей n существует гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, пересекающая все $(n-1)$-мерные замкнутые грани n-мерного куба, но не имеющая общих точек со вписанным в этот куб замкнутым шаром? [5)]

2009-2. Обозначим через $m(k)$ максимальное число попарно не ортогональных векторов из $\{-1, 0, 1\}^{2k}$, ровно k координат каждого из которых нулевые. Докажите, что

(а) $m(k) \geqslant 2^{2k-1}$ при нечётном k. (б) $80 \leqslant m(4) \leqslant 140$.

2009-3. Пусть n нечётно.[6)] На сторонах произвольного («первого») n-угольника как на основаниях построены во внешнюю сторону равнобедренные треугольники с углом при вершине $2\pi/n$. Их вершины образуют второй n-угольник. На его сторонах как на основаниях построены во внешнюю сторону равнобедренные треугольники треугольники с углами при вершине $4\pi/n$. Их вершины образуют третий n-угольник. Аналогично из k-го n-угольника при помощи угла $2\pi k/n$ строится $(k+1)$-й n-угольник; равнобедренные треугольники строятся вовне k-го n-угольника при $2\pi k/n < \pi$ и внутрь при $2\pi k/n > \pi$. Докажите, что $(n-1)$-й n-угольник правильный.

2009-4. Докажите, что всякое линейное отображение в себя пространства матриц $n \times n$ с комплексными коэффициентами, сохраняющее определитель, является обратимым.

[4)] На олимпиаде задача предлагалась в несколько другой формулировке. Хотя это и не обязательно для формулировки или решения задачи, заметим, что для достаточно большого n такое подмножество W действительно существует. Это доказывается аналогично [2, с. 16, §2.3, первые две выключные формулы].

[5)] Эта задача интересна как ещё один пример того, что в высоких размерностях вписанный в куб шар «маленький».

[6)] Имеется естественный аналог этой задачи для чётного n.

2009-5. Для непрерывной функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty)$, некоторого $C>0$, любого квадрата K с единичным ребром и любого $x\in K$ выполнено неравенство $f(x)\leqslant C + C\int_K f(x)\,dx$. Докажите, что $f(x)\leqslant Me^{C\|x\|}$ при некотором $M\geqslant 0$.[7)]

Решения и указания к задачам 2008 года

1. Применим индукцию по n. При $n=1$ все очевидно. Пусть наше утверждение верно в размерности $n-1$. Можно считать, что данное тело K компактно (взяв выпуклое компактное подмножество исходного тела объёма более $v/2$). Пусть

$$a=\min\{x_n : (x_1,\ldots,x_n)\in K\},\quad b=\max\{x_n : (x_1,\ldots,x_n)\in K\},\quad l=b-a.$$

Среди сечений

$$K_t := \{(x_1,\ldots,x_{n-1})\colon\ (x_1,\ldots,x_{n-1},t)\in K\}$$

возьмём сечение максимального $(n-1)$-мерного объёма. Пусть это сечение K_c, где $a\leqslant c\leqslant b$, а соответствующий $(n-1)$-мерный объём равен v_0. Можно считать, что $b-c\geqslant l/2$. По предположению индукции в K_c есть $(n-1)$-мерный шар B с центром в $Z=(z_1,\ldots,z_{n-1},c)$ радиуса $r=c_{n-1}v_0$. По построению в K есть точка $X=(x_1,\ldots,x_{n-1},b)$. Положим $Y=(x_1,\ldots,x_{n-1},c)$. Ввиду выпуклости тела K конус Q с вершиной в X и основанием B входит в K. Проверим, что он содержит нужный шар. Заметим, что $|Z-Y|\leqslant 2$.

Пусть $|Z-Y|\geqslant l$. Тогда указанный конус Q содержит шар радиуса $\varrho = \dfrac14\dfrac{rl}{|Z-Y|}\geqslant \dfrac18 rl$. Это видно из прямоугольного треугольника с вершинами в точках X,Y,Z, имеющего катеты l и $|Z-Y|$. В самом деле, на катете YZ возьмём такую точку W, что $|W-Z|=r$. Обозначим через U точку пересечения перпендикуляра в W с гипотенузой. Из подобия треугольников $|U-W|=\dfrac{lr}{|Z-Y|}$. Кроме того, $|U-W|\leqslant r$. Остаётся заметить, что радиус вписанной окружности в прямоугольный треугольник с меньшим катетом $|U-W|$ больше $|U-W|/4$. Итак,

$$\varrho\geqslant \frac18 rl = \frac18 c_{n-1}v_0 l\geqslant \frac18 c_{n-1}v,$$

ибо $v\leqslant lv_0$, что очевидно из принципа Кавальери.

Пусть $|Z-Y|\leqslant l$. Тогда при $r\leqslant l$ конус Q содержит шар радиуса

$$\frac14 r = \frac14 c_{n-1}v_0\geqslant \frac14 c_{n-1}\frac{v}{l}\geqslant \frac18 c_{n-1}v.$$

[7)]На олимпиаде задача предлагалась для $C=1$ с оценкой $f(x)\leqslant M(1+\|x\|)$.

Наконец, при $r \geqslant l$ конус Q содержит шар радиуса $l/4$. Ясно, что l не меньше v/s_{n-1}, где s_{n-1} — $(n-1)$-мерный объём единичного шара в $\mathbb{R}^{n-1}$.

2. Положим $\varrho(x) := \sin x$ (см. сноску к условию). Заменяя g на $g - c$, где c — интеграл от $g\varrho$, переходим к случаю $\int g\varrho\, dx = 0$. В этом случае надо доказать, что интеграл от $fg\varrho$ неотрицателен. Так как интегралы от $(f - f(0))g\varrho$ и $fg\varrho$ равны, то приходим к случаю, когда $f \geqslant 0$. Пусть $x_0 := \inf\{x\colon\ g(x) \geqslant 0\}$. Ясно, что $x_0 > 0$. Тогда $g(x) < 0$ при $x < x_0$, $g(x) \geqslant 0$ при $x > x_0$. Ввиду оценок $0 \leqslant f(x) \leqslant f(x_0)$ при $x < x_0$ и $f(x) \geqslant f(x_0)$ при $x > x_0$ получаем

$$\int_0^{x_0} f(x)g(x)\varrho(x)\,dx \geqslant f(x_0)\int_0^{x_0} g(x)\varrho(x)\,dx,$$
$$\int_{x_0}^{\pi/2} f(x)g(x)\varrho(x)\,dx \geqslant f(x_0)\int_{x_0}^{\pi/2} g(x)\varrho(x)\,dx,$$

откуда

$$\int_0^{\pi/2} f(x)g(x)\varrho(x)\,dx \geqslant f(x_0)\int_0^{\pi/2} g(x)\varrho(x)\,dx = 0.$$

Возможно другое *короткое решение*: с помощью приближений утверждение сводится к случаю непрерывно дифференцируемых функций. Функция $\Phi(x) = \int_0^x g(t)\varrho(t)\,dt$ в предположении, что $g\varrho$ имеет нулевой интеграл, удовлетворяет таким условиям: $\Phi(0) = \Phi(\pi/2) = 0$, $\Phi(x) \leqslant 0$ (если $\Phi'(x_0) = g(x_0)\varrho(x_0) = 0$, то $\Phi'(x) \leqslant 0$ при $x \leqslant x_0$ и $\Phi'(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant x_0$ из-за возрастания g). Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^{\pi/2} f(x)g(x)\varrho(x)\,dx = -\int_0^{\pi/2} f'(x)\Phi(x)\,dx \geqslant 0.$$

Возможно третье *короткое решение* с помощью двойных интегралов (придуманное на олимпиаде А. Трепалиным).

3. *Ответ*: необходимое и достаточное условие —

• либо $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$,

• либо одно из чисел c_1, c_2 ненулевое и оба числа b_1 и b_2 делятся на НОД(c_1, c_2).

4. *Ответ* [3]. Например, подходит фигура, ограниченная кривой

$$x = 12\cos\varphi + \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\cos 4\varphi, \quad y = 12\sin\varphi - \sin 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 4\varphi.$$

Указание. Убедиться в этом, а также получить другие примеры искомых кривых, можно следующим образом. Каждому направлению (задаваемому углом φ) соответствует ровно одна прямая, делящая площадь и периметр фигуры пополам. Обозначим через $2l(\varphi)$ длину отрезка этой прямой, лежащего внутри нашей фигуры. Обозначим через $(x(\varphi), y(\varphi))$ координаты его середины. Нетрудно доказать, что $l(\varphi)$ не зависит от φ, и что

прямая, делящая фигуру пополам, касается кривой $(x(\varphi), y(\varphi))$. $(*)$

Примеры функций x и y, удовлетворяющих условию $(*)$, будем искать в виде $\sum\limits_{k=0}^{n}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$. (Для знакомых с рядами Фурье поиск решения в таком виде естественен.) Условие $(*)$ переформулируется в виде уравнения на коэффициенты a_k, b_k (с параметром l). Граница нашей фигуры задаётся параметрическим уравнением $X(\varphi) = x(\varphi) + l\cos\varphi$, $Y(\varphi) = y(\varphi) + l\sin\varphi$. При этом для достаточно больших l полученная фигура будет выпуклой.

5. *Указание*. Рассмотрим граф, множество вершин которого — W, и в котором ребром соединены вершины на расстоянии 1. Тогда более слабая оценка 0.49×12.1^n легко получается из следующего известного результата: *если среди любых k вершин графа с v вершинами некоторые две соединены ребром, то число рёбер в графе не меньше $(k-1)q(q-1)/2$, где $q := \left[\dfrac{v}{k-1}\right]$*. Для доказательства оценки 0.99×12.1^n нужно уточнить рассуждения, применяемые при доказательстве слабой оценки, используя несуществование $n+2$ точек в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$ с попарными расстояниями 1.

Решения и указания к задачам 2009 года

1. *Ответ*: $n = 5$.

При каждом $n \geqslant 5$ гиперплоскость $x_1 + \dots + x_n = n - 2$ пересекает все замкнутые $(n-1)$-мерные грани n-мерного куба

$$I_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leqslant 1\}.$$

В самом деле: точки $\left(1, \frac{n-3}{n-1}, \dots, \frac{n-3}{n-1}\right)$ и $(-1, 1, \dots, 1)$ этой гиперплоскости лежат на гранях $x_1 = 1$ и $x_1 = -1$ куба I_n, соответственно. Аналогично с остальными гранями. Эта гиперплоскость не пересекает вписанного шара, поскольку расстояние от начала координат до неё равно $\frac{n-2}{\sqrt{n}} > 1$.

Несуществование такой гиперплоскости при $n = 4$ доказывается так (доказательство предложено В. Шмаровым; случай $n \leqslant 3$ аналогичен). Предположим, напротив, что нашлась такая плоскость $a_1x_1 + \dots + a_4x_4 = b$ для 4-мерного куба I_4. Без ограничения общности, считаем, что $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \geqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Поскольку данная гиперплоскость пересекает грань

$x_1 = -1$, имеем $-a_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = b$ для некоторых $x_2, x_3, x_4 \in [-1, 1]$. Тогда

$$0 \leqslant b \leqslant -a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leqslant a_3 + a_4, \quad \text{поэтому}$$
$$b^2 < (a_3 + a_4)^2 = a_3^2 + 2a_3a_4 + a_4^2 \leqslant a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2.$$

Следовательно, гиперплоскость пересекает вписанный шар. Противоречие.

2а. *Указание.* Пусть $H_1, \dots, H_{2^{k-1}}$ — все подмножества множества $\{1, 2, \dots, k\}$, имеющие чётное число элементов. Положим

$$M_s := \left\{ (a_1, b_1, \dots, a_k, b_k) \in \{-1, 0, 1\}^{2k} : (a_i, b_i) = \begin{cases} (\pm 1, 0) & \text{при } i \in H_s, \\ (0, \pm 1) & \text{при } i \notin H_s \end{cases} \right\}.$$

Докажите, что $\bigcup_{s=1}^{2^{k-1}} M_s$ и есть искомое множество из 2^{2k-1} векторов.

2в. Доказательство неравенства $80 \leqslant m(4)$. Возьмём векторы

• $e_1, \dots, e_5$, у которых первые три координаты равны $+1$, среди последних пяти координат ровно одна равна $+1$, а остальные координаты нулевые;

• $e_6, \dots, e_{10}$, у которых первые три координаты равны $+1$, среди последних пяти координат ровно одна равна -1, а остальные координаты нулевые;

• $f_1, \dots, f_{30}$, у которых среди первых трёх координат ровно две равны $+1$ и одна нулю, а среди последних пяти координат ровно две равны $+1$ и ровно три нулю.

Ясно, что $e_i \cdot e_j \geqslant 2$, $f_k \cdot f_l \geqslant 1$ and $e_i \cdot f_k \geqslant 2 - 1 = 1$. Поэтому векторы

$$e_1, \dots, e_{10}, -e_1, \dots, -e_{10}, f_1, \dots, f_{30}, -f_1, \dots, -f_{30}$$

попарно неортогональны.

2в. Доказательство неравенства $m(4) \leqslant 140$. (Это решение принадлежит В. Арутюнову; аналогичное решение предложил В. Вановский.)

Для каждого вектора рассмотрим множество позиций, на которых стоят нули. Поскольку никакие два вектора не ортогональны, у любых двух векторов эти множества не «противоположны» (т. е. не дополняют друг друга). Существует $\binom{8}{4} = 70$ вариантов расположения нулевых позиций. Если, вопреки утверждению задачи, найдётся 141 таких попарно неортогональных векторов, то некоторые 5 из этих векторов будут иметь общие нулевые позиции.

Мы можем считать, что указанные позиции суть 1, 2, 3, 4 и что

$$(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0) \text{ —}$$

один из пяти векторов. Ясно, что не более одного из оставшихся четырёх векторов имеет ровно четыре координаты -1. Ни один из оставшихся четырёх векторов не имеет ровно двух координат -1 (поскольку такой вектор ортогонален вектору $(1,1,1,1,0,0,0,0)$). Не более одного из оставшихся четырёх векторов имеет ровно одну координату -1 (поскольку два различных вектора такого вида ортогональны). Аналогично, не более одного из оставшихся четырёх векторов имеет ровно одну координату 1. Противоречие.

3. Обозначим через $z_1^k, \dots, z_n^k$ комплексные числа, соответствующие вершинам k-го n-угольника, и $\mathbf{z}^k := (z_1^k, \dots, z_n^k) \in \mathbb{C}^n$. Комплексные координаты на плоскости выберем так, чтобы выполнялось условие $z_1^k + \dots + z_n^k = 0$.

Вершины равнобедренных треугольников, построенных на сторонах первого многоугольника, являются линейными функциями вершин этого многоугольника. Поэтому $\mathbf{z}^2 = A_1\mathbf{z}^1$ для некоторой матрицы A_1. Аналогично, $\mathbf{z}^3 = A_2\mathbf{z}^2$, $\mathbf{z}^4 = A_3\mathbf{z}^3$ и т. д. для некоторых матриц A_2, A_3, $\dots$. Заметим, что

1. Векторы $v_i = (1, e^{2\pi i/n}, e^{4\pi i/n}, \dots, e^{2(n-1)\pi i/n})$ для $i = 0, \dots, n-1$ образуют набор собственных векторов матрицы A_k для любого k.

2. Одно из собственных чисел матрицы A_k равно нулю.

3. Ему соответствует ровно один собственный вектор v_{n-k}.

Условие 2 означает, что умножение на матрицу A_k задает проектирование пространства $\mathbb{C}^n$ на некоторую гиперплоскость. Из условия 3 получаем, что эти гиперплоскости различны для разных k. Следовательно, умножение на произведение матриц $A_{n-2}A_{n-3}\dots A_2A_1$ задает проекцию подпространства $z_1 + \dots + z_n = 0$ на одномерное подпространство, задающее правильные n-угольники. Утверждение задачи доказано.

4. Обозначим данное отображение через T. Пусть, напротив, найдётся матрица $A \neq 0$, для которой $T(A) = 0$. Существует вырожденная матрица B, для которой $A+B$ невырождена (докажите!). Тогда следующая цепочка равенств даёт противоречие:

$$0 = \det B = \det T(B) = \det(T(B) + T(A)) = \det T(A+B) \neq 0.$$

5. Пусть для непрерывной функции $f_1\colon \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, некоторого $C > 0$ и любых единичного отрезка K и точки $x \in K$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant C + C\int_K f(x)\,dx$. Тогда

$$f_1(x) \leqslant C + C\int_{x-1}^{x} f_1(y)\,dy \leqslant C + C\int_{-1/2}^{x} f_1(y)\,dy \quad \text{при } x \geqslant 1/2.$$

Отсюда

$$f_1(x) \leqslant \Bigl(C + C\int_{-1/2}^{0} f_1(y)\,dy\Bigr)e^{Cx} \leqslant \Bigl(C + C\int_{-1/2}^{1/2} f_1(y)\,dy\Bigr)e^{Cx} \quad \text{при } x \geqslant 1/2.$$

(Этот несложный переход — частный случай *неравенства Гронуолла*: для всякой неотрицательной функции φ из неравенства $\varphi(x) \leqslant A+B\int_{x_0}^{x}\varphi(y)\,dy$ при $x>0$ следует, что $\varphi(x) \leqslant \bigl(A+B\int_{x_0}^{0}\varphi(y)\,dy\bigr)e^{Bx}$ при $x>0$.)

Аналогичная оценка верна и при $x<-1/2$, что в итоге даёт

$$f(x) \leqslant \Bigl(C + C\int_{-1/2}^{1/2} f_1(y)\,dy\Bigr)e^{C|x|},$$

поскольку при $|x| \leqslant 1/2$ это верно по условию.

Пусть $x \in \mathbb{R}^2$ и $|x| > 1/2$. Повернём систему координат так, что $x = (0, x_2)$. Можно считать, что $x_2 > 1/2$. Введём функцию $\eta(t) := \int_{-1/2}^{1/2} f(z,t)\,dz$. Интегрированием неравенства

$$f(x_1,t) \leqslant C + C\int\limits_{[-1/2,1/2]\times[t-1,t]} f(y)\,dy \quad \text{по } x_1 \text{ на отрезке } [-1/2,1/2]$$

получаем $\eta(t) \leqslant\ +\ \int_{t-1}^{t}\eta(u)\,du$. По одномерному случаю это даёт

$$\eta(t) \leqslant \Bigl(1+\int_{-1/2}^{1/2}\eta(s)\,ds\Bigr)e^{C|t|} = \Bigl(1+\int\limits_{[-1/2,1/2]^2} f(x)\,dx\Bigr)e^{C|t|}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(0,x_2) &\leqslant C + C\int\limits_{[-1/2,1/2]\times[x_2-1,x_2]} f(y)\,dy = \\ &= C + C\int\limits_{x_2-1}^{x_2}\eta(t)\,dt \leqslant C + C^2 + C^2e^{C|x_2|}\int\limits_{[-1/2,1/2]^2} f(y)\,dy, \end{aligned}$$

что завершает доказательство.

Другой способ изложить это решение, придуманный участниками олимпиады, основан на следующей лемме (приведём её формулировку для $C=1$): $f(x) \leqslant 2 + \max\limits_{y\in K} f(y)$ для любого единичного квадрата K и любой точки x, лежащей прямоугольнике $1 \times \dfrac{1}{2}$, пересекающемся с K по общему ребру.

Справедливо следующее более общее утверждение.

Пусть $f\colon \mathbb{R}^d \to [0,+\infty)$ — локально ограниченная измеримая функция, причём для любых куба K с ребром единичной длины и $x \in K$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant C_1 + C_2\int_K f(y)\,dy$, где C_1 и C_2 не зависят от K.

Тогда $f(x) \leqslant M \exp(C_2|x|)$, *где*

$$M = C_1 + C_1C_2 + \max(C_2^2, 1) \sup_{A \in SO_d} \int_{A([-1/2,1/2]^d)} f(y)\, dy.$$

Список литературы

[1] В. И. Богачев, А. М. Райгородский, А. Б. Скопенков, Н. А. Толмачев. *Студенческие олимпиады и межкафедральный семинар на мехмате Московского государственного университета* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 12, 2008. С. 205–222. `http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/stolymp.pdf`

[2] А. М. Райгородский. *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*. М.: МЦНМО, 2007.

[3] А. А. Заславский. *Свойства и признаки окружности* // Квант. №6, 2001. С. 32–33.

И. В. Аржанцев, механико-математический факультет Московского Государственного Университета.
Email: `arjantse@mccme.ru`

В. И. Богачёв, механико-математический факультет Московского Государственного Университета.

Email: `vibogach@mail.ru`

А. А. Заславский, Центральный Экономико-Математический Институт
Email: `zaslavsky@mccme.ru`

В. Ю. Протасов, механико-математический факультет Московского Государственного Университета.
Email: `v-protassov@yandex.ru`

А. М. Райгородский, механико-математический факультет Московского Государственного Университета, факультет инноваций и высоких технологий Московского Физико-технического Института.
Email: `mraigor@yandex.ru`

А. Б. Скопенков, механико-математический факультет Московского Государственного Университета, Независимый Московский Университет и Московский Институт Открытого Образования.
Email: `skopenko@mccme.ru`
Инфо: `http://dfgm.math.msu.su/people/skopenkov/papersc.ps`