Студенческие математические олимпиады МФТИ

М. В. Балашов И. И. Богданов Р. Н. Карасев

В статье рассказано о 36-летнем опыте проведения Студенческой математической олимпиады Московского физико-технического института (государственного университета). Приведены примеры задач. Статья рассчитана на широкую аудиторию.

Студенческой математической олимпиаде Московского физико-технического института (МФТИ) в 2009 году исполняется 36 лет. Впервые олимпиада состоялась в 1974 году в рамках Всесоюзной олимпиады студентов по математике, в качестве её первого (институтского) тура. С тех пор олимпиада ежегодно проводится в марте–апреле весеннего семестра.

Основной целью олимпиады являются повышение интереса к математике у студентов, стимулирование их творческой активности. Для проведения олимпиады на кафедре высшей математики ежегодно создаются оргкомитет и жюри, которое по традиции возглавляет заведующий кафедрой. Оргкомитет проводит всю подготовительную работу, включающую, в частности, ознакомление студентов с задачами, предлагавшимися на прошлых олимпиадах.

Количество участников олимпиады колеблется в пределах от 70 до 120 человек. Проверку работ осуществляют около 10 преподавателей кафедры. Лучшие работы независимо перепроверяются и сравниваются членами жюри.

Одной из особенностей Студенческой олимпиады по математике МФТИ является её раздельное проведение на 1-м и старших курсах. Традиционно это связано с тем, что объем знаний по математике на 1-м курсе существенно ниже, чем на старших курсах: ещё не прочитан толком математический анализ, а многие другие дисциплины даже не изучались (например, дифференциальные уравнения).

Другая особенность нашей олимпиады — большой удельный вес задач по анализу. Это также связано со спецификой преподавания математики в МФТИ, основы которого заложили академик РАН С. М. Никольский, члены-корреспонденты РАН Л. Д. Кудрявцев, О. В. Бесов, член-корреспондент РАО Г. Н. Яковлев (все четверо — специалисты по теории функций).

Помимо задач по анализу, присутствуют задачи по линейной алгебре, дифференциальным уравнениям, геометрии. Встречаются и задачи по теории функций комплексного переменного, но они как правило допускают решения в рамках теории функций вещественной переменной.

За время проведения Студенческой математической олимпиады МФТИ авторами задач и организаторами олимпиады были такие замечательные учёные и педагоги, как Л. Д. Кудрявцев, Г. Н. Яковлев, А. А. Болибрух, Б. И. Голубов, С. П. Коновалов, Л. П. Купцов, Л. В. Курочкина, Е. С. Половинкин, С. В. Резниченко, А. П. Савин, В. М. Уроев, Б. В. Федосов и многие другие.

До 1990 года олимпиада МФТИ проводилась в рамках Всесоюзной математической олимпиады студентов, в качестве её первого тура. По результатам первого тура формировалась команда МФТИ для участия в Московском городском туре олимпиады. Наши студенты во II-м туре неизменно добивались высоких результатов, как в командном соревновании, где обычно выступало 35–45 команд вузов Москвы, так и в личном первенстве. Команда МФТИ, как правило, занимала почётное II место, пропуская вперёд только сильную команду механико-математического факультета МГУ. В личном первенстве члены команды МФТИ регулярно занимали призовые места. Это давало им право выступать в третьем заключительном туре олимпиады в составе команд Москвы и России. Уже в первой Всесоюзной олимпиаде студентов, проходящей на механико-математическом факультете МГУ в октябре 1974 года, жюри заключительного тура, возглавляемое академиком П. С. Александровым, присудило 3-е призовое место студенту 2-го курса МФТИ В. В. Сологубову. Ещё большего успеха добились наши студенты в ноябре 1985 года в Омском политехническом институте. Тогда команда Москвы, укомплектованная в основном студентами МФТИ, заняла I место. Первые два места в индивидуальном первенстве также достались нашим студентам.

Начиная с 1991 года II и III туры не проводятся. Составить впечатление об этих олимпиадах читатель может по книгам [1] и [2].

В отличие от развала студенческого олимпиадного движения в России в начале 90-х годов, за рубежом в это время интерес к математическим олимпиадам студентов возрос. С 1994 года возникла олимпиада IMC [3] (International Mathematics Competition for University Students). Студенты МФТИ эпизодически (когда было финансирование) участвовали в соревнованиях IMC и всегда добивались хороших результатов, входя обычно в командном первенстве в первую пятёрку из более чем 40 университетов – участников.

Взаимодействие с IMC отразилось в том, что часть задач олимпиада МФТИ заимствовала из арсенала IMC. Некоторые задачи посылались нами специально для IMC: задача 5 (а) второго дня IMC-2, задача 6 второго дня IMC-9, задача 3 второго дня IMC-10, задача 5 первого дня IMC-11, задача 5 второго дня IMC-13.

Последние годы структура задач олимпиады МФТИ примерно соответствует структуре задач одного дня IMC: 2 простые, 2 средние и 2 сложные задачи. При этом мы стараемся — насколько это в наших силах — давать оригинальные задачи. Многие из этих задач являются кусочками актуальных сегодня математических проблем или представляют классические, но малоизвестные в олимпиадной среде результаты. Решение такой задачи даёт замечательную возможность совершить небольшое открытие.

Нами также предпринимаются попытки привлечь к участию в олимпиаде студентов других вузов. В 2008 и 2009 годах для участия в нашей олимпиаде мы приглашали студентов механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, а в 2009 году студенты МФТИ сами участвовали в заключительном туре олимпиады механико-математического факультета МГУ по математике. Кроме того, в 2009 году в олимпиаде МФТИ участвовали студенты Белорусского государственного университета и Южно-уральского государственного университета. Результаты можно найти на сайтах [4] и [5].

Ниже мы приводим задачи 2009 года и некоторые задачи прошлых лет. В конце статьи приведены решения задач. Подробную информацию о задачах, начиная с 1993 года, можно найти на сайте Студенческой математической олимпиады МФТИ [4].

Задачи 2009 года

1 (1 курс). Пусть A, B — два непустых подмножества $\mathbb{R}$, причём $A \cap \overline{B} = \varnothing$ и $B \cap \overline{A} = \varnothing$ (черта означает замыкание). Доказать, что найдутся два непересекающихся открытых множества $U, V \subset \mathbb{R}$ такие, что $U \supseteq A$, $V \supseteq B$.

2 (1 курс). Пусть A — бесконечное множество вещественных чисел. Доказать, что существует строго монотонная последовательность $\{a_n\}$, все члены которой принадлежат A.

3 (все курсы). Пусть a, b, c, d — векторы в $\mathbb{R}^n$, $(\cdot,\cdot)$ — стандартное скалярное произведение. Доказать, что

$$((a,c)+(b,d))^2 + ((a,d)-(b,c))^2 \leqslant (a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2).$$

4 (1 курс). Пусть аффинное отображение (композиция линейного оператора и сдвига) $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что для некоторого $x \in \mathbb{R}^n$ множество $\{\alpha^k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ ограничено. Доказать, что α имеет неподвижную точку, то есть для некоторого $y \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha(y) = y.$$

5 (все курсы). 1) Пусть $f\colon (0,1]^2 \to (0,+\infty)$ — функция, непрерывная по совокупности переменных. Верно ли, что найдётся непрерывная функция $g\colon (0,1] \to (0,+\infty)$ такая, что $g(x) = o(f(x,y))$, $x \to +0$ при любом $y \in (0,1]$?

2) Пусть $f\colon (0,1]^2 \to (0,+\infty)$ — функция, непрерывная по x при любом фиксированном $y \in (0,1]$. Верно ли, что найдётся непрерывная функция $g\colon (0,1] \to (0,+\infty)$ такая, что $g(x) = o(f(x,y))$, $x \to +0$ при любом $y \in (0,1]$?

6 (1 курс). Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область с гладкой границей ∂D без самопересечений, $G = \overline{D}$. Для каждой точки $x \in \partial G$ найдётся круг $B^{(x)}$ радиуса R такой, что $x \in B^{(x)}$, $B^{(x)} \cap G = B^{(x)} \cap \partial G$.

1) Доказать, что найдётся окрестность U множества G такая, что для каждой точки $x \in U$ существует единственная точка $\pi(x) \in G$ со свойством $\|x - \pi(x)\| = \inf\limits_{g \in G} \|x - g\|$.

2) Доказать, что окрестность U в пункте 1) можно выбрать так, что для некоторого числа $L > 0$ и для любых точек $x, y \in U$ выполнено неравенство

$$\|\pi(x) - \pi(y)\| \leqslant L \cdot \|x - y\|.$$

7 (старшие курсы). Доказать, что ненулевая комплексная матрица A размера 2×2 является квадратом ($A = B^2$) тогда и только тогда, когда $A^2 \neq 0$.

8 (старшие курсы). Дано дифференциальное уравнение с запаздыванием $x'(t) = x(t-1)$. Верно ли, что для каждого решения $x(t)$ этого уравнения выполнено

1) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{x(t)}{e^t} = 0$?

2) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{x^2(t)}{e^t} = 0$?

9 (старшие курсы). Существует ли такой набор I интервалов, лежащих в интервале $(0,1)$, что каждая рациональная точка интервала $(0,1)$ принадлежит конечному числу интервалов из I, а каждая иррациональная точка этого отрезка — бесконечному числу интервалов из I?

10 (старшие курсы). Пусть плоская гладкая кривая Γ ограничивает выпуклую область Ω площадью 10π. Отрезок длины 1 с концами на кривой Γ протаскивается по кривой Γ так, что его концы проходят все точки кривой Γ, а середина описывает гладкую кривую γ, которая ограничивает выпуклую область $G \subset \Omega$. Найти площадь G.

Задачи разных лет

11 (2005, все курсы). Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x = x_0$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Доказать, что в условии $(*)$ для каждого $\varepsilon > 0$ можно так подобрать $\delta = \delta(\varepsilon)$, что функция $\delta(\varepsilon)$ будет непрерывной при $\varepsilon > 0$.

12 (2008, 1 курс). Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ — два базиса в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что существует такая перестановка $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_n}$ векторов $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, что для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ векторы $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_k}, e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n$ образуют базис.

13 (2008, все курсы). Пусть $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Доказать, что найдётся подмножество $X \subset [0,1]$ мощности континуум, на котором функция f монотонна.

14 (2002, все курсы). Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — компакт и

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ \middle|\ \exists\,!\, a \in A: \ \|x - a\| = \sup_{y \in A} \|x - y\| \right\}.$$

Доказать, что замыкание множества B совпадает с $\mathbb{R}^n$ («!» означает «единственный»).

15 (2006, старшие курсы). Доказать, что симметричная матрица A неотрицательно определена тогда и только тогда, когда для любой симметричной неотрицательно определённой матрицы B выполнено неравенство $\operatorname{tr} AB \geqslant 0$.

Решения задач 2009 года

Задача 1. Будем рассматривать только симметричные окрестности точек. По условию у каждой точки $a \in A$ есть окрестность $U(a)$, которая не пересекается с B. У каждой точки $b \in B$ есть окрестность $V(b)$, которая не пересекается с A. Из неравенства треугольника легко видеть, что если мы возьмём вдвое меньшие окрестности $U'(a)$ и $V'(b)$, то они не будут пересекаться между собой при любых $a \in A$, $b \in B$. Тогда множества

$$U = \bigcup_{a \in A} U'(a), \quad V = \bigcup_{b \in B} V'(b)$$

обладают требуемым свойством.

Задача 2. Множество A обладает предельной точкой $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $\{x_i\}$ — последовательность точек множества A, сходящаяся к x_0 ($x_i \neq x_0$). Тогда одно из множеств $I = \{i : x_i < x_0\}$ или $I' = \{i : x_i > x_0\}$

бесконечно; пусть для определённости это множество I. Тогда, заменив x_i на её подпоследовательность с индексами, лежащими в I, можно считать, что $x_i < x_0$ при любом i.

Осталось построить монотонную подпоследовательность $\{y_i\}$ последовательности $\{x_i\}$. Положим $y_1 = x_1$, $i_1 = 1$. Пусть отрезок $y_1 < \dots < y_n$ уже построен. Так как $y_n < x_0$, то из сходимости $x_i \to x_0$ существует такое натуральное число i_{n+1}, что $x_i > y_n$ при всех $i \geqslant i_{n+1}$ (ясно, что $i_{n+1} > i_n$). Тогда можно положить $y_{n+1} = x_{i_{n+1}}$. Последовательность $\{y_n\}$ построена.

Задача 3. Рассмотрим вектора $a+ib, c+id \in \mathbb{C}^n$. Тогда по неравенству Шварца
$$|(a+ib, c+id)|^2 \leqslant |a+ib|^2 \cdot |c+id|^2,$$
раскрывая скобки, получаем
$$|(a,c)+(b,d)+i(b,c)-i(a,d)|^2 \leqslant (a^2+b^2)\cdot(c^2+d^2).$$
По определению левая часть равна
$$((a,c)+(b,d))^2 + ((a,d)-(b,c))^2.$$

Задача 4. Пусть α представляется в виде
$$\alpha(x) = Ax + b,$$
где A — линейный оператор и $b \in \mathbb{R}^n$. Если неподвижной точки нет, то уравнение
$$Ax - x + b = 0$$
не имеет решений. Иначе говоря, вектор b не лежит в образе линейного оператора $A - I$. Следовательно, найдётся линейная функция $\lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ \lambda((A-I)x) = 0 \text{ и } \lambda(b) \neq 0.$$
Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$ получается
$$\lambda(\alpha(x)) = \lambda(Ax - x) + \lambda(x+b) = \lambda(x) + \lambda(b),$$
а следовательно, $\lambda(\alpha^k(x)) = \lambda(x) + k\lambda(b)$. Значит, для любого $x \in \mathbb{R}^n$ последовательность $\{\lambda(\alpha^k(x))\}_{k\in\mathbb{N}}$ неограниченна, что противоречит условию задачи.

Задача 5. 1) Можно положить $g(x) = x \cdot \min\limits_{y\in[x,1]} f(x,y)$ (минимум существует и положителен из непрерывности и положительности $f(x,y)$). Тогда при любом фиксированном $y \in (0,1]$ неравенство $g(x) \leqslant xf(x,y)$ верно для любого $0 < x \leqslant y$, откуда $g(x) = o(f(x,y))$, $x \to +0$.

2) Множество M всех последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуум. Зафиксируем взаимно однозначное соответствие

между M и $(0,1]$; пусть $\{a_n^{(y)}\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, соответствующая числу $y \in (0,1]$. Тогда существует непрерывная функция $h_y(x)\colon (0,1] \to (0,\infty)$ такая, что $h_y(1/n) = 1/a_n^{(y)}$ (можно, например, сделать $h_y(x)$ линейной на любом отрезке $[1/(n+1), 1/n]$). Положим $f(x,y) = h_y(x)$.

Рассмотрим произвольную функцию $g(x)\colon (0,1] \to (0,+\infty)$; пусть $s_n = \lceil 1/g(1/n) \rceil$ (наименьшее натуральное число $\geqslant 1/g(1/n)$). Тогда найдётся $y \in (0,1]$, при котором $f(1/n, y) = h_y(1/n) = 1/s_n \leqslant g(1/n)$. Это означает, что $g(1/n) \neq o(f(1/n,y))$, $n \to \infty$, и уж тем более $g(x) \neq o(f(x,y))$, $x \to +0$.

Задача 6. 1) Выберем $r \in (0,R)$. Пусть U есть r-окрестность множества G, т. е. такие точки x, что $\inf\limits_{g\in G} \|x-g\| < r$.

Через $B_r(a)$ обозначим замкнутый круг радиуса r с центром в точке a.

Зафиксируем $x \in U$. Непустота множества ближайших к x точек множества G следует из компактности круга на плоскости и теоремы Вейерштрасса.

Пусть y — точка из G, для которой $\|x-y\| = \inf\limits_{g\in G} \|x-g\| = \varrho < r < R$.

Тогда $G \cap \operatorname{int} B_\varrho(x) = \varnothing$ и $y \in B_\varrho(x) \cap \partial G$. Поэтому касательная прямая (прямая l) к кривой ∂G в точке y совпадает с касательной прямой к окружности $\partial B_\varrho(x)$ в точке y. По условию теоремы существует круг $B^{(y)}$ радиуса $R > \varrho$, такой, что $y \in B^{(y)}$, $B^{(y)} \cap G = B^{(y)} \cap \partial G$. С необходимостью $B^{(y)}$ касается прямой l в точке y (иначе нарушается условие $B^{(y)} \cap G = B^{(y)} \cap \partial G$), значит круги $B^{(y)}$ и $B_\varrho(x)$ касаются прямой l в точке y и оба лежат в одной полуплоскости относительно l (иначе $B^{(y)}$ имеет общие точки с $\operatorname{int} G$). Поэтому $\{y\} \cup \operatorname{int} B^{(y)} \supset B_\varrho(x)$. Следовательно, $y \in G$ — единственная ближайшая к x.

2) Покажем, что отображение $U \ni x \to \pi(x) \in G$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L = \dfrac{R}{R-r}$. Множество U то же, что и в пункте 1).

Пусть $x_1, x_2 \in U \setminus G$, точки $y_i = \pi(x_i)$ — проекции x_i на G, z_i — центры шаров $B^{(y_i)}$ соответственно. Тогда по свойству шаров $\|z_1 - y_1\| \leqslant \|z_1 - y_2\|$, $\|z_2 - y_2\| \leqslant \|z_2 - y_1\|$.

Введём декартову систему координат с центром y_1 так, чтобы точка y_2 имела координаты $(1,0)$; пусть штрих означает абсциссу после проекции (т. е. x_1' — абсцисса точки x_1 и т. п.). Тогда из доказанного $z_1' \leqslant 1/2$, $z_2' \geqslant 1/2$; поскольку x_1, x_2 делят отрезки z_1y_1, z_2y_2 в отношении, большем $(R-r) : r$, то $x_1' \leqslant (1/2)\cdot(r/R)$, $x_2' \geqslant 1 - (1/2)\cdot(r/R)$, то есть $|x_2' - x_1'| \geqslant 1 - r/R$. Значит, и $\|x_2 - x_1\| \geqslant \dfrac{R-r}{R}\|y_1 - y_2\|$, что и требовалось.

Если $x_2 = y_2 \in G$, то можно повторить предыдущие рассуждения, взяв в качестве точки z_2 любую точку со свойствами $\|z_2 - y_2\| = R$, $\|z_2 - y_2\| \leqslant \leqslant \|z_2 - y_1\|$.

Задача 7. Если $A \neq 0$, $A^2 = 0$ и $A = B^2$, то $B^4 = 0$. Следовательно, все собственные значения B нулевые и по теореме Гамильтона – Кэли $A = B^2 = 0$ — противоречие.

Пусть теперь $A^2 \neq 0$. Тогда если A можно привести к диагональному виду

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

то можно взять

$$SBS^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix}.$$

Иначе A можно привести к виду жордановой клетки с ненулевыми (так как $A^2 \neq 0$) собственными значениями

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

и можно взять

$$SBS^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \frac{1}{2\sqrt{a}} \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\sqrt{x}$ обозначает некоторый корень из комплексного числа.

Задача 8. 1) Верно. Пусть $c_n = \sup_{t \in [n-1,n]} |x(t)|$. Тогда $|x'(t)| \leqslant c_n$ при $t \in [n, n+1]$, то есть $|x(t)| \leqslant c_n + c_n(t-n)$ при этих же t. Значит, $c_{n+1} \leqslant 2c_n$, откуда и следует $|x(t)| \leqslant 2^{n+1}c_1$, $t \in [n, n+1]$.

2) Неверно. Будем искать решение в виде $x(t) = e^{\lambda t}$. Условие $x'(t) = = x(t-1)$ даёт $\lambda = e^{-\lambda}$.

Пусть λ — вещественное число. Тогда существует вещественное решение $\lambda_0 \in (0,1)$ уравнения $\lambda = e^{-\lambda}$, причём при $\lambda \in (0, \lambda_0)$ имеем $\lambda < e^{-\lambda}$, а при $\lambda \in (\lambda_0, 1)$ имеем $\lambda > e^{-\lambda}$. Поскольку $\frac{1}{2} < e^{-\frac{1}{2}}$, то $\lambda_0 > \frac{1}{2}$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^{2\lambda_0 t}}{e^t} = +\infty$.

Задача 9. Существует. Пусть

$$I_n = \left\{ \left(\frac{a}{n!}, \frac{a+1}{n!} \right) \middle| \, a = 0, 1, \ldots, n! - 1 \right\}, \quad I = \cup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Ясно, что множества I_n попарно не пересекаются. Далее, каждая иррациональная точка принадлежит ровно одному интервалу из каждого множества I_n, то есть бесконечному множеству интервалов из I. Каждая же рациональная точка (скажем, со знаменателем k) не принадлежит интервалам из множеств I_n при $n \geqslant k$.

Задача 10. Пусть координаты концов протаскиваемого отрезка AB и его середины C есть

$$A\ (x_1, y_1) \in \Gamma, \quad B\,(x_2, y_2) \in \Gamma, \quad C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \in \gamma \subset \Omega.$$

Без ограничения общности можно считать, что при протаскивании отрезка точки A и B движутся по кривой Γ против часовой стрелки. По следствию из формулы Грина получаем, что

$$\mu\Omega = 10\pi = \frac{1}{2}\int_\Gamma x_1\,dy_1 + x_2\,dy_2 =$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Gamma x_1\,dy_2 + x_2\,dy_1 + \frac{1}{2}\int_\Gamma (x_1 - x_2)\,d(y_1 - y_2).$$
$$\mu G = \frac{1}{4}\int_\Gamma (x_1 + x_2)\,d(y_1 + y_2) = \frac{1}{4}\int_\Gamma x_1\,dy_1 + x_2\,dy_2 + \frac{1}{4}\int_\Gamma x_1\,dy_2 + x_2\,dy_1 =$$
$$= 5\pi + \frac{1}{4}\int_\Gamma x_1\,dy_2 + x_2\,dy_1,$$

отсюда

$$\frac{1}{2}\int_\Gamma x_1\,dy_2 + x_2\,dy_1 = 2\mu G - 10\pi.$$

В итоге получаем, что

$$10\pi = 2\mu G - 10\pi + \frac{1}{2}\int_\Gamma (x_1 - x_2)\,d(y_1 - y_2).$$

Поскольку при протаскивании отрезка AB по кривой Γ вектор $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ длины 1 совершает поворот на 2π против часовой стрелки, то $\int_\Gamma (x_1 - x_2)\,d(y_1 - y_2) = \pi$, откуда $\mu G = \frac{39}{4}\pi$.

Решения задач разных лет

Задача 11. Для всякого числа $\varepsilon > 0$ определим

$$\Delta(\varepsilon) = \sup\{\delta > 0 \mid \forall x \in U_\delta(x_0) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}.$$

Легко видеть, что для любого числа $\varepsilon > 0$ выполнено включение $\Delta(\varepsilon) \in (0, +\infty]$, также если $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то $\Delta(\varepsilon_1) \leqslant \Delta(\varepsilon_2)$ (считаем, что $+\infty \leqslant +\infty$). Если для любого числа $\varepsilon > 0$ выполнено равенство $\Delta(\varepsilon) = +\infty$, то $f(x) = f(x_0)$ и утверждение очевидно.

Пусть найдётся такое число $\varepsilon_0 > 0$, что $\Delta(\varepsilon_0) < +\infty$. Тогда функция

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int\limits_0^{\varepsilon} \Delta(t)\,dt, & 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \\ \dfrac{1}{\varepsilon_0}\displaystyle\int\limits_0^{\varepsilon_0} \Delta(t)\,dt, & \varepsilon \geqslant \varepsilon_0, \end{cases}$$

является искомой.

Задача 12. Пусть среди $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ выбрано $k < n$ таких различных векторов $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_k}$, что $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_k}, e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n$ — базис. Рассмотрим $(n-1)$-мерное подпространство $V_{k+1} = \langle e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_k}, e_{k+2}, \ldots, e_n\rangle$. Среди векторов $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ найдётся вектор v, не лежащий в V_{k+1}. Заметим, что v отличен от $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_k}$, поскольку $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_k} \in V_{k+1}$. Положим $e'_{i_{k+1}} = v$, тогда $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_{k+1}}, e_{k+2}, e_{k+3}, \ldots, e_n$ — базис.

Рассуждая как показано выше для $k = 0, 1, \ldots, n-1$, мы получим требуемую перестановку $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_n}$.

Задача 13. Пусть найдутся такие числа $a, b \in [0,1]$, что $a < b$ и $f(a) < f(b)$. Если это не так, то для любых чисел $a, b \in [0,1]$, $a < b$, выполнено $f(a) \geqslant f(b)$ и требуемое доказано.

Для каждого $c \in [f(a), f(b)]$ определим $x_c = \sup\{x \in [a,b] \mid f(x) = c\}$. В силу непрерывности f получаем, что $f(x_c) = c$ и из $c_1 < c_2$ следует $x_{c_1} < x_{c_2}$ и $f(x_{c_1}) = c_1 < c_2 = f(x_{c_2})$. По построению $\{x_c \mid c \in [f(a), f(b)]\}$ — искомый континуум.

Задача 14. Возьмём произвольную точку $x \in \mathbb{R}^n$. В силу непрерывности нормы и компактности множества A найдётся такая точка $a \in A$, что $\|x - a\| = \sup\limits_{y \in A} \|x - y\|$. Пусть $l = \{x + \lambda(x-a) \mid \lambda > 0\}$. Обозначим $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| \leqslant r\}$. Тогда для любого $z \in l$ имеем

$$A \subset B_{\|x-a\|}(x) \subset B_{\|z-a\|}(z),$$

причём пересечение границ двух последних шаров есть одноточечное множество $\{a\}$. Следовательно, $l \subset B$. Но $x \in \bar{l}$, поэтому $x \in \overline{B}$.

Задача 15. Заметим, что если X — столбец, то матрица XX^T неотрицательно определена и симметрична. Также заметим, что всякая неотрицательно определённая симметричная B представляется в виде (теорема о приведении к диагональному виду)

$$B = X_1X_1^T + \cdots + X_nX_n^T.$$

Пусть A неотрицательно определена. Тогда $B = X_1X_1^T + \dots + X_nX_n^T$ и

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr} AX_iX_i^T = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr} X_i^T AX_i \geqslant 0$$

по определению положительной определённости.

В обратную сторону: для любого столбца X положим $B = XX^T$ и получим, что

$$\operatorname{tr} X^T AX = \operatorname{tr} AXX^T \geqslant 0.$$

Благодарности. Работа поддержана АВЦП «Развитие потенциала высшей школы», грант 2.1.1/500. Мы благодарим «Клуб выпускников МФТИ» и его исполнительного директора С. Н. Марышева, а также ректорат МФТИ за финансовую поддержку.

Олимпиада 2009 года проводилась в рамках Всероссийской олимпиады по прикладной математике и физике, поддержанной РОА, мероприятие 2.2, проект НК-334(1). Работа частично поддержана фондом «Династия».

Список литературы

[1] В.А. Садовничий, А.С. Подколзин. *Задачи студенческих математических олимпиад*. М.: Наука, 1980.

[2] В.А. Садовничий, А.А. Григорьян, С.В. Конягин. *Задачи студенческих математических олимпиад*. М.: Изд. МГУ, 1987.

[3] `http://www.imc-math.org/` — сайт международной математической олимпиады студентов университетов.

[4] `http://math.mipt.ru/olymp/` — сайт Студенческой математической олимпиады МФТИ.

[5] `http://dfgm.math.msu.su/materials.php` — учебные материалы кафедры дифференциальной геометрии и приложений мехмата МГУ (раздел студенческие олимпиады и конкурсы).

М. В. Балашов, кафедра высшей математики МФТИ, Институтский пер. 9, Долгопрудный, Московская область, Россия 141700.
Email: balashov@mail.mipt.ru
И. И. Богданов, кафедра высшей математики МФТИ, Институтский пер. 9, Долгопрудный, Московская область, Россия 141700.
Email: ilya.i.bogdanov@gmail.com
Р. Н. Карасев, кафедра высшей математики МФТИ, Институтский пер. 9, Долгопрудный, Московская область, Россия 141700.
Email: r_n_karasev@mail.ru