Математическая интернет-олимпиада для студентов

А. Домошницкий В. О. Бугаенко А. Я. Канель-Белов

17 декабря 2009 года состоялась 5-я международная Математическая интернет-олимпиада для студентов. За четыре часа её проведения было зафиксировано более четырёх тысяч посещений сайта, на котором были выложены условия задач, а участниками олимпиады стали 489 студентов из 19 стран мира. География участников простиралась от Бразилии и США на западе до Вьетнама на востоке. Среди победителей — призёры национальных и международных математических олимпиад из России, Украины, Румынии, Армении, Бразилии, Грузии и Израиля. Штаб олимпиады располагается в Ариэльском Университетском Центре в Самарии (Израиль).

Сегодня существуют множество соревнований по различным предметам, в том числе и олимпиад по математике. Каждая олимпиада относится, как правило, к одному из двух типов. Олимпиада первого типа рассчитана на «профессионалов», для решения её задач требуется определённая тренировка. Новичку на такой олимпиаде мало что светит. Даже формулировки задач будут для него непривычными. Он, скорее всего, ничего не решит, и его участие в олимпиаде может сыграть скорее отрицательную, чем положительную роль. Вместо того, чтобы разбудить интерес к науке, это может наоборот привести к разочарованию и неуверенности в себе. Олимпиада второго типа рассчитаны на массового участника. Её задачи вполне посильны новичку, для их решения достаточно проявить немного сообразительности, а некоторые из задач и вовсе не сильно отличаются от тех, которые студенты получают на своих занятиях в качестве упражнений. Однако, сильным студентам такие олимпиады, как правило, не интересны. Олимпиадные «профессионалы» смотрят на них порой с пренебрежением, демонстрируя, что участвовать в такой олимпиаде весьма несолидно.

Можно ли добиться, чтобы олимпиада была привлекательна, как для профессионала-олимпиадника, так и для новичка, и каждому из них приносила пользу? Мы постарались найти такую оптимальную форму. Участникам было предложено избыточное количество задач, среди которых были, как достаточно простые, так и весьма сложные. Таким образом,

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 14, 2010(235–238)

каждый участник мог выбрать для решения задачи, соответствующие своему уровню. Однако, оценивались задачи неодинаково: количество баллов, дающееся за решение задачи, обратно пропорционально количеству участников, её решивших. Таким образом, на результат победителей реально влияют лишь сложные задачи. Олимпиадник вполне может взяться решать только их, а на простые, но не очень ему интересные задачи, времени не тратить. С другой стороны, такой подбор задач приводит к тому, что «нулевых» работ практически нет, так как даже слабые студенты могут найти несколько посильных для себя задач. При этом, результат какого-нибудь новичка, справившегося, скажем, с четырьмя задачами, вовсе не выглядит провалом в сравнении с результатом победителя, решившего шесть-семь задач.

Другой отличительной чертой олимпиады является использование Интернета, позволяющее участвовать в ней студентам из различных уголков земного шара, не покидая своего города. В момент начала олимпиады открывается сайт с условиями задач, а по окончании участники должны выслать свои решения по электронной почте в адрес жюри. Во время проведения олимпиады участники имеют возможность задавать жюри вопросы по условиям задач посредством Интернета. Со многими местами проведения установлена аудио и видеосвязь. Эти же технические средства используются при проведении церемонии закрытия олимпиады.

Первая олимпиада состоялась в 2006 году, и в ней участвовали только израильские студенты. К удивлению организаторов на приглашение принять в ней участие откликнулись не только будущие математики, физики и инженеры, но также студенты других факультетов, в том числе даже те, кто учится на медсестёр. Количество участников от года к году неуклонно росло, и уже на второй год олимпиада стала международной: к участию в ней присоединились университеты России, Украины, Румынии, Болгарии и Германии. В последней олимпиаде приняли участие студенты 35 университетов из 19 стран мира.

Благодаря сотрудничеству с российским Национальным аккредитационным агентством в сфере образования и его руководителем В. Г. Наводновым финальный тур четвёртой олимпиады 17 мая 2009 года был совмещён с финальным туром Всероссийской студенческой интернет-олимпиады по математике. Такое сотрудничество видится нам весьма плодотворным, мы планируем его продолжать и расширять. Надеемся, что в 2010 году к этому объединению присоединится и румынская олимпиада.

Следующий тур Математической интернет-олимпиады состоится 15 апреля 2010 года, а финальный тур сезона будет проходить 20 мая 2010 года.

Ниже мы приводим условия задач, предлагавшихся на прошедшем 17 декабря 2009 года туре. С подробной информацией об олимпиаде, в том числе с решениями задач можно ознакомиться на сайте олимпиады `http://www.ariel.ac.il/cs/projects/dom/itpm/`

Условия задач

1. На одном первобытном базаре шкура мамонта обменивалась на две шкуры саблезубого тигра, а юбка из перьев павлина — на три каменных копья. На другом базаре, расположенном в одном дне пути от первого, шкура мамонта обменивалась на три юбки из павлина, а шкура тигра — на четыре копья. Все обмены можно осуществлять в обе стороны. Охотник принёс на первый базар шкуру мамонта и хочет выменять её на четыре тигровых шкуры. Сможет ли он это сделать за 33 дня?

2. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/\ln(x)}$.

3. Определите, является ли функция
$$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$
чётной или нечётной (или ни чётной, ни нечётной).

4. Вася спускается на парашюте с постоянной скоростью v, а его друг Миша катается на колесе обозрения, которое крутится с постоянной скоростью (точка, из которой прыгнул Вася, находится выше верхней точки колеса обозрения). В момент приземления Васи кабинка, в которой катался Миша, находилась в нижней точке (на уровне земли). Известно, что пока Вася спускался, друзья оказывались на одной и той же высоте ровно 4 раза (считая момент Васиного приземления). Найдите вертикальную составляющую скорости Миши в тот момент, когда они с Васей впервые оказались на одной высоте (мальчиков можно считать точками).

5. Сколько решений имеет уравнение $x^2 = 2^x$?

6. Даны две произвольные ненулевые матрицы A и B второго порядка. Докажите, что для некоторой матрицы C выполняется условие $ACB \neq 0$.

7. Чему равно минимальное значение выражения
$$\sqrt{(x-1960)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-441)^2}\ ?$$

8. Найдите ненулевой многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число
$$\sqrt[5]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[5]{\sqrt{2}-1}.$$

9. На отрезке $[0, 1]$ случайным образом выбираются два числа. Какова вероятность того, что первое число, возведённое в квадрат, больше, чем второе число?

10. Два цилиндра радиуса 1 расположены в пространстве так, что их оси пересекаются под прямым углом. Найдите объём пересечения цилиндров.

11. Профессор сформулировал n утверждений A_1, A_2, $\ldots$, A_n. Он задаёт своим аспирантам темы диссертационных работ: «из A_i следует A_j». Диссертация не должна быть непосредственным логическим следствием диссертаций, заданных ранее. Какое максимальное число аспирантов может быть у профессора?

12. Пусть $f(x, y)$ — бесконечно дифференцируемая функция двух переменных с локальным минимумом в нуле. Других критических точек у неё нет. Верно ли, что этот минимум глобальный? (Точка называется *критической* если в ней обе частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ обращаются в нуль.)

А. Домошницкий, Ариэльский университетский центр, Израиль
В. О. Бугаенко, Ариэльский университетский центр, Израиль
А. Я. Канель-Белов, Московский институт открытого образования