По мотивам задачника «Математического просвещения»

Нетранзитивные рулетки

И. И. Богданов

Представьте себе: вы приходите в казино и видите вместо одной рулетки с последовательными числами — сразу несколько рулеток, и числа на всех разные. Крупье предлагает вам такую игру: вы выбираете одну из рулеток, а затем он выбирает одну из оставшихся; после этого обе рулетки запускаются, и побеждает игрок, на чьей рулетке выпавшее число больше.

Ясно, что крупье не стал бы предлагать такую игру, если бы он оставался в проигрыше. Но может ли оказаться, что он будет выигрывать больше, чем в половине случаев (иначе говоря, может ли вероятность[1]) выигрыша крупье быть больше $\frac{1}{2}$)? Для этого надо, чтобы для каждой рулетки нашлась другая, которая выигрывает у неё чаще, чем проигрывает.

Это невозможно лишь на первый взгляд. На рис. 1 приведены два самых известных примера; второй из них (с заменой рулеток на игральные кубики) известен под названием *кубиков Эфрона* (ещё несколько подобных конфигураций можно найти, например, в статье М. Гарднера [1]). В нём, правда, встречаются одинаковые числа, но это легко исправить, заменив, скажем, шесть троек на шесть чисел, близких к тройке и т. п.

В первом примере каждая рулетка выигрывает у следующей по стрелке в 5 случаях из 9; во втором случае каждая рулетка выигрывает у следующей в 24 случаях из 36 — с вероятностью $\frac{2}{3}$! Наверное, это ещё не предел?

Итак, после нахождения таких примеров встаёт вопрос — а насколько большим может быть выигрыш крупье? Может ли он предложить вам

---

[1]) От читателя требуются лишь самые элементарные представления о вероятности.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 14, 2010(240–255)

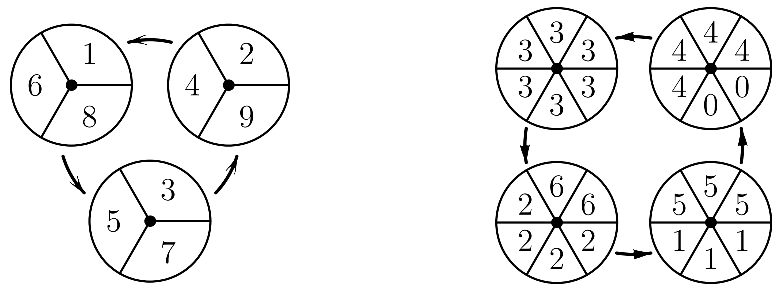

Рис. 1.

ставку $2:1$ (т. е. при выигрыше вы получаете вдвое больше, чем отдаёте при проигрыше) и по-прежнему выигрывать? А $3:1$? Иначе говоря — какой может быть наибольшая вероятность выигрыша крупье (при оптимальном выборе игрока)?[2] А что, если количество рулеток ограничено?[3]

Ответам на эти вопросы и посвящена эта заметка. Главным результатом в ней является решение задачи 10.5 из задачника «Математического просвещения». Напомним её условие.

10.5. *На берегу круглого острова Гдетотам расположено n деревень, в каждой живут борцы. Был проведён турнир, в котором каждый борец встретился со всеми борцами из всех других деревень. Деревня А считается сильнее деревни Б, если хотя бы $(1-\alpha)$-я часть поединков между борцами из этих деревень заканчивается победой борца из деревни А. (У всех борцов разная сила, и в поединке всегда побеждает сильнейший.) Выяснилось, что каждая деревня сильнее следующей за ней по часовой стрелке. Докажите, что $\alpha \geqslant \alpha_0 = \dfrac{1}{4\cos^2\dfrac{\pi}{n+2}}$, причём число α_0 нельзя заменить на меньшее.*

Ясно, что эта задача эквивалентна вопросу о максимальной возможной вероятности выигрыша крупье на n рулетках: достаточно в секторах каждой рулетки записать силы борцов из соответствующей деревни.

Мы предполагаем, что все числа на всех рулетках — разные. Кроме того, мы предполагаем, что все числа на каждой рулетке выпадают равновероятно (впрочем, это не играет особой роли, если не ограничивать количество чисел на рулетках).

[2] Точнее, речь идёт о точной верхней грани этого выигрыша; мы увидим, что она чаще всего не достигается.

[3] Казино платит за площадь арендуемого помещения, и слишком много рулеток строить невыгодно!

Выясним, как должен быть устроен выбор рулетки крупье в ответ на наш выбор. Пусть вероятность выигрыша крупье равна β. Тогда для любой рулетки A, выбранной вами, должна найтись рулетка B, выигрывающая у неё с вероятностью, не меньшей β. Проведём стрелку от B к A. В полученном графе в каждую вершину входит по стрелке, значит, в нём есть ориентированный цикл. Выбросив все рулетки, не входящие в этот цикл, мы получаем набор из не большего числа рулеток, в котором первая рулетка выигрывает у второй (с вероятностью не меньше β), вторая — у третьей, ..., последняя — у первой. Значит, вероятность выигрыша крупье здесь не меньше, чем на исходном наборе (она могла и повыситься!). Назовём такую систему *системой с выигрышем* β, если минимальная среди вероятностей выигрыша рулетки у следующей равна β. Далее мы рассматриваем только такие системы рулеток. (Заметим, что в задаче 10.5 также описана ровно такая система.)

Замечание. Для читателя, знакомого с теорией вероятности, приведём наиболее общую постановку задачи. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — n независимых случайных величин. Рассмотрим величину

$$F(X_1, \ldots, X_n) = \min\{P(X_1 > X_2), P(X_2 > X_3), \ldots, P(X_n > X_1)\}.$$

Каково максимальное возможное значение функции $F(X_1, \ldots, X_n)$, если n может быть любым? А если n фиксировано?

Эта постановка — ненамного более общая. Действительно, любую случайную величину можно приблизить величиной с кусочно постоянной функцией распределения; более того, вероятности всех значений новой случайной величины можно сделать рациональными — а после этого и равными, заменив каждое значение на несколько очень близких друг к другу. Полученную случайную величину можно сопоставить рулетке. Таким образом, общая постановка сводится к нашему случаю, и ответы в обеих задачах совпадают.

Этот общий вопрос исследовался Трыбулой [2] и Усыскиным [3]; в нашу статью включены эти результаты.

1. Глобальная оценка

Может показаться, что раз уж возможен выигрыш с вероятностью, большей $\frac{1}{2}$, то, наверное, можно выигрывать и с вероятностью, сколь угодно близкой к единице. Это не так! В этом разделе мы найдём точную верхнюю грань возможных выигрышей крупье.

Теорема 1. *Среди любых рулеток найдётся одна, которая выигрывает у любой из оставшихся с вероятностью, большей* $\frac{1}{4}$; *при этом число* $\frac{1}{4}$

нельзя заменить на меньшее. Иначе говоря, вероятность выигрыша крупье всегда меньше $\frac{3}{4}$ (*и он не будет предлагать ставку* $3:1$), *но может быть сколь угодно близка к этому числу.*

Доказательство. Пусть на i-й рулетке стоят k_i чисел: $a_{i,1} < a_{i,2} < \dots < a_{i,k_i}$. Пусть b_i — *медиана* этого набора, то есть $b_i = a_{i,m_i}$, где $m_i = \left[\frac{k_i+1}{2}\right]$ (иначе говоря, b_i — число, стоящее в середине нашего списка; в случае чётного количества чисел мы выбрали меньшее из них). Выберем наибольшее из чисел b_i; не ограничивая общности, можно считать, что это b_1. Тогда первая рулетка — искомая. Действительно, $b_i < b_1$ для любого $i > 1$; это значит, что каждое из чисел $a_{i,1}, \dots, a_{i,m_i} = b_i$ меньше каждого из чисел $b_1 = a_{1,m_1}, a_{1,m_1+1}, \dots, a_{1,k_1}$. Таким образом, первая рулетка выигрывает у i-й не менее, чем в $m_i(k_1 - m_1 + 1)$ случаях из k_ik_1, то есть вероятность её выигрыша не меньше

$$\frac{m_i(k_1 - m_1 + 1)}{k_ik_1} = \frac{m_i}{k_i}\left(1 - \frac{m_i - 1}{k_i}\right) > \frac{1}{4},$$

так как $\frac{1}{2}k_s + 1 > m_s \geqslant \frac{1}{2}k_s$ при любом s.

Осталось привести пример, показывающий, что число $\frac{1}{4}$ нельзя заменить на большее. Выберем большое число n и рассмотрим клетчатый квадрат $(2n+1) \times (2n+1)$. Разделим его на два клетчатых треугольника: T_1, состоящий из всех клеток не выше диагонали, соединяющей левый нижний и правый верхний углы квадрата, и T_2 — из всех остальных клеток. Заполним T_1 числами от $(2n+1)^2$ до $n(2n+1)+1$ сверху вниз по убыванию: в первую строку поставим самое большое число $(2n+1)^2$, в следующую — два следующих, т. е. $(2n+1)^2 - 1$ и $(2n+1)^2 - 2$, и т. д. Аналогично заполним треугольник T_2 числами от $n(2n+1)$ до 1. На рис. 2 показан такой квадрат для $n = 2$.

Напишем теперь на i-й рулетке числа, стоящие в i-й строке квадрата. Тогда последняя рулетка будет выигрывать у первой с вероятностью

7	8	9	10	25
4	5	6	23	24
2	3	20	21	22
1	16	17	18	19
11	12	13	14	15

Рис. 2.

$1 - \dfrac{1}{2n+1} > \dfrac{3}{4}$ (при $n \geqslant 2$). Для любого же $i = 1, \ldots, n-1$, i-я рулетка будет проигрывать $(i+1)$-й в $(i+1)(2n+1-i)$ случаях из $(2n+1)^2$, то есть вероятность такого проигрыша будет равна

$$\frac{(i+1)(2n+1-i)}{(2n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-(n-i)^2}{(2n+1)^2} \leqslant \frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}\,.$$

При $n \to \infty$ последняя оценка стремится к $\dfrac{1}{4}$. Итак, любая рулетка выигрывает у следующей по циклу с вероятностью, не меньшей $1 - \dfrac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}$ (что близко к $\dfrac{3}{4}$), что и требовалось. □

Мы видим, что для построения примера, близкого к оптимуму, пришлось взять большое количество рулеток с большим количеством чисел на каждой. Далее мы выясним, что будет, если ограничить количество рулеток или чисел на каждой.

Точный ответ при ограниченном количестве чисел получается лёгкой модификацией предыдущего рассуждения.

Теорема 2. *Пусть на каждой из рулеток не больше, чем $n \geqslant 3$ чисел. Тогда найдётся рулетка, которая выигрывает у любой из оставшихся с вероятностью, не меньшей $f(n)$, где $f(2s) = f(2s-1) = 1 - \dfrac{s}{2(2s-1)}$. При этом число $f(n)$ нельзя заменить на меньшее.*

Доказательство. Оценка аналогична оценке в предыдущей теореме; надо лишь поточнее оценить величину $1 - \dfrac{m_i-1}{k_i}$. Если k_i чётно, то $1 - \dfrac{m_i-1}{k_i} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{k_i}$, а если оно нечётно, то $1 - \dfrac{m_i-1}{k_i} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2k_i}$. Тогда нетрудно понять, что минимум выражения $1 - \dfrac{m_i-1}{k_i}$ при $k_i = 1, 2, \ldots, n$ достигается тогда, когда k_i — наибольшее нечётное число, не превосходящее n (пусть оно равно $2s-1$). Значит,

$$\frac{m_i(k_1-m_1+1)}{k_ik_1} = \frac{m_i}{k_i}\left(1 - \frac{m_i-1}{k_i}\right) \geqslant \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2s-1)}\right) = \frac{s}{2(2s-1)}\,,$$

что и требовалось.

Пример также получается нехитрым изменением предыдущего; надо только учесть, что для достижения точности в предыдущей оценке необходимо, чтобы длины строчек имели соответствующие чётности. На рис. 3 показан пример для $n = 5$ (он же, естественно, годится для $n = 6$); из него ясен общий принцип построения. □

Замечание. В последнем наборе рулеток не все строчки нужны: например, на рис. 3 первую и последнюю строки можно без особого ущерба

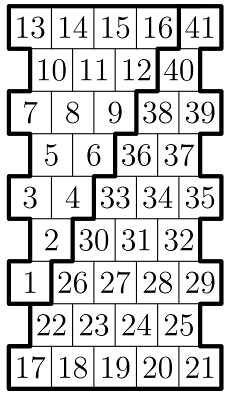

Рис. 3.

выкинуть. Значит, в этом случае количество рулеток можно уменьшить (а при больших значениях n это количество можно даже сделать меньшим n).

Вопрос о том, какого выигрыша можно добиться, если фиксировать только количество рулеток, гораздо более интересен. Его разбору посвящён остаток статьи. Для его исследования мы сначала выделим некоторый класс оптимальных конфигураций.

2. Улучшение рулеток

Зафиксируем количество чисел на каждой рулетке и попытаемся найти вид, в котором следует искать оптимальную конфигурацию чисел.

Мы начнём с того, что опишем расположение чисел на рулетках на другом языке. Рассмотрим систему из $n \geqslant 3$ рулеток с выигрышем α. Запишем числа на рулетках в таблицу, числа на i-й рулетке — в i-ю строку по возрастанию (будем считать, что таблица склеена в цилиндр: её низ склеен с верхом, т. е. следующая строка за последней — первая). Построим ориентированный граф: соединим число a из i-й строки стрелкой с числом b из $(i+1)$-й строки, если $a > b$. Тогда вероятность того, что i-я строка выигрывает у $(i+1)$-й, равно количеству стрелок между этими строками, делённому на произведение количеств чисел в этих строках.

Таким образом, по графу можно восстановить все интересующие нас вероятности. Поэтому, если мы выясним, какие графы могут соответствовать расположению чисел на рулетках, то можно забыть про числа в вершинах графа и рассматривать только соответствующие графы (заменив числа в строках на точки).

Для (возможно, совпадающих) вершин a, b будем писать $a \preceq b$, если они стоят в одной строчке, причём a не правее b. Заметим, что рассматриваемые графы обладают дополнительным свойством: поскольку в каждой строке числа идут по возрастанию, то вместе с любой стрелкой $a \to b$ в графе должны присутствовать все стрелки вида $c \to d$, где $a \preceq c$ и $d \preceq b$. Такие графы мы будем называть *монотонными*.

Известно, что вершины ориентированного графа можно занумеровать так, чтобы любая стрелка шла от бо́льшего числа к меньшему, тогда и только тогда, когда в этом графе нет ориентированных циклов. Докажем версию этого утверждения для монотонных графов.

Лемма 3. *Вершины монотонного графа G можно занумеровать так, чтобы любая стрелка шла от бо́льшего числа к меньшему* (*и числа в каждой строке шли по возрастанию*), *тогда и только тогда*, *когда в G нет ориентированных циклов.*

Доказательство. Необходимость отсутствия ориентированных циклов очевидна. Достаточность легко доказать индукцией по количеству вершин. Действительно, если в графе нет ориентированных циклов, то найдётся вершина, в которую не входит стрелок. Из монотонности, в самую правую вершину этой же строки также не входит стрелок. Тогда можно выбросить эту самую правую вершину, занумеровать вершины оставшегося графа (это возможно по предположению индукции), а затем присвоить выкинутой вершине номер, превосходящий номера всех остальных вершин. Ясно, что при этом все условия будут выполнены. $\square$

Замечание 1. Вообще говоря, если по перенумерации заново построить граф, то в нём могут появиться стрелки, которых не было в исходном; однако это только увеличит вероятности выигрыша.

Замечание 2. В монотонном графе отсутствие ориентированных циклов можно переформулировать так: в любом пути длины n («витке») с началом a и концом b, выполняется $b \prec a$.

Рассмотрим теперь произвольный монотонный граф без ориентированных циклов и попытаемся его «улучшить»: добавим в него несколько рёбер так, чтобы он продолжал удовлетворять условиям монотонности и отсутствия циклов (вероятности выигрыша при этом не уменьшатся). Естественно, это улучшение должно выглядеть так: если вершина a соединена со всеми вершинами следующей строки вплоть до b, то попытаемся соединить её со следующей вершиной после b; если при этом не появилось ориентированных циклов, то получился монотонный граф «не хуже», чем до того. После нескольких улучшений мы получим граф, в котором такие добавления невозможны; назовём такой граф *связкой*. Наша ближайшая цель — выяснить вид связки.

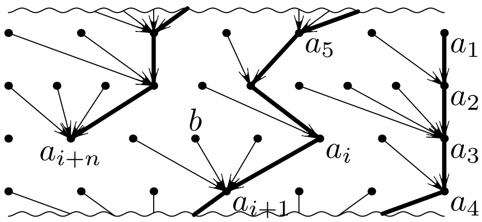

Рис. 4.

Для каждой вершины a обозначим через $\psi(a)$ самую правую вершину, в которую из a ведёт стрелка (если таких стрелок нет, то положим $\psi(a) = \varnothing$).

В связке найдётся вершина, в которую не ведёт ни одной стрелки; более того, можно считать, что она — самая правая вершина в своей строке. Выберем такую вершину a_1 (пусть для определённости она лежит в первой строке). Далее положим $a_2 = \psi(a_1)$, $a_3 = \psi(a_2)$, $\ldots$ — до тех пор, пока для некоторого a_k не получится $\psi(a_k) = \varnothing$. Полученный путь $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_k$ назовём *нитью*.

Примерный вид связки показан на рис. 4; из каждой вершины a проведена стрелка лишь в $\psi(a)$, нить выделена жирными линиями.

Рассмотрим любую вершину b такую, что $a_{i+n} \prec b \preceq a_i$ (напомним, что n — количество строк, так что a_{i+n} и a_i лежат в одной строке); найдём $\psi(b)$ (см. рис. 4). С одной стороны, $\psi(b) \preceq \psi(a_i) = a_{i+1}$ из-за монотонности графа. С другой стороны, любой путь из $n-1$ ребра, начинающийся в $t \preceq a_{i+1}$, идёт не правее соответствующего участка нити $a_{i+1} \to \cdots \to a_{i+n}$; значит, если мы добавим ребра $b \to t$ при всех $t \preceq a_{i+1}$, то в графе не появится циклов. А тогда эти ребра уже есть в связке, и $\psi(b) = a_{i+1}$.

Аналогично, если вершина a_i — самая левая вершина нити в своей строке и $b \preceq a_i$, то $\psi(b) = \psi(a_i)$. Если же a_i — самая правая вершина нити в своей строке и $b \succ a_i$, то $\psi(b)$ — самая правая вершина в следующей строке.

Заметим теперь, что последний случай невозможен. Предположив противное, найдём наибольшее $i \in [2, n]$ такое, что существует $b \succ a_i$. Если $i = n$, то по доказанному в связке есть стрелка $b \to a_1$, что невозможно по выбору a_1. Если же $i < n$, то $\psi(b) = a_{i+1}$ — самый правый элемент в своей строке (из максимальности i). Тогда можно добавить в граф все стрелки $a_{i-1} \to t$ при $a_i \prec t \preceq b$: при этом цикла, содержащего новые рёбра, не появится, ибо путь, начинающийся с a_{i-1}, все равно пойдёт не правее нити, начиная с $(i+1)$-й строки. Поскольку в связку добавлять рёбра нельзя, мы получили противоречие.

Итого, мы доказали следующую лемму.

Лемма 4. *Если существует набор рулеток, выигрывающих по циклу с вероятностью α, то существует и связка с не меньшим выигрышем. При этом в любой связке «первый виток» нити (то есть вершины $a_1, \ldots, a_n$) состоит из самых правых вершин в строках. Далее, для произвольной вершины b, если i — максимальный индекс такой, что $b \preceq a_i$, то $\psi(b) = \psi(a_i)$; в частности, нить полностью задаёт всю связку.*

Теперь мы готовы к следующей переформулировке. Нарисуем вместо строки из t точек отрезок длины 1, разбитый на t равных частей. Если нить идёт из точки a в точку b, то соединим *правые* концы соответствующих отрезков. Полученную ломаную также назовём нитью; координаты (абсциссы) точек новой нити обозначим через b_i. Соединим также правый конец отрезка, соответствующего последней точке нити a_k, с началом следующего отрезка, и для симметрии продлим нить по всем остальным левым концам (см. рис. 5).

Пусть теперь на i-м отрезке отмечены точки с координатами $x_0 = 0$, x_1, …, $x_s = 1$, из которых нить переходит в точки $(i+1)$-го отрезка с координатами $y_0 = 0$, y_1, …, y_s (может оказаться, что $y_1 = 0$ или $y_s < 1$!). Тогда ясно, что вероятность выигрыша i-й строки у $(i+1)$-й равна

$$P_i = \sum_{i=1}^{s} (x_i - x_{i-1}) y_i = \sum_{i=0}^{s-1} (1 - x_i)(y_{i+1} - y_i). \tag{1}$$

(В первой сумма посчитаны вероятности выигрыша для отрезков $[x_{i-1}, x_i]$; во второй же — вероятности проигрыша для отрезков $[y_i, y_{i+1}]$.)

До этого момента мы предполагали, что количество чисел на рулетке фиксировано. Если убрать это требование, то можно выбирать на отрезках точки с произвольными рациональными координатами; а поскольку мы ищем точную верхнюю грань выигрыша, то можно убрать и требование рациональности: для любого примера с иррациональными координатами

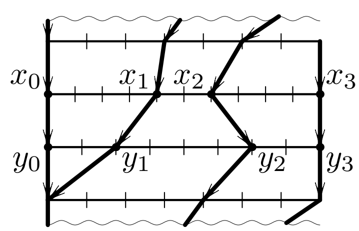

Рис. 5.

найдётся пример с рациональными, вероятности выигрыша в котором будут сколь угодно близки к изначальным.

Замечание. Полученную в результате систему из n отрезков можно рассматривать как n рулеток с неравными секторами. Собственно, все предыдущие рассуждения также проходят для таких рулеток: достаточно каждой стрелке в нашем графе приписать вес, равный произведению площадей соответствующих секторов.

3. Оптимизация нити

Разберёмся теперь, в каких случаях мы можем оптимизировать нить. Будем говорить, что одна нить не хуже другой, если минимальная вероятность выигрыша (т. е. $\min\{P_1, \ldots, P_n\}$) для первой нити не меньше, чем для второй.

Лемма 5. *Для каждой нити существует нить, не худшая исходной, в которой на каждом отрезке есть не более одной точки, отличной от концов.*

Доказательство. Пусть на i-м отрезке найдутся две соседние точки нити, отличные от концов: b_s и b_{s+n}. Попробуем изменить эти числа. В выражения (1) для вероятностей P_i и P_{i-1}, соответствующих этому отрезку, наши числа входят линейно: $P_i = c_1 b_s + c_2 b_{s+n} + \text{const}$, $P_{i-1} = d_1 b_s + d_2 b_{s+n} + \text{const}$ для некоторых чисел c_i, d_i. Заменим теперь b_s и b_{s+n} на $b'_s = b_s + c_2\varepsilon$, $b'_{s+n} = b_{s+n} - c_1\varepsilon$; тогда P_i не изменится, а к P_{i-1} прибавится $(d_1c_2 - d_2c_1)\varepsilon$. Теперь, выбрав ε соответствующего знака, можно, не изменив значения P_i, заменить значение P_{i-1} на не меньшее.

Ясно, что ε нужно выбирать достаточно малым по модулю, чтобы не нарушить упорядоченность точек нити на отрезке. Граничным случаем при этом будет совпадение двух точек нити. Выбрав соответствующее значение ε, мы получим нить, которая в некоторый момент делает полный виток и приходит в точку, из которой этот виток начался (см. рис. 6). Выбросим все точки этого витка (кроме начальной). Нетрудно видеть, что мы не ухудшим её (поскольку каждый отрезок будет «выигрывать» у всех, у которых он выигрывал до того, и, может быть, ещё у каких-то), но при этом уменьшим количество точек нити. (Может оказаться, что новая нить проходит не по всем концам или началам отрезков; в таком случае эти концы и начала нужно добавить в конец или начало нити, соответственно.)

Итак, после нескольких таких преобразований мы получим нить, в которой на каждом отрезке не более одной точки, отличной от концов, что и требовалось. $\square$

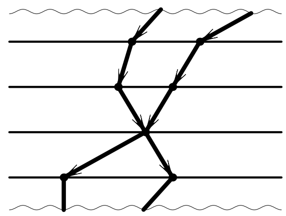

Рис. 6.

Таким образом, нам достаточно рассматривать только нити, в которых принадлежать интервалу $(0,1)$ могут лишь точки $b_{n+1},\dots,b_{2n}$. Для краткости обозначим $r_i = b_{i+n}$. Тогда вероятность того, что i-я рулетка *проигрывает* $(i+1)$-й, равна

$$Q_i = r_i(1-r_{i+1}) \quad \text{при } i=1,\dots,n-1, \qquad Q_n = 1-(1-r_n)r_1, \qquad (2)$$

а *проигрыш* системы рулеток равен $Q(r_1,\dots,r_n) = \max\{Q_1,\dots,Q_n\}$. Функция $Q(\cdot)$ непрерывна, поэтому на компакте $(r_1,\dots,r_n) \in [0,1]^n$ она достигает минимального значения. Обозначим временно через $(r_1,\dots,r_n)$ произвольную точку её минимума, а через q — значение этого минимума.

Лемма 6. *В точке $(r_1,\dots,r_n)$ имеем $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = q$.*

Доказательство. Можно считать, что $r_1 < 1$. Действительно, если $r_1 = 1 = b_{n+1} = b_1$, то можно удалить первый виток нити. Повторяя эту процедуру, в конце концов мы добьёмся того, что $r_1 < 1$.

Предположим, что утверждение леммы неверно; тогда найдётся такое i, что $Q_i = q$, $Q_{i+1} < q$ (мы считаем, что $Q_{n+1} = Q_1$). Пусть $i < n$. Ясно, что $1 > q = Q_i = r_i(1-r_{i+1})$, поэтому $r_i > 0$ и $r_{i+1} < 1$. Заметим, что функции $Q_i = r_i - r_ir_{i+1}$ и Q_{i+1} линейно зависят от r_{i+1}, причём коэффициент при r_{i+1} у первой функции отрицателен. Заменим теперь r_{i+1} на $r'_{i+1} = r_{i+1} + \varepsilon$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Тогда значение Q_i уменьшится, а Q_{i+1} останется меньшим q (для этого ε и должно быть достаточно мало). Таким образом, в этом случае мы уменьшили количество Q_i, равных q.

В случае $i = n$ проходят подобные рассуждения: во-первых, из $1 > q = Q_n = 1-(1-r_n)r_1$ следует, что $r_1 > 0$, $r_n < 1$; кроме того, мы помним, что $r_1 < 1$. Далее, функция $Q_n = 1 - r_1(1-r_n)$ по-прежнему линейна по r_1 с отрицательным коэффициентом при r_1; значит, опять же можно увеличить значение r_1, уменьшая тем самым Q_n.

Итого, в любом случае можно уменьшить количество индексов i таких, что $Q_i = q$ (оставив все остальные вероятности меньшими q). Через несколько таких шагов получим набор значений, для которых все $Q_i < q$. Это противоречит минимальности q. $\square$

Итого, нам достаточно уже рассматривать нити, в которых все $Q_i = q$. Назовём такую нить *оптимальной*. Мы предполагаем, что в оптимальной нити $r_1 < 1$.

4. Последняя оптимизация

Опишем структуру оптимальной нити в других терминах. Заметим, что равенство $Q_i = q$ при $i < n$ равносильно равенству $r_i = f(r_{i+1})$, где $f(x) = \dfrac{q}{1-x}$. Обозначим $f_0(x) = x$, $f_i(x) = f(f_{i-1}(x)) = f_{i-1}(f(x)) = \underbrace{f(f(\ldots(f(}_{i\text{ раз}}r)\ldots))$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда в оптимальной нити мы имеем $r_{n-i} = f(r_{n-i+1}) = \cdots = f_i(r_n)$. В частности, $r_1 = f_{n-1}(r_n)$.

Далее, ясно, что функция $f_1(x)$ монотонно возрастает на $[0, 1)$, $f_1(0) \leqslant r_{n-1} < 1$, и $f_1(1-0) = +\infty$. Тогда существует $R_1 \in [0, 1)$ такое, что $f_1(R_1) = 1$. Теперь функция $f_2(x) = f(f_1(x))$ монотонно возрастает на $[0, R_1)$, $f_2(0) \leqslant r_2 < 1$, и $f(R_1 - 0) = +\infty$. Тогда существует $R_2 \in [0, R_1)$ такое, что $f_2(R_2) = 1$. Продолжая так дальше, мы получим, что $f_{n-1}(x)$ монотонно возрастает на $[0, R_{n-2})$, $f_{n-1}(0) \leqslant r_1 < 1$, $f_{n-1}(R_{n-2} - 0) = +\infty$, и существует такая точка $R_{n-1} \in [0, R_{n-2})$, что $f_{n-1}(R_{n-1}) = 1$. При этом, поскольку $r_i = f_{n-i}(r_n) \in [0, 1]$ при $i = 1, \ldots, n$, мы получаем, что $r_n \in [0, R_{n-1}] \subset [0, R_{n-2}) \subset \cdots \subset [0, R_1)$. Для краткости обозначим $R = R_{n-1}$.

Лемма 7. *Рассмотрим функцию $g(x) = f_{n-1}(x)(1-x)$ на отрезке $[0, R]$. Тогда $1 - q = g(r_n) = \max_{x\in[0,R]} g(x)$.*

Доказательство. Для произвольного $x \in [0, R]$ рассмотрим последовательность $r'_n = x$, $r'_{n-i} = f_i(x)$. Они определяют некоторую систему рулеток, в которой вероятности проигрыша $Q'_i = q$ при всех $i = 1, \ldots, n-1$. Из леммы 6 следует, что в этой рулетке $Q'_n \geqslant q$ (иначе значение q неоптимально). Однако $Q'_n = 1-(1-r'_n)r'_1 = 1-g(x)$. Значит, $g(x) \leqslant g(r_n)$; кроме того, при $x = r_n$ мы имеем $q = Q_n = 1 - g(r_n)$, откуда $g(r_n) = 1 - q$, что и требовалось доказать. $\square$

Заметим, что если мы «отразим» наш рисунок симметрично относительно центра (это преобразование задаётся формулой $r'_i = 1 - r_{n+1-i}$), то вероятности выигрыша не изменятся. Это легко доказать, подставив значения r'_i в формулы (2) (или просто внимательно посмотрев на рис. 5).

Итак, мы исследуем функцию $g(x)$ на максимум. Из соображений симметрии следует, что $g(1 - f_{n-1}(x)) = g(x)$. В частности, $g(R) = g(0)$.

Лемма 8. *$g(0) = g(R) > g(x)$ при всех $x \in (0, R)$.*

Доказательство. Найдём производную $g'(x)$. Имеем

$$f'(x) = \frac{q}{(1-x)^2} = \frac{f(x)^2}{q},$$

поэтому

$$f_i'(x) = [f(f_{i-1}(x))]' = \frac{f_i(x)^2}{q} f_{i-1}'(x),$$

откуда по индукции получаем

$$f_i'(x) = \frac{f_i(x)^2 f_{i-1}(x)^2 \cdot \ldots \cdot f_1(x)^2}{q^i}.$$

Тогда

$$g'(x) = (1-x) f_{n-1}'(x) - f_{n-1}(x) = \\ = f_{n-1}(x) \cdot \left(\frac{f_{n-1}(x) f_{n-2}(x)^2 f_{n-3}(x)^2 \cdot \ldots \cdot f_1(x)^2}{q^{n-1}} - 1 \right).$$

Множитель $f_{n-1}(x)$ положителен, а выражение в скобках — возрастающая функция $h(x)$ на отрезке $[0, R]$. Если бы она была знакопостоянной, то и $g'(x)$ была бы знакопостоянной; это неверно, так как $g(0) = g(R)$. Значит, $h(x)$ имеет ровно один корень x_0, и $g'(x) < 0$ при $x \in (0, x_0)$, $g'(x) > 0$ при $x \in (x_0, R)$. Это и означает, что $g(0) = g(R) > g(x)$ при всех $x \in (0, R)$. $\square$

Итого, мы получили следующее описание оптимальной нити.

Следствие 9. *В оптимальной нити $r_n = 0$, $r_{n-i} = f_i(0)$, причём $r_1 = f_{n-1}(0) = 1 - q$.*

Доказательство. Равенства $r_n = 0$, $r_{n-i} = f_i(0)$ следуют из лемм 7 и 8. Последнее равенство следует из того, что $Q_n = 1 - (1 - r_n) r_1 = 1 - r_1 = q$. $\square$

Итого, наша задача свелась к следующей.

Задача. *По числу $q \in (0, 1)$ построим последовательность $r_i = f_{n-i}(0)$, $i = 1, \ldots, n$. Найти минимальное q, при котором $r_i \in [0, 1]$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $r_1 = 1 - q$.*

Замечание 3. Заметим, что при возрастании q значения $f(x)$ также возрастают. Значит, условие $r_i \in (0, 1)$ можно опустить: при минимальном q это условие автоматически выполнится.

Замечание 4. В работе Трыбулы [2] доказано несколько большее. Пусть

$$\Xi = \Big\{\big(P(X_1 > X_2), \ldots, P(X_n > X_1)\big) \in [0,1]^n : \\ X_i \text{ — независимые случайные величины с } P(X_i = X_j) = 0 \text{ при } i \neq j\Big\}.$$

Тогда множество Ξ является выпуклой оболочкой аналогичного множества, построенного только для наборов случайных величин, соответствующих оптимальным нитям, их циклических сдвигов, и их же — выстроенных в обратном порядке (то есть «последовательностей с максимальным проигрышем»). Читатель может попытаться самостоятельно доказать это утверждение.

5. Вычисление q

Для получения ответа нам потребуются некоторые сведения о дробно-линейных функциях, то есть о функциях вида $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$ — чтобы функция не оказалась константой). Мы будем считать, что наша функция f действует на множестве $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$; тогда она задаёт биекцию на множестве $\overline{\mathbb{R}}$.

Заметим, что композиция дробно-линейных функций также дробно-линейна. Более того, если дробно-линейной функции сопоставить матрицу 2×2 по правилу

$$\frac{ax+b}{cx+d} \mapsto M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

то композиции $f \circ g(x) = f(g(x))$ соответствует матрица $M_{f \circ g} = M_f M_g$. Здесь мы, правда, допускаем некоторую небрежность, ибо функции $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ и $f(x) = \dfrac{\mu ax + \mu b}{\mu cx + \mu d}$ совпадают. Значит, функции $f(x)$ сопоставлена не одна матрица M_f, а все матрицы вида μM_f, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Это не приведёт к недоразумениям.

Замечание. Это сопоставление означает, что группа всех дробно-линейных функций относительно композиции изоморфна группе $PGL_2(\mathbb{R}) = GL_2(\mathbb{R})/\{\mu E : \mu \in \mathbb{R}\}$.

Рассмотрим некоторое q, при котором выполняются условия нашей задачи. Для облегчения записи положим $s_i = r_{n-i}$; тогда $s_0 = 0$, $s_{i+1} = f(s_i)$, $s_{n-1} = 1 - q$.

Поскольку мы считаем, что f действует на $\overline{\mathbb{R}}$, мы можем продолжить последовательность (s_i): $s_n = f(s_{n-1}) = 1$, $s_{n+1} = f(s_n) = \infty$, $s_{n+2} = f(s_{n+1}) = 0$. Мы получили, что $f_{n+2}(0) = 0$, и, аналогично, $f_{n+2}(s_i) = s_i$!

Значит, у дробно-линейной функции f_{n+2} есть $n+2$ неподвижных точки: $s_0, \ldots, s_{n+1}$. Однако у нетождественной дробно-линейной функции не может быть более двух неподвижных точек: они должны быть корнями (не более чем квадратного) уравнения $ax+b = x(cx+d)$. Значит, $f_{n+2}(x) \equiv x$, и, следовательно, её матрица $(M_f)^{n+2}$ является скалярной: $(M_f)^{n+2} = \mu E$.

Это значит, в свою очередь, что M_f диагонализуема, и ее собственные значения пропорциональны корням $2(n+2)$-й степени из единицы (множитель 2 появился из-за того, что коэффициент μ может оказаться отрицательным), то есть $\lambda_{1,2} = c\exp\left(\pm\dfrac{\pi k i}{n+2}\right)$ для некоторого $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Однако $M_f = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, и её характеристический многочлен есть $P(x) = x^2 - x + q$. По теореме Виета, $1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 2c\cos\dfrac{\pi k}{n+2}$ (откуда $c = \left(2\cos\dfrac{\pi k}{n+2}\right)^{-1}$) и

$$q = \lambda_1\lambda_2 = c^2 = \left(2\cos\frac{\pi k}{n+2}\right)^{-2}, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

(ясно, что можно ограничиться значениями $k = 0, 1, \ldots, n+1$).

Наоборот, если q имеет вид (3) при $k = 1, 2, \ldots, n+1$, то собственные значения матрицы M_f различны, она диагонализуема, и тогда $M_f^{n+2} = (-1)^k c^{n+2} E$, $f_{n+2}(x) \equiv x$, откуда $s_{n+2} = s_0$, $s_{n+1} = \infty$, $s_n = 1$, $s_{n-1} = 1 - q$. (Если $k = 0$, то матрица $M_f = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ не является диагонализуемой, и поэтому $(M_f)^{n+2}$ нескалярна). Значит, q удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию (3) при $k = 1, \ldots, n+1$. Минимальное значение q получится, естественно, при $k = 1$, и оно будет равно $q = \dfrac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{n+2}}$.

Итого, мы доказали следующую теорему (и тем самым решили задачу 10.5).

Теорема 10. *В любой системе из n рулеток с проигрышем q имеем $q \geqslant \dfrac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{n+2}}$, причём это значение нельзя заменить на меньшее.*

Замечание. Известно, что число $\cos^2\dfrac{\pi}{n+2} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \cos\dfrac{2\pi}{n+2}\right)$ рационально лишь при $n = 1, 2, 4$. Поэтому набор рулеток (с равными секторами), на которых *достигается* проигрыш q, возможен лишь при $n = 4$ (ибо рулеток не менее трёх). Он действительно достигается, как показывает правый пример на рис. 1; здесь $q = \dfrac{1}{4\cos^2\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{3}$. Если же допустить рулетки с произвольными длинами секторов, то это значение достигается

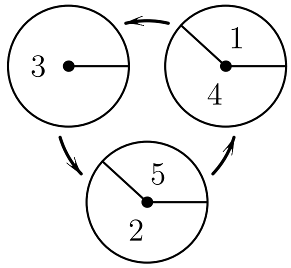

Рис. 7.

всегда: достаточно построить соответствующую нить, а по ней построить рулетки. На рис. 7 изображены оптимальные рулетки для $n = 3$ (бóльшие секторы на разделённых рулетках составляют $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$-ю часть рулетки).

В заключение хочется заметить, что вопрос, какого максимального выигрыша можно добиться на n рулетках с k числами на каждой, ещё далёк от решения. В 1994 г. Р. Сэвидж [4] нашёл точные значения при $n = 3$.

Список литературы

[1] М. Гарднер. *Нетранзитивные парадоксы*. В кн. «Путешествие во времени». М.: Мир, 1990.

[2] S. Trybula. *On the paradox of n random variables* // Zastos. Mat. (Appl. Math.) Vol. 8, 1965. P. 143–154.

[3] Z. Usiskin. *Max–min probabilities in the voting paradox* // Ann. Math. Statist. Vol. 35, 1964. P. 857–862.

[4] R. Savage. *The Paradox of Nontransitive Dice* // The American Mathematical Monthly. Vol. 101, no. 5, 1994. P. 429–436.

И. И. Богданов, кафедра высшей математики Московского физико-технического института, Институтский пер. 9, Долгопрудный, Московская область, Россия 141700.
Email: ilya.i.bogdanov@gmail.com