О некоторых парах перспективных треугольников

Н. И. Белухов

Посвящается Цветине

В «Математическом просвещении» вып. 12, 2008 г. была опубликована следующая красивая задача под номером 12.8:

Задача 1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, противоположно ориентированы и имеют общий ортоцентр. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. (*А. Акопян*)

Авторское решение использовало проективные методы и свойства равносторонних гипербол. В данной статье мы рассмотрим задачу с другой точки зрения. Мы приведём её элементарное решение и обсудим, как оно может быть найдено. Затем мы выведем обобщение утверждения задачи 1, называемое «теорема о двух треугольниках», и исследуем его связь с другими задачами. Наконец мы сформулируем несколько близких теорем и приведём их элементарные доказательства (известные автору). Все доказываемые утверждения сформулированы в виде задач, которые читатель может пытаться решать самостоятельно.

1. Решение задачи 1

Пусть H — общий ортоцентр треугольников, и серединные перпендикуляры к отрезкам AA_1 и BB_1 пересекаются в точке P_c. Покажем, что $\angle AP_cA_1 = 180^\circ - 2\alpha$ и $\angle BP_cB_1 = 180^\circ - 2\beta$ (через α, β и γ обозначены углы $\triangle ABC$).

Действительно, пусть точка P_c' на серединном перпендикуляре к AA_1 такова, что $\angle AP_c'A_1 = 180^\circ - 2\alpha$. Пусть также Q — такая точка на серединном перпендикуляре, что $\angle AQA_1 = 2\gamma$. Тогда $\triangle A_1QP_c' \sim \triangle A_1HB_1$ (см. рис. 1), а значит, $\triangle A_1B_1P_c' \sim \triangle A_1HQ$ и $P_c'B_1 : QH = A_1B_1 : A_1H$. Аналогично $P_c'B : QH = AB : AH$. Поскольку $\triangle AHB \sim \triangle A_1HB_1$, отсюда следует, что $P_c'B = P_c'B_1$, т. е. $P_c' \equiv P_c$.

Перевод А. А. Заславского.

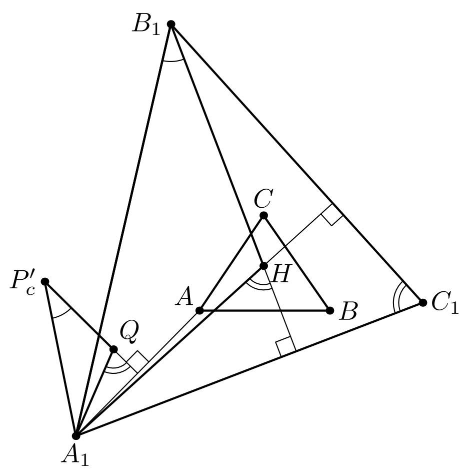

Рис. 1.

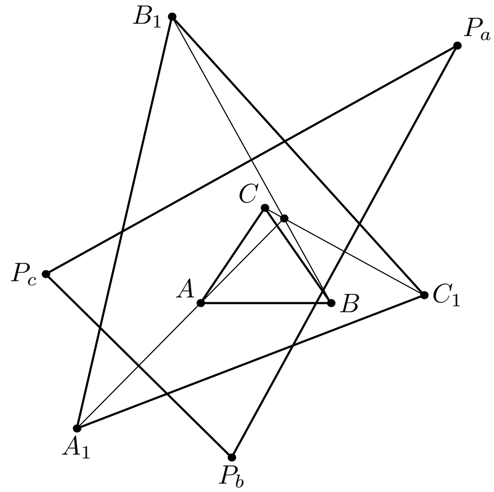

Рис. 2.

Аналогично $\angle BP_cB_1 = 180^\circ - 2\beta$.

Теперь аналогично определим точки P_a и P_b. Как показано выше, $\angle AP_cA_1 = 180^\circ - 2\alpha = \angle AP_bA_1$, значит P_bP_c — серединный перпендикуляр к AA_1, следовательно, четырёхугольник $AP_bA_1P_c$ — ромб. Таким образом, AA_1 — серединный перпендикуляр к P_bP_c. Аналогично BB_1 и CC_1 — серединные перпендикуляры к P_aP_c и P_aP_b (рис. 2), т. е. все три прямые проходят через центр описанной окружности треугольника $P_aP_bP_c$.

2. Теорема Наполеона

Чтобы объяснить, как можно найти это решение, вспомним известную теорему.

Теорема Наполеона. Пусть ABC — произвольный треугольник, и равнобедренные треугольники $\triangle ABT_c \sim \triangle BCT_a \sim \triangle CAT_b$ с углами при вершинах, равными 120°, построены на его сторонах как на основаниях во внешнюю сторону. Тогда треугольник $T_aT_bT_c$ правильный.

Утверждение теоремы остаётся верным для треугольников, построенных во внутреннюю сторону. Соответствующий правильный треугольник обозначим, как $\triangle S_aS_bS_c$.

Заметим, что из этой конфигурации можно извлечь ряд фактов, касающихся только треугольников $T_aT_bT_c$ и $S_aS_bS_c$. Наиболее важный из этих фактов состоит в том, что прямые T_aS_a, T_bS_b и T_cS_c пересекаются в одной точке (центре описанной окружности $\triangle ABC$)!

Формулируя подобные факты, мы можем исключить $\triangle ABC$ и говорить только о двух правильных треугольниках, подразумевая, разумеется, что существует $\triangle ABC$, для которого они являются треугольниками Наполеона. Читатель, знакомый с теоремой, может вывести необходимое условие для этого — треугольники должны быть противоположно ориентированы и иметь общий центр (центры треугольников $T_aT_bT_c$ и $S_aS_bS_c$ совпадают с центром тяжести $\triangle ABC$). То, что это условие является и достаточным, вытекает из следующей задачи, предложенной автором несколько лет назад.

Задача 2. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — правильные, противоположно ориентированные треугольники с общим центром. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Приведём изящное решение этой задачи, не использующее теорему Наполеона.

Решение. Пусть точка Q изогонально сопряжена A_1 относительно $\triangle ABC$, Q' симметрична Q относительно биссектрисы $\angle BAC$. Тогда Q' лежит на всех прямых AA_1, BB_1 и CC_1. $\square$

Сходство двух задач очевидно, так что возникает вопрос: существует ли обобщение теоремы Наполеона, порождающее конфигурацию задачи 1, так же, как классическая теорема порождает конфигурацию задачи 2? Ответ положительный.

Обобщённая теорема Наполеона. Дан $\triangle MNP$ и точка T. Для произвольного треугольника ABC построим точки T_a, T_b и T_c такие, что $\triangle ABT_c \sim \triangle MNT$, $\triangle BCT_a \sim \triangle NPT$ и $\triangle CAT_b \sim \triangle PMT$ (все подобия сохраняют ориентацию). Тогда углы $\triangle T_aT_bT_c$ не зависят от выбора $\triangle ABC$. Более точно, пусть прямые MT, NT и PT вторично пересекают описанную окружность $\triangle MNP$ в точках M_1, N_1 и P_1. Тогда треугольники $T_aT_bT_c$ и $M_1N_1P_1$ подобны и противоположно ориентированы.

Доказательство. Построим точки U_a, U_b и U_c такие, что

$$MNPT \sim ABU_cT_c \sim U_aBCT_a \sim AU_bCT_b.$$

Тогда $\triangle BT_cU_c \sim \triangle BT_aC$, а потому $\triangle BU_cC \sim \triangle BT_cT_a$. Аналогично доказывается, что $\triangle AU_cC \sim \triangle AT_cT_b$. Отсюда имеем

$$\angle T_bT_cT_a = \angle T_cAU_c + \angle U_cBT_c = \angle TMP + \angle PNT = \\ = \angle M_1P_1T + \angle TP_1N_1 = \angle M_1P_1N_1.$$

Так же получаем $\angle T_aT_bT_c = \angle P_1M_1N_1$ и $\angle T_cT_aT_b = \angle N_1M_1P_1$. $\square$

Возьмём теперь другой треугольник $M'N'P'$ и точку T' и, применив к $\triangle ABC$ ту же конструкцию, получим другой треугольник $T'_aT'_bT'_c$. Какими должны быть необходимые и достаточные условия на треугольники

$T_aT_bT_c$ и $T'_aT'_bT'_c$, чтобы существовал $\triangle ABC$, для которого они являются обобщёнными треугольниками Наполеона? Ответ даёт следующая

Теорема Наполеона о фиксированной точке. Существуют фиксированные точки X и X', зависящие только от четырёхугольников $MNPT$ и $M'N'P'T'$ и такие, что для точек O и O', удовлетворяющих условиям $T_aT_bT_cO \sim M_1N_1P_1X$ и $T'_aT'_bT'_cO' \sim M'_1N'_1P'_1X'$ (оба подобия не сохраняют ориентацию), $O \equiv O'$ для любого $\triangle ABC$.

Эти точки можно построить так: заметим, что при применении конструкции Наполеона к самому треугольнику MNP треугольник $T_aT_bT_c$ вырождается в точку T, которая, следовательно, совпадает с соответствующей точкой O. Отсюда получаем следующий способ: построим точки X_a, X_b и X_c такие, что $\triangle MNX_a \sim \triangle M'N'T'$, $\triangle NPX_b \sim \triangle N'P'T'$ и $\triangle PMX_c \sim \triangle P'M'T'$ (т. е. применим конструкцию Наполеона к $\triangle M'N'P'$ и $\triangle MNP$). Теперь построим точку O', для которой $X_aX_bTX_cT \sim M'_1N'_1P'_1O'$. Тогда O' — одна из фиксированных точек предыдущей теоремы.

Вторую точку можно найти, построив $\triangle M'N'X'_a \sim \triangle MNT$, $\triangle N'P'X_b \sim \sim \triangle NPT$ и т. д. Заметим, что в обоих случаях мы получаем подобные четырёхугольники $MTNX_c \sim M'X'_cN'T'$ и т. д.

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Построим точку O и точки R_a, R_b и R_c так, что

$$OT_aT_bT_cR_aR_bR_c \sim T'X'_aX'_bX'_cM'N'P'.$$

Построим также

$$OW'_bT'_aW'_c \sim T_aBT'_aC \sim T_aR_bOR_c \text{ и}$$
$$OW''_aT'_cW''_b \sim T_cAT'_cB \sim T_cR_aOR_b.$$

Покажем, что $W'_b \equiv W''_b \equiv W_b$. Тогда, построив аналогично точки W_a и W_c, получим, что $OT'aT'bT'cW_aW_bW_c \sim TX_aX_bX_cMNP$ и, значит, $O \equiv O'$, что и требуется доказать.

Для этого заметим, что $T_aCT'_aB \sim T_aR_cOR_b$ и потому $\triangle T_aBR_b \sim \sim \triangle T_aT'_aO$. Следовательно, $\angle(R_bB, OT'_a) = \angle BT_aT'_a = \angle W'_bOT'_a$, откуда получаем $OW'_b \parallel R_bB$. Кроме того,

$$OW'_b : OT'_a = T_aB : T_aT'_a = R_bB : OT'_a,$$

т. е. $OW'_b = R_bB$. Аналогично получаем, что $OW''_b \parallel R_bB$ и $OW''_b = R_bB$, что завершает доказательство.

Теорема Наполеона в приведённой здесь общей формулировке является источником многих олимпиадных задач. Различным образом выбирая треугольники в её формулировке, мы получим ряд задач вида «Докажите, что такие-то треугольники подобны» или «Докажите, что такие-то точки в таких-то треугольниках совпадают» и т. д. Приведём несколько примеров.

Задача 3. Пусть в выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ $\angle B+\angle D+\angle F=360^\circ$ и $AB\cdot CD\cdot EF=BC\cdot DE\cdot FA$. Докажите, что $BC\cdot AE\cdot FD=CA\cdot EF\cdot DB$. (*IMO shortlist* 1998, *Польша*)

Задача 4. Дан треугольник ABC и точки A_1, B_1, C_1 на его описанной окружности такие, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Точка A_2 симметрична A_1 относительно BC, точки B_2 и C_2 определены аналогично. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны. (*Олимпиада им. И. Ф. Шарыгина, А. Заславский*)

Задача 5. Дан треугольник ABC. Точка A_1 — середина дуги BC описанной около него окружности, не содержащей A, точка A' симметрична A_1 относительно BC. Точки B_1, B', C_1 и C' определены аналогично.

(a) Докажите, что ортоцентр $\triangle A'B'C'$ совпадает с центром вписанной окружности треугольника $\triangle ABC$.

(b) Докажите, что окружности Эйлера треугольников ABC и $A'B'C'$ концентричны.

(c) Обозначим центры описанной и вписанной окружностей $\triangle ABC$ через O и I. Докажите, что радиус описанной окружности $\triangle A'B'C'$ равен $|OI|$. (*Н. Белухов*)

Теперь нетрудно выбрать четырёхугольники $MNPT$ и $M'N'P'T'$ так, чтобы получить конфигурацию задачи 1 — нужно, чтобы треугольники MNP и $M'N'P'$ были подобны и противоположно ориентированы, а точки T и T' были центрами описанных около них окружностей. Тогда четырёхугольники $AT_cBT'_c$, $BT_aCT'a$ и $CT_bAT'_b$ будут ромбами, и, исходя из треугольников $T_aT_bT_c$ и $T'_aT'_bT'_c$, мы можем восстановить точки A, B и C, проведя соответствующие серединные перпендикуляры. В результате получим решение, приведённое в первом параграфе.

Но можно взять треугольники MNP и $M'N'P'$ не подобными, попрежнему выбирая в качестве T и T' центры их описанных окружностей. Тогда большая часть доказательства сохранится, и мы получим обобщение, описанное в следующем параграфе.

3. Теорема о двух треугольниках

Теорема. Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ и точка O. Найдём необходимое и достаточное условие того, что два треугольника, подобных $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ с центром O (но разными углами поворота и коэффициентами гомотетии), были перспективны. Или: для двух четырёхугольников $OA'B'C'\sim OABC$ и $OA'_1B'_1C'_1\sim OA_1B_1C_1$ прямые $A'A'_1$, $B'B'_1$ и $C'C'_1$ пересекаются в одной точке. Мы докажем, что это равносильно выполнению одного из следующих двух условий

(1) Оба четырёхугольника $OABC$ и $OA_1B_1C_1$ вписанные и прямо подобны.

(2) Ни один из четырёхугольников не является вписанным и выполнены равенства:

$$\begin{gathered} \angle ABC = \angle A_1OB_1, \qquad \angle BCA = \angle B_1OC_1, \qquad \angle CAB = \angle C_1OB_1, \\ \angle A_1B_1C_1 = \angle AOB, \qquad \angle B_1C_1A_1 = \angle BOA, \qquad \angle C_1A_1B_1 = \angle COB. \end{gathered} \tag{$*$}$$

Заметим, что $\angle XYZ$ обозначает ориентированный угол. Если O лежит внутри обоих треугольников ABC и $A'B'C'$, эта система уравнений имеет простой геометрический смысл:

$$180^\circ = \angle A + \angle B_1OC_1 = \angle A_1 + \angle BOC = \angle B + \angle C_1OA_1 = \ldots \text{ и т. д.}$$

Прежде, чем приступить к доказательству, исследуем систему $(*)$. Ясно, что из любых трёх уравнений в одной строке следует четвёртое, но для нас более интересно, что эта система равносильна следующей:

$$\begin{gathered} \angle OAB = \angle OC_1B_1, \quad \angle OBC = \angle OA_1C_1, \quad \angle OCA = \angle OB_1A_1, \\ \angle OAC = \angle OB_1C_1, \quad \angle OCB = \angle OA_1B_1, \quad \angle OBA = \angle OC_1A_1 \end{gathered} \tag{$**$}$$

Вывести $(*)$ из $(**)$ легко. Покажем, как вывести $(**)$ из $(*)$: в $\triangle A_1B_1C_1$, проведём прямые, делящие его углы на части, равные соответствующим углам $\triangle ABC$ (например, прямая l_a, проходящая через точку A_1, делит $\angle B_1A_1C_1$ так, что $\angle(B_1A_1, l_a) = \angle BCO$ и $\angle(l_a, A_1C_1) = \angle OBC$). Так как прямые AO, BO и CO пересекаются в одной точке $\triangle ABC$, то, применив теорему Чевы в форме синусов, получим, что прямые l_a, l_b и l_c пересекаются в некоторой точке O'. Применив наше построение к этой точке и использовав $(*)$, получим, что $\angle OA_1O' = \angle OB_1O' = \angle OC_1O'$. Так как в случае (2) четырёхугольник $OABC$ не является вписанным, отсюда следует, что $O \equiv O'$, что и требовалось доказать.

Это наблюдение будет весьма полезно в дальнейшем в ходе доказательства.

Доказательство. Необходимость. Используем аналитическое рассуждение.

Зафиксировав четырёхугольник $OABC$ и угол поворота θ четырёхугольника $OA_1B_1C_1$, устремим коэффициент гомотетии $OA_1B_1C_1$ к бесконечности. Тогда точка пересечения прямых AA_1, BB_1 и CC_1 будет стремиться к некоторой точке X_θ, а сами прямые AA_1, BB_1 и CC_1 — к прямым, проходящим через A, B и C, параллельным OA_1, OB_1 и OC_1 соответственно. Т. е. прямые, проходящие через A, B и C, параллельные OA_1, OB_1 и OC_1, пересекаются в X_θ.

Теперь будем менять θ. Тогда прямые AX_θ, BX_θ и CX_θ будут вращаться вокруг A, B и C с одинаковыми угловыми скоростями. Значит, X_θ будет одновременно двигаться по описанным окружностям треугольников

ABX_θ, BCX_θ и CAX_θ, т. е. эти окружности совпадают, и X_θ лежит на описанной окружности $\triangle ABC$.

Но это однозначно определяет углы между OA_1, OB_1 и OC_1! Аналогично углы между OA, OB и OC равны и противоположно ориентированы углам $\triangle A_1B_1C_1$.

Если $OABC$ не является вписанным, эти условия однозначно определяют форму и ориентацию четырёхугольника $OA_1B_1C_1$, соответствующую случаю (2) теоремы.

Если же четырёхугольник $OABC$ вписанный, то получаем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ одинаково ориентированы. Выберем четырёхугольник $OA_1'B_1'C_1'$ с той же описанной окружностью, что и $OABC$. Если $\triangle ABC \equiv \triangle A_1'B_1'C_1'$, мы получаем случай (1). Если же $\triangle ABC \not\equiv \triangle A_1'B_1'C_1'$, то прямые AA_1', BB_1' и CC_1' равноудалены от центра окружности $OABC$ и могут пересекаться в одной точке, только будучи её диаметрами. Теперь нетрудно построить пример, когда $A'A_1'$, $B'B_1'$ и $C'C_1'$ не пересекаются в одной точке.

Достаточность. (1) Легко видеть, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через вторую общую точку окружностей $OABC$ и $OA_1B_1C_1$.

(2) Построим такую точку P_c, что $\angle P_cAA_1 = \angle A$, $\angle P_cA_1A = \angle A_1$ и треугольники AP_cA_1 и ABC одинаково ориентированы. Покажем, что $\angle P_cBB_1 = \angle B$, $\angle P_cB_1B = \angle B_1$ и треугольники BP_cB_1 и $A_1B_1C_1$ одинаково ориентированы.

Действительно, построим точку T_c, изогонально сопряжённую C относительно $\triangle AOB$. Тогда $\triangle AT_cO \sim \triangle AP_cA_1$, и надо показать, что $\triangle BT_cO \sim \sim \triangle BP_cB_1$. Аналогично, пусть S_c изогонально сопряжена C_1 относительно $\triangle A_1OB_1$. Тогда $\triangle OS_cA_1 \sim \triangle AP_cA_1$ и надо показать, что $\triangle BS_cO \sim \sim \triangle B_1T_cB$.

Имеем $\triangle AT_cO \sim \triangle AP_cA_1$, откуда $\triangle AP_cT_c \sim \triangle AA_1O$ и $\angle P_cT_cA = = \angle A_1OA$, так что $\angle BT_cP_c = \angle BOB_1$. Аналогично $BT_c : T_cP_c = BO : OB_1$. Но отсюда следует, что $\triangle BT_cP_c \sim \triangle BOB_1$, а значит, $\triangle BT_cO \sim \triangle BQ_cB_1$, что и требовалось доказать.

Теперь построим аналогично точки P_a и P_b. Из проведённых выше рассуждений сразу следует, что четырёхугольники $AP_cA_1P_b$, $BP_aB_1P_c$ и $CP_bC_1P_a$ — дельтоиды. Следовательно, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам $\triangle P_aP_bP_c$ и пересекаются в центре его описанной окружности. □

Из доказанной теоремы легко получить множество красивых следствий. Прежде всего, это задача 1. Другой пример — следующая задача, предложенная автором.

Задача 6. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон в точках A_1, B_1 и C_1. Произвольная прямая l проходит через центр

I этой окружности. Пусть $\triangle A'B'C'$ симметричен $\triangle A_1B_1C_1$ относительно l. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.
(*Болгарская олимпиада*, 2009)

Весьма короткое решение этой задачи было найдено И. Богдановым во время олимпиады.

Решение. Имеем равенство ориентированных углов

$$\angle A'IB' = -\angle A_1IB_1 = 180^\circ + \angle ACB = 2(90 + \angle ACI) = 2\angle AIB.$$

Отсюда следует, что точки, симметричные A' относительно AI и B' относительно BI, являются одной и той же точкой T. Аналогично T симметрична C' относительно CI, и прямые AA', BB' и CC' пересекаются в точке, изогонально сопряжённой T относительно $\triangle ABC$.

Следующее обобщение этой задачи совершенно в другом направлении было получено М. Матдиновым.

Задача. Вписанная в $\triangle ABC$ окружность касается его сторон в точках A_1, B_1 и C_1. Пусть I — центр окружности, P — произвольная точка. Прямые PA_1, PB_1 и PC_1 вторично пересекают окружность в точках A', B' и C'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

Исходная задача возникает, когда P — бесконечно удалённая точка.

Любопытный предельный случай возникает, когда $\triangle A_1B_1C_1$ вырождается в точку O. На первый взгляд, утверждение теоремы в этом случае становится бессмысленным, но эту трудность можно преодолеть с помощью теоремы Дезарга. Действительно, пусть соответствующие стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пересекаются в точках Q_a, Q_b и Q_c. Тогда теорема утверждает, что эти точки лежат на одной прямой. Так как эти точки можно определить и при $\triangle A_1B_1C_1 \equiv O$, получаем следующий результат.

Теорема. Дан $\triangle ABC$ и точка O. Пусть l — произвольная прямая, проходящая через O, а прямые, симметричные OA, OB и OC относительно l, пересекают соответствующие стороны $\triangle ABC$ в точках Q_a, Q_b и Q_c. Тогда эти точки лежат на одной прямой.

Возможна следующая красивая переформулировка

Задача 7. Пусть $ABCDEF$ — полный четырёхсторонник с диагоналями AC, BD и EF. Точка O такова, что биссектрисы двух из углов $\angle AOC$, $\angle BOD$ и $\angle EOF$ совпадают. Докажите, что биссектриса третьего угла также совпадает с ними. ([2, №1052], *С. Маркелов*)

Можно сделать следующее любопытное наблюдение.

Задача 8. Пусть в обозначениях предыдущей теоремы прямая l проходит через центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности. Докажите, что прямая $Q_aQ_bQ_c$ касается этой окружности. (*Hyacinthos*[1])

Доказательство. Пусть касательная к окружности из точки Q_a, отличная от BC, пересекает AB в точке Q'_c. Достаточно показать, что $Q_c \equiv Q'_c$.

Пусть PI пересекает AC и $Q_aQ'_c$ в точках K и L. Пусть также точки M и N симметричны Q_a и C относительно PI. Заметим, что PMA — прямая.

Теперь шестиугольник KAQ'_cLMN описан вокруг вписанной окружности $\triangle ABC$, и по теореме Брианшона KL, AM и Q'_cN пересекаются в одной точке. Следовательно, эта точка есть P и Q'_cNP — прямая, т. е. $\angle CPI = \angle Q'_cPI$ и $Q'_c \equiv Q_c$. □

Есть ли другие интересные результаты, когда l проходит через какую-нибудь замечательную точку или O является замечательной точкой? Автору это неизвестно, но читатель может провести собственное исследование!

4. Гомотетичные треугольники

Предыдущие исследования (подробнее см. конец этого раздела) побудили автора рассмотреть ряд случаев, в которых два треугольника остаются перспективными, притом что один из них подвергается гомотетии с фиксированным центром и переменным коэффициентом. Общее описание таких ситуаций получается заменой слово «подобный» в формулировке теоремы о двух треугольниках словом «гомотетичный»:

пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ и точка O. Найти необходимые и достаточные условия того, что любые два треугольника, гомотетичные $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ с центром O (но разными коэффициентами), были перспективны.

К сожалению, для этого случая автору неизвестен общий критерий, подобный приведённому в предыдущем разделе.

Однако существует одно мощное достаточное условие (разумеется, тривиальное достаточное условие возникает, когда треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ сами гомотетичны, мы используем это позднее). Оно является специальным случаем теоремы Сонда[2], и имеет следующий вид.

[1] Hyacinthos — группа, обсуждающая проблемы геометрии треугольника на форуме `http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/`. Проблема возникла в процессе обсуждения и не имеет определённого автора.

[2] Эта теорема была сообщена автору А. Заславским. Его статья «Теорема Сонда» на `http://math.olymp.mioo.ru/`, может использоваться как введение в тему.

Теорема Сонда. Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ ортологичны и оба центра ортологичности совпадают с точкой O. Это значит, что

$$OA \perp B_1C_1, \qquad OB \perp C_1A_1, \qquad OC \perp A_1B_1,$$
$$OA_1 \perp BC, \qquad OB_1 \perp CA, \qquad OC_1 \perp AB.$$

Тогда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Ясно, что условие теоремы сохраняется при гомотетии.

Интересно отметить, что для любых двух треугольников, удовлетворяющих условию теоремы Сонда, можно построить два треугольника, удовлетворяющих условию теоремы о двух треугольниках, отразив один из них относительно произвольной прямой, проходящей через O! Обратно, если выполнены условия теоремы о двух треугольниках, то отразив один из них относительно некоторой прямой, проходящей через O, можно получить два треугольника, удовлетворяющих теореме Сонда.

Первое доказательство. Пусть прямые OA и B_1C_1 пересекаются в точке P_a, а BC и B_1C_1 — в точке Q_a. Точки P_b, P_c, Q_b и Q_c определяются аналогично.

Рассмотрим описанные окружности треугольников AP_aQ_a, BP_bQ_b и CP_cQ_c. Легко видеть, что O и ортоцентр H треугольника ABC имеют равные степени относительно этих окружностей. Если $O \equiv H$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны, и утверждение теоремы очевидно. В противном случае три окружности соосны, и значит, их центры O_a, O_b и O_c лежат на одной прямой, перпендикулярной радикальной оси.

Но, будучи серединами отрезков AQ_a, BQ_b и CQ_c, точки O_a, O_b и O_c делят стороны серединного треугольника $\triangle ABC$ в тех же отношениях, в каких Q_a, Q_b и Q_c делят стороны $\triangle ABC$. По теореме Менелая Q_a, Q_b и Q_c лежат на одной прямой. Отсюда по теореме Дезарга получаем утверждение теоремы. □

Как можно получить это доказательство?

Пусть $\triangle A_1B_1C_1$ вырождается в точку O, как и в предыдущем разделе используем теорему Дезарга. Точки Q_a, Q_b и Q_c, которые определены и в этом случае, лежат на одной прямой, так что мы получаем следующую задачу.

Задача 9. Даны $\triangle ABC$ и точка O. Пусть Q_a такая точка прямой BC, что $\angle AOQ_a$ прямой. Точки Q_b и Q_c определены аналогично. Докажите, что Q_a, Q_b и Q_c лежат на одной прямой. ([2, №924], *С. Маркелов*)

Напомним также ещё одну задачу на эту тему:

Задача. Докажите, что, если в обозначениях задачи 9 O лежит на описанной окружности $\triangle ABC$, то $Q_aQ_bQ_c$ проходит через центр этой окружности. (*Математика*, 2/1998, *А. Иванов*)

Первое найденное автором решение этой задачи было связано с теоремой Гаусса – Боденмиллера.

Теорема Гаусса – Боденмиллера. Три окружности, диаметры которых являются диагоналями полного четырёхсторонника, соосны (пересекаются в двух точках).

Если обозначить полный четырёхугольник $ABCQ_aQ_bQ_c$, а одну из общих точек окружностей O, получится в точности ситуация задачи 9. Теперь, чтобы решить задачу, нужно показать, что, если даны три стороны AB, BC и CA, так, чтобы заданная точка плоскости оказалась общей точкой окружностей Гаусса – Боденмиллера. Так возникла идея рассмотреть описанные окружности треугольников AP_aQ_a, BP_bQ_b и CP_cQ_c в приведённом выше доказательстве. После этого уже нетрудно сделать обобщение, доказывающее теорему.

Теперь опишем более элементарный подход к теореме Сонда.

Второе доказательство. Пусть AD_a, BD_b и CD_c — диаметры описанной окружности $\triangle ABC$, а прямые AO, BO и CO пересекают эту окружность в точках E_a, E_b и E_c соответственно. Обозначим точку пересечения прямых D_aE_a и D_bE_b через C_1' и определим точки A_1' и B_1' аналогично. Покажем, что $\triangle A_1'B_1'C_1'$ гомотетичен $\triangle A_1B_1C_1$ с центром O.

Действительно, при данном $\triangle ABC$, условие теоремы определяет семейство гомотетичных треугольников $A_1B_1C_1$. Следовательно, надо показать, что это условие выполнено.

Так как AD_a — диаметр, то $AO \perp B_1'C_1'$. Кроме того, четырёхугольник $OE_bA_1'E_b$ вписанный, следовательно, $\angle E_cA_1'O = \angle E_cE_bO = \angle E_cE_bB = \angle E_cCB$, откуда получаем $\angle A_1'E_cC = \angle(A_1'O, BC)$ и $A_1'O \perp BC$. Остальные условия проверяются аналогично.

Теперь построим такую точку P_c, что треугольники ABC и $A_1'B_1'P_c$ подобны и противоположно ориентированы, и пусть P_cH_c — высота $\triangle A_1'B_1'P_c$. Пусть $A'B'C'$ — произвольный треугольник, гомотетичный $\triangle ABC$ с центром O, и $C_1'C'$ пересекает P_cH_c в точке C''. Покажем, что $OC' : C'C = P_cC'' : C''H_c$.

Действительно, пусть прямая, проходящая через C и параллельная $A_1'B_1'$ пересекает $C_1'A_1'$ в точке X, а $C_1'B_1'$ в точке Y. Четырёхугольник $OCYE_a$ вписанный, следовательно, $\angle XYO = \angle CYO = \angle CE_aO = \angle CE_aA = \angle CBA$. Аналогично, $\angle YXO = \angle CAB$. Поэтому $OXCY \sim P_cA_1'H_cB_1'$ и гомотетия с центром C_1' переводит первый четырёхугольник во второй. Следовательно, она переводит C' в C''.

Построим аналогично точки $P_a, P_b, H_a, \ldots$ и т. д. Очевидно, достаточно показать, что прямые $A_1'A', B_1'B'$ и $C_1'C'$ всегда пересекаются в одной точке, или $A_1'A'', B_1'B''$ и $C_1'C''$ пересекаются в одной точке. По теореме Чевы это равносильно равенству

$$\frac{S_{C_1'B_1'C''}}{S_{C_1'A_1'C''}} \cdot \frac{S_{B_1'A_1'B''}}{S_{B_1'C_1'B''}} \cdot \frac{S_{A_1'C_1'A''}}{S_{A_1'B_1'A''}} = 1.$$

Но $\triangle A_1'B_1'P_c \sim A_1'P_bC_1'$, поэтому $\triangle A_1'H_cP_c \sim \triangle A_1'H_bP_b$, следовательно, $\triangle A_1'H_cC'' \sim \triangle A_1'H_bB''$, откуда имеем $\angle B''A_1'H_b = \angle H_cA_1'C''$. Значит,

$$S_{C_1'A_1'C''} : S_{B_1'A_1'B''} = \\ = (C_1'A_1'.A_1'C'' \cdot \sin\angle C_1'A_1C'') : (B_1'A_1'.A_1'B'' \cdot \sin\angle B_1'A_1'B'') = \\ = (C_1'A_1' : B_1'A_1') \cdot (A_1'B'' : A_1'C'') = \frac{C_1'A_1'}{B_1'A_1'} \cdot \frac{A_1'P_b}{A_1'P_c}.$$

Преобразовав левую часть, получаем

$$\frac{S_{C_1'B_1'C''}}{S_{C_1'A_1'C''}} \cdot \frac{S_{B_1'A_1'B''}}{S_{B_1'C_1'B''}} \cdot \frac{S_{A_1'C_1'A''}}{S_{A_1'B_1'A''}} = \\ = \frac{C_1'A_1'}{B_1'A_1'} \cdot \frac{A_1'B_1'}{C_1'B_1'} \cdot \frac{B_1'C_1'}{A_1'C_1'} \cdot \frac{A_1'P_b}{A_1'P_c} \cdot \frac{B_1'P_c}{B_1'P_a} \cdot \frac{C_1'P_a}{C_1'P_b} = \\ = \frac{A'B'}{C'B'} \cdot \frac{B'C'}{A'C'} \cdot \frac{C'A'}{B'A'} = 1.$$

Теорема доказана. □

Теорема Сонда имеет множество красивых следствий.

Задача 10. На сторонах $\triangle ABC$ как на основаниях построены прямоугольники ABB_aA_b, BCC_bB_c и CAA_cC_a.

(a) Докажите, что существуют три точки A', B' и C' такие, что $A'B'C_aC_b$, $B'C'A_bA_c$ и $C'A'B_cB_a$ — также прямоугольники.

(b) Докажите, что площади треугольников ABC и $A'B'C'$ равны.

(c) Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке.

Доказательство. (c) Пусть O — четвёртая вершина параллелограмма OAA_cB'. Тогда $OB'C_aC, OCC_bA', OA'B_cB, OBB_aC'$ и $OC'A_bA$ — тоже параллелограммы. Применив теорему Сонда к треугольникам ABC, $A'B'C'$ и точке O, получим утверждение задачи. □

Эта конфигурация имеет много других интересных свойств, но здесь мы не будем на них останавливаться.

Задача 11. Дан правильный $\triangle ABC$ и точка P. Докажите, что прямые Эйлера треугольников ABP, BCP и CAP пересекаются в одной точке.

Доказательство. Применим теорему Сонда к треугольнику, образованному центрами тяжести треугольников ABP, BCP и CAP, треугольнику, образованному центрами их описанных окружностей, и центру $\triangle ABC$. □

На самом деле наше второе доказательство было найдено сначала для задачи 11, а затем обобщено до доказательства теоремы.

Нетрудно видеть, что условие теоремы Сонда не является необходимым для гомотетичной перспективности. Действительно, применив к двум треугольникам Сонда произвольное аффинное преобразование, получим контрпример. Автору неизвестно, можно ли любую гомотетично перспективную пару треугольников перевести соответствующим аффинным преобразованием в конфигурацию теоремы Сонда.

Перейдём к изучению интересных контрпримеров, возникших из работ автора по исследованию различных прямых Эйлера.

Теорема Шиффлера. Пусть I — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Тогда прямые Эйлера треугольников ABI, BCI, CAI и ABC пересекаются в одной точке.

Эта точка S называется точкой Шиффлера.

Обобщённая теорема Шиффлера. Пусть M_a и O_a — центр тяжести и центр описанной окружности $\triangle BCI$. Точки M_b, M_c, O_b и O_c определены аналогично. Тогда любые два треугольника, гомотетичные $\triangle M_aM_bM_c$ и $\triangle O_aO_bO_c$ с центром I, перспективны.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. Дан треугольник ABC и точка O. Прямые AO, BO и CO пересекают описанную окружность $\triangle ABC$ в точках A', B' и C'. Пусть M_a и M_A — центры тяжести треугольников OBC и $OB'C'$ соответственно, O_a и O_A — центры их описанных окружностей, точки $M_b, M_B, O_b, \dots$ определены аналогично. Тогда любые два треугольника, гомотетичные $\triangle M_aM_bM_c$ и $\triangle O_aO_bO_c$ с центром O, перспективны тогда и только тогда, когда любые два треугольника, гомотетичные $\triangle M_AM_BM_C$ и $\triangle O_AO_BO_C$ с центром O, перспективны.

Доказательство. Пусть $M'_AM'_BM'_C$ — произвольный треугольник, гомотетичный $\triangle M_AM_BM_C$ с центром O, а $\triangle M'_aM'_bM'_c$ гомотетичен $\triangle M_aM_bM_c$ с теми же центром и коэффициентом. Очевидно, достаточно доказать, что, если $O_AM'_A, O_BM'_B$ и $O_CM'_C$ пересекаются в некоторой точке X, то $O_aM'_a, O_bM'_b$ и $O_cM'_c$ пересекаются в некоторой точке Z.

Пусть точка Y изогонально сопряжена X относительно $\triangle O_AO_BO_C$. Заметим, что $\triangle O_aO_bO_c \sim \triangle O_AO_BO_C$ и построим такую точку Z, что $O_aO_bO_cZ \sim \triangle O_AO_BO_CY$.

Так как $OA'B'O_CM_CM'_C \sim OBAO_cM_cM'_c$, то Z лежит на прямой $O_cM'_c$. Аналогично она лежит на прямых $O_aM'_a$ и $O_bM'_b$, следовательно Z — искомая точка. $\square$

Вернёмся к доказательству обобщённой теоремы Шиффлера. Пусть AI, BI и CI пересекают описанную окружность $\triangle ABC$ в точках A', B' и C'. Тогда I — ортоцентр $\triangle A'B'C'$. Значит, оба треугольника $M_AM_BM_C$ и $O_AO_BO_C$ гомотетичны $\triangle A'B'C'$, и любые два треугольника, гомотетичные им с центром I, перспективны. Осталось применить лемму.

Замечание. В формулировке леммы важно, что прямые Эйлера треугольников OAB, OBC и OCA пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда прямые Эйлера треугольников $OA'B', OB'C'$ и $OC'A'$ пересекаются в одной точке. Следовательно, можно взять $\triangle A'B'C'$ правильным и, использовав задачу 11, получить следующий результат.

Теорема. Пусть в $\triangle ABC$ A_p — одна из двух точек Аполлония. Тогда прямые Эйлера треугольников ABA_p, BCA_p и CAA_p пересекаются в одной точке.

Так как A является точкой Аполлония $\triangle BA_pC$, три прямых Эйлера, как и в теореме Шиффлера, пересекаются на прямой Эйлера $\triangle ABC$. Однако элементарное доказательство того, что точка Шиффлера $\triangle ABC$ лежит на прямой Эйлера, автору неизвестно.

Многие замечательные точки X обладают тем свойством, что прямые Эйлера треугольников ABX, BCX и CAX пересекаются в одной точке (их геометрическое место называется кубикой Нейберга и обладает многими интересными свойствами). Однако, существует ли для каких-то из этих точек «гомотетичное» обобщение, автору неизвестно.

Список литературы

[1] Математическое просвещение. Серия 3, вып. 12, 2008. Задача 12.8. С. 236.

[2] И.Ф. Шарыгин. *Геометрия. Планиметрия*. М.: Дрофа, 2001.

Н. И. Белухов, факультет математики и информатики, университет Софии (Болгария).
Email: `nbeluhov@abv.bg`