О вычислении объёма n-мерного шара

А. А. Заславский

В учебниках по математическому анализу объём n-мерного шара $B_n = B_n(R)|_{R=1}$ с радиусом R, равным единице, вычисляется интегрированием по частям. В результате получается рекуррентное соотношение, выражающее B_n через B_{n-2}, которое после соответствующих преобразований приводит к формулам, имеющим разный вид для чётного и нечётного n. Между тем, использование вероятностных соображений позволяет сразу получить единую для всех n формулу.

Ясно, что $B_n(R) = B_n R^n$. Площадь[1] границы такого шара, являющейся $(n-1)$-мерной сферой радиуса R, равна производной $B_n(R)$ по R. Поэтому при $R = 1$ получаем $S_{n-1} = nB_n$, где S_{n-1} есть площадь $(n-1)$-мерной сферы единичного радиуса, площадь же $(n-1)$-мерной сферы радиуса R суть $S_{n-1}R^{n-1}$.

Рассмотрим случайный вектор $x \in R^n$ со стандартным нормальным распределением и плотностью[2]

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)/2}.$$

Тогда вероятность того, что x лежит в шаре с центром в начале координат

[1] Определение *площади поверхности тела по Минковскому* — это производная объёма ε-окрестности тела по ε.

[2] При изучении непрерывных величин говорят не о *вероятности* того, что величина принимает данное значение (она равна нулю), а о *плотности вероятности*. Вероятность dP попасть в окрестность данной точки $\vec{z}$ объёма dV равна $\rho(\vec{z})dV$, функция $\rho(\vec{z})$ есть *плотность вероятности*. Поскольку полная вероятность равна 1, $\int \rho(\vec{z})\, dz_1 dz_2 \ldots dz_n = 1$. Заметим, что

$$\int p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2/2} dx_1 \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_n^2/2} dx_n = I^n,$$

где $I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$, так что функция $p(x)$ действительно является распределением вероятностей.

Равенство $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (знаменитый *интеграл Гаусса*) устанавливается так: легко видеть, что $I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx e^{-y^2} dy = \int_0^\infty e^{-r^2} 2\pi r dr = \pi \int_0^\infty e^{-t} dt = \pi$ (замена $t = r^2$).

и радиусом t, равна

$$P(r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leqslant t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{r\leqslant t} e^{-r^2/2}\, dx_1 \dots dx_n.$$

Будем считать интегралы так. Разобьём пространство на сферические слои толщины dR каждый. Объём такого слоя равен $S_{n-1}R^{n-1}dR$, а значение функции $p(x)$ близко к $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}}e^{-(x_1^2+\dots+x_n^2)/2}$. Следовательно,

$$P(r \leqslant t) = \frac{nB_n}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_0^t r^{n-1}e^{-r^2/2}\, dr.$$

Теперь, устремив t к бесконечности, получим в левой части единицу, а интеграл в правой части заменой $u = r^2/2$ приводится к виду

$$2^{-n/2} \int_0^\infty u^{(n-2)/2}e^{-u}\, du.$$

В результате получаем выражение объёма через гамма-функцию[3)]

$$B_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\,.$$

Заметим, что $\Gamma(n)$ при $n \to \infty$ растет быстрее, чем любая показательная функция a^n. Отсюда следует, что при любом R

$$\lim_{n\to\infty} B_n(R) = 0.$$

В частности, равен нулю искомый предел в задаче 13.2 из задачника «Математического просвещения».

А. А. Заславский, ЦЭМИ РАН

[3)] $\Gamma(z) = \int_0^\infty y^z e^{-y} dy$ есть знаменитая *гамма-функция* Эйлера, доопределяющая факториал на комплексную плоскость: $\Gamma(k) = (k+1)!$ при целом k и $\Gamma(z) = \Gamma(z-1)z$ (это равенство позволяет доопределить $\Gamma(z)$ при $\operatorname{Re}(z) < 0$). Известно, что $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin(\pi x)$, в частности $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$.