Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. Дано бесконечное периодическое слово минимального периода n и два его одинаковых подслова длины $n-1$. Доказать, что их начальные буквы находятся на расстоянии кратном n. (*А. Я. Белов*)

2. Найти предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg}\sin(x)}{\arcsin \operatorname{arctg}(x) - \operatorname{arctg}\arcsin(x)}$. (*В. И. Арнольд*)

3. Бесконечное множество точек на плоскости таково, что все попарные расстояния целые. Докажите, что все точки лежат на одной прямой. А что если все попарные расстояния рациональны? (*Фольклор*)

4. Докажите, что при любых натуральных $n \geqslant l$ выполняется тождество:
$$\frac{1}{l!}\sum_{\substack{\sum_{i=1}^{l} k_i = n;\\ k_i\geqslant 1}} \frac{1}{k_1\cdot\ldots\cdot k_l} = \sum_{\substack{\sum_{i=1}^{l} k_i = n;\\ k_i\geqslant 1}} \frac{1}{k_1(k_1+k_2)\cdot\ldots\cdot(k_1+\cdots+k_l)}$$
(*И. Никокошев*)

5. Бесконечно Мудрый Таракан живёт на плоскости. Он близорук и потому видит Истину, только когда находится не более, чем в одном шаге от неё. Первоначально Таракан находится в n шагах от Истины. Когда Таракан делает шаг, друзья говорят говорят ему, приблизился он к Истине, или нет. а) Докажите, что, пользуясь этой и только этой информацией, Таракан может достичь Истины менее чем за $n+10\ln n$ шагов. б) Докажите, что не существует алгоритма, позволяющего достичь Истины менее чем за $n+0.1\ln n$ шагов. (*А. Я. Белов*)

6. $f(x,y)$ — бесконечно дифференцируемая функция от двух переменных с локальным минимумом в нуле. Других критических точек у ней нет. Верно ли, что этот минимум глобальный? (Точка называется *критической*, если в ней обе частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ обращаются в нуль.) (*Фольклор*)

7. Пусть $q \neq 2^k + 1$ — натуральное число. Докажите, что в q-ичной системе счисления существует число, равное определителю $q \times q$ матрицы, составленной из цифр этого числа и их циклических перестановок. Например, в десятичной системе счисления ($q = 10$)
$$692 = \det \begin{pmatrix} 6 & 2 & 9 \\ 9 & 6 & 2 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} \text{ или}$$
$$456790123 = \det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
(*Н. И. Белухов*)

8. Дан $\triangle ABC$. A_1, B_1, C_1 — точки касания сторон BC, AC, AB с вписанной окружностью соответственно. A_0, B_0, C_0 — середины сторон. Обозначим точку пересечения прямых A_0B_0 и A_1B_1 через C'. Аналогично определяются точки A' и B'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в точке Фейербаха. (*Ф. Ивлев*)

9. Докажите, что при игре «Жизнь» а) в квадрате 2010×2010; б) на бесконечной плоскости найдётся конфигурация без прообраза.[4] (*Фольклор*)

10. Докажите, что существует такое $x < 4 \cdot 99!$, что $x(x+1)$ делится на $100!$. (*С. В. Конягин*)

---

[4]Конвеевская игра *«Жизнь»* заключается в следующем: в некоторых клетках решётки стоит по фишке, а некоторые клетки пустые. Фишка, имеющая меньше двух соседей, умирает от одиночества, а имеющая больше трёх соседей — от перенаселённости. На пустом поле, имеющем ровно три соседние фишки, рождается новая фишка. Клетки соседствуют по общим сторонам или общим вершинам. Состояния всех клеток меняются одновременно.

11. Известно, что если зафиксировать одну переменную, то функция $f(x, y)$ по другой будет многочленом. Верно ли, что она будет сама многочленом от двух переменных? (*Б. П. Панеях*)

12. По некоторым рёбрам клеток плоской решётки проведены перегородки. Пьяница с равной вероятностью идёт из квадрата, где он находится, в любой соседний квадрат, куда он может пройти. Докажите, что он с вероятностью 1 вернётся в исходную точку. (*А. Я. Канель, М. Б. Скопенков*)