Решения задач из предыдущих выпусков

5.6. Условие. а) Все коэффициенты многочлена $P(x)$ целые и среди них есть нечётные. Докажите, что найдётся многочлен $Q(x)$, имеющий ровно два нечётных коэффициента и делящийся на $P(x)$.

б) Существует ли многочлен $P(x, y)$ с целыми коэффициентами такой, что всякий многочлен $R(x, y)$, делящийся на $P(x, y)$, имеет более миллиона нечётных коэффициентов?

Решение. а) Поскольку нас интересует только чётность коэффициентов, будем рассматривать многочлены над $\mathbb{Z}_2$. Наша цель — показать, что при некоторых $n_1 \neq n_2$ многочлен $x^{n_1} - x^{n_2}$ делится на $Q(x)$.

Рассмотрим остатки от деления на $Q(x)$ многочленов вида x^n. Они представляют собой многочлены степени не выше $\deg(Q)-1$, и количество различных остатков не превосходит $2^{\deg(Q(x)}$. Значит, при каких-то $n_1 \neq n_2$ остатки повторятся и многочлен $x^{n_1} - x^{n_2}$ будет искомым.

б) Ответ: да, существует!

Рассмотрим многочлены с коэффициентами по модулю 2. Если член $x^n y^m$ входит с ненулевым коэффициентом, то отметим точку с координатами (n, m). Выпуклая оболочка множества отмеченных точек есть *многоугольник Ньютона* многочлена $P(x, y)$.

Покажем, что многоугольник Ньютона произведения $P(x, y)Q(x, y)$ есть сумма Минковского многоугольников Ньютона многочленов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. *Сумма Минковского* $M_1 \oplus M_2$ фигур M_1 и M_2 по определению равна

$$M_1 \oplus M_2 = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2};\ \vec{x_1} \in M_1,\ \vec{x_2} \in M_2\}$$

(Точка отождествляется со своим координатным вектором.) Подробнее о сумме Минковского написано в статье В. А. Тиморина и А. Г. Хованского в этом выпуске, см. 30–57.

В самом деле, каждому направлению на плоскости отвечает *вес* (λ_1, λ_2), для которого вес монома $x^n y^m$ равен $n\lambda_1 + m\lambda_2$. Каждая вершина многоугольника M суть точка со строго максимальным (или строго минимальным — что то же самое, ибо знаки λ_i можно поменять) весом, при подходящем выборе веса, и все точки с таким свойством — суть вершины. Рёбра отвечают весам, имеющим равные значения на паре вершин (соединяемым этим ребром). (Геометрически это значит, что при подходящем выборе проекции вершина M будет единственной максимальной точкой, соответственно, ребро спроецируется в точку). Ясно, что вершина максимального веса для многоугольника Ньютона произведения $P(x,y)Q(x,y)$ отвечает произведению мономов максимального веса сомножителей — т. е. сумме соответствующих вершин многоугольников Ньютона для многочленов $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

Если показать, что количество вершин у $M_1 \oplus M_2$ не меньше, чем количество вершин в каждом слагаемом, то из этого будет следовать утверждение задачи. В качестве примера достаточно взять многочлен, у которого многоугольник Ньютона содержит более миллиона вершин.

Сумма Минковского обладает следующим свойством. Ориентируем стороны M_i по часовой стрелке. Если у M_1 и M_2 нет сонаправленных векторов сторон, то множество векторов сторон у $M_1 \oplus M_2$ суть объединение соответствующих множеств для M_i, в случае же если такие векторы есть, то вместо пары векторов берётся их сумма. Поэтому количество вершин у $M_1 \oplus M_2$ не меньше, чем количество вершин в каждом слагаемом. Задача решена.

Решение задачи (для обоих пунктов) проходит, если 2 заменить на произвольное $1 < n \in \mathbb{N}$, а также для многочленов над любым конечным полем.

(*А. Я. Канель-Белов*)

9.1. Условие. По веточке ползёт червячок со скоростью 1 мм/с, а веточка, в свою очередь, растёт со скоростью 1 м/с. Сможет ли червячок проползти всю веточку? (Веточка растёт равномерно, так что её середина удаляется от концов со скоростью 0.5 м/с.)

Решение. Разрежем веточку на 2000 равных частей. Концы каждой из них удаляются друг от друга со скоростью 0.5 мм/с. Ясно, что червячок их всех по очереди проползёт.

Решение 2. Пусть v — скорость червячка, V — веточки, $d\lambda$ — относительное смещение за время dt; t обозначает время, ℓ_0 — начальную длину веточки. Тогда

$$\ell(t) = \ell_0 + tV,$$

$$d\lambda = v\,dt/\ell(t) = \frac{v\,dt}{\ell_0 + tV},$$

$$\lambda(T) = \int_0^T d\lambda = v\int_0^T \frac{dt}{\ell_0 + tV} = \frac{v}{V}\big(\ln(TV) - \ln \ell_0\big).$$

При $T = \frac{1}{V}\ell_0 e^{V/v}$ получаем $\lambda(T) = 1$, что и означает, что червячок прополз всю веточку. Таким образом, мы нашли точный ответ.

Замечание. Эта задача возникла у А. Д. Сахарова из размышлений о возможности облететь расширяющуюся Вселенную.

(*А. Я. Канель-Белов*)

9.5. Условие. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных?

Решение. *Ответ*: Нет, не существует.

Лемма. *Множество точек разрыва функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть счётное объединение замкнутых множеств.*

Доказательство. Напомним, что *колебанием* функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в точке x_0 называется величина

$$\omega_f(x_0) = \limsup_{x\to x_0} f(x) - \liminf_{x\to x_0} f(x) = \\ = \lim_{\varepsilon\to+0} \sup_{|x-x_0|<\varepsilon} f(x) - \lim_{\varepsilon\to+0} \inf_{|x-x_0|<\varepsilon} f(x) \geqslant 0$$

(может случиться, что $\omega_f(x_0) = +\infty$). Известно, что функция ω_f полунепрерывна сверху, то есть для любого $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\limsup_{x\to x_0} \omega_f(x) = \omega_f(x_0).$$

Ясно также, что f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\omega_f(x_0) = 0$. Значит, множество точек разрыва этой функции есть

$$N_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \omega_f(x) > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_k, \quad \text{где } T_k = \{x \in \mathbb{R} \mid \omega_f(x) \geqslant 1/k\}.$$

Осталось заметить, что при любом k множество T_k замкнуто как прообраз замкнутого луча $[1/k, +\infty]$ относительно полунепрерывной сверху функции ω_f. □

Перейдём к решению задачи. Предположим, что требуемая функция f существует. Тогда по лемме найдутся такие замкнутые множества T_k, $k \in \mathbb{N}$, что $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \cup_{k\in\mathbb{N}} T_k$. Заметим, что любое множество T_k нигде не плотно. Действительно, в противном случае его замыкание (совпадающее с T_k) должно содержать некоторый интервал; значит, этот интервал содержится в $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, что невозможно.

Но в таком случае $\mathbb{R}$ также можно представить как счётное объединение нигде не плотных множеств:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} T_k \cup \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\},$$

что противоречит теореме Бэра. (*И. И. Богданов*)

10.9. Условие. G — группа порядка $2^n(2k+1)$, содержащая элемент порядка 2^n. Докажите, что множество элементов нечётного порядка является подгруппой.

Решение. Каждая группа G действует на себя левыми сдвигами, т. е. с каждым элементом $g \in G$ можно связать биекцию $(\varphi_g\colon G \to G)\colon h \to gh$. (Таким образом, G вкладывается в группу перестановок $S_{|G|}$ из $|G|$ элементов, что представляет собой утверждение знаменитой *теоремы Келли*).

Пусть $|G| = 2^n(2q+1)$, $x \in G$ есть элемент порядка 2^n. Тогда при указанном действии множество G разобьётся на $2q+1$ орбиту вида $h = x^{2^n}h, xh, \ldots, x^{2^n-1}h$. Каждая орбита представляет собой чётный цикл (из 2^n элементов), являющийся нечётной перестановкой множества G, а всего таких циклов нечётное число, так что $\varphi_x \in S_{|G|}$ есть нечётная перестановка. Легко видеть также, что если 2^n делит порядок элемента y, то φ_y есть нечётная перестановка, а если не делит — то чётная.

Таким образом, при действии φ есть элемент x, образ которого нечётен. Легко видеть, что при этом чётность φ_{xy} противоположна чётности φ_y. Поэтому элементов с чётным и нечётным образом поровну, и элементов с чётным образом — половина. Порядок каждого такого элемента имеет вид $2^{n-k}(2q'+1)$, $k > 0$.

Элементы с чётным образом образуют подгруппу G_1 порядка $|G|/2 = 2^{n-1}(2q+1)$, содержащую элемент x^2 порядка 2^{n-1}, так что дело завершает индукция.

Легко видеть, что множество элементов нечётного порядка является *нормальной подгруппой* и при $n > 0$ группа G не проста (а простая группа нечётного порядка суть $\mathbb{Z}_p$ — это очень трудная теорема).

(*А. Я. Канель-Белов*)

11.1[1]. Условие. Вычислить

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)}\,.$$

Решение. Разобьём промежуток интегрирования на отрезок $[0,1]$ и луч $[1,\infty)$ и в первом из получившихся интегралов сделаем замену $x = 1/t$:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)} = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)} + \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)} = $$
$$= \int_1^\infty \frac{t^\pi\,dt}{(1+t^2)(1+t^\pi)} + \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\pi)} = \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

(*Д. Горяшин, А. Москвин*)

[1] В прошлом номере уже было опубликовано решение этой задачи. Здесь мы приводим более короткое решение, присланное нашими читателями.

11.6. Условие. Обозначим через $s(n)$ сумму цифр числа n. Ограничена ли последовательность $s(n)/s(n^2)$?

Решение. Ответ: последовательность $s(n)/s(n^2)$ неограниченна.

Пусть $n = 1+10^k-10^{2k-1}+10^{3k}+10^{4k}$. Ясно, что $s(n) = 9k+12$, когда $k \geqslant 2$, так что $s(n) \to \infty$ при $k \to \infty$.

С другой стороны, $n^2 = 1 + 2\cdot 10^k + 8\cdot 10^{2k-1} + 18\cdot 10^{3k-1} + 10^{4k-2} + 4\cdot 10^{4k} + 18\cdot 10^{5k-1} + 8\cdot 10^{6k-1} + 2\cdot 10^{7k} + 10^{8k}$ так что $s(n^2) = 54$ при $k \geqslant 2$ и $\lim_{k\to\infty} s(n)/s(n^2) = \lim_{k\to\infty}(9k+12)/54 = \infty$. Задача решена.

Замечания. 1. Решение задачи выглядит просто, однако для его получения потребовался месяц работы. Она в своё время довольно долго стояла во Второй школе (её нам сообщил В. А. Сендеров) как «полуоткрытый вопрос», т. е. задача с неясным решением. Немного видоизменив конструкцию, можно показать, что для любого $k > 1$ последовательность $s(n)/s(n^k)$ неограничена. Более того, n можно возводить в целую степень $\psi_n \sim (\ln n)^{0.5-\varepsilon}$. Для этого надо рассмотреть случаи $k = 2, 3$ и воспользоваться неравенством $s(nm) \leqslant s(n)s(m)$ (верно также $s(n+m) \leqslant s(n)+s(m)$, равенство достигается когда нет переноса разрядов).

2. Можно показать также, что $s(k^n) \to \infty$ при $n \to \infty$ если $k \neq 10^m$. Это следует из результатов Дж. Бейкера о диофантовых приближениях линейной комбинации логарифмов.

3. Можно построить число n со сколь угодно большой суммой цифр, такое, что $s(n^3) = s(n)^3$ и $s(n^2) = s(n)^2$. Если же $s(n^4) = s(n)^4$ то либо $n = 10^k$, либо $n = 10^k + 10^l$, $k \neq l$. Если $s(n^k) = s(n)^k$, $k \geqslant 5$, то $n = 10^k$.

4. См. также задачу О. Ф. Крыжановского, предложенную на отборе 1994 года команды Москвы (10 класс) на Всероссийскую олимпиаду:

Пусть $P(x)^2$ имеет все положительные коэффициенты. Может ли многочлен $P(x)$ иметь коэффициенты разного знака?

(*А. Я. Канель-Белов*)

12.4. Условие. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа, M — их среднее арифметическое, G — их среднее геометрическое. Докажите, что для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ выполняется неравенство:

$$1 + \rho < a_i/M < 1 + \rho',$$

где $\rho < 0$ и $\rho' > 0$ корни трансцендентного уравнения

$$(1+x)e^{-x} = (G/M)^n.$$

Решение. Выбрав подходящую нумерацию переменных, можно считать, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$. При этом достаточно проверить что $a_1/M > 1 + \rho$ и $a_n/M < 1 + \rho'$.

Неравенство $a_1/M > 1 + \rho$ достаточно установить для случая, когда $a_2 = a_3 = \cdots = a_n$. В самом деле, заменив каждую из величин $a_2, \ldots, a_n$ на их среднее арифметическое, мы не изменим M, но увеличим произведение $a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, а, следовательно, и G.

Аналогичным образом, неравенство $a_n/M < 1 + \rho'$ достаточно установить для случая, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1}$.

Итак, покажем неравенство $a_1/M > 1 + \rho$. В силу однородности можно считать, что $a_2 = \cdots = a_n = 1$. Тогда $M = 1 - (1 - a_1)/n$, $G = \sqrt[n]{a_1}$, $0 < a_1 < 1$.

Пусть $1 - \varepsilon = \dfrac{\sqrt[n]{a_1}}{1 - (1 - a_1)/n}$. Нужно оценить величину

$$\frac{a_1}{1 - (1 - a_1)/n} = a_1^{1-1/n}(1 - \varepsilon).$$

Легко проверить, что

$$(1 - \varepsilon)^n (1 - (1 - a_1)/n)^n = a_1.$$

Положим $x = a_1 - 1$. Тогда

$$(1 - \varepsilon)^n (1 + x/n)^n = 1 + x, \quad x < 0.$$

Если $-1 < x < 0$, то $e^x < (1 + x/n)^n$ (а если $x > 0$, то $e^x > (1 + x/n)^n$), так что $(1 - \varepsilon)^n (1 + x/n)^n > (1 - \varepsilon)^n e^{-x}$ и $(1 - \varepsilon)^n > (1 + x)e^{-x}$. Остаётся заметить, что при отрицательном x функция $(x + 1)e^{-x}$ монотонно возрастает, поэтому x больше отрицательного корня уравнения $(1 + z)e^{-z} = (1 - \varepsilon)^n$.

Аналогично доказывается второе неравенство. В этом случае получается формула

$$(1 - \varepsilon)^n (1 + x/n)^n = 1 + x, \quad x > 0.$$

Если $x > 0$, то $e^x > (1 + x/n)^n$. Остаётся заметить, что при положительном x функция $(x + 1)e^{-x}$ монотонно убывает, поэтому x меньше положительного корня уравнения $(1 + z)e^{-z} = (1 - \varepsilon)^n$. (*А. Я. Канель-Белов*)

13.1. Условие. Треугольник ABC может быть покрыт тремя единичными кругами с центрами в его вершинах. Соответствующие стороны треугольника $A'B'C'$ меньше соответствующих сторон треугольника ABC. Верно ли, что треугольник $A'B'C'$ обладает тем же свойством?

Решение. Ответ: не обязательно. Пусть стороны треугольника $\triangle ABC$ равны $2, 2, 4 + \varepsilon$, величина ε выбрана достаточно малой. Легко видеть, что $\triangle ABC$ покрывается тремя единичными кругами с центрами в его вершинах. Пусть стороны треугольника $\triangle A'B'C'$ равны $2 - \varepsilon, 2 - \varepsilon, 2 - \varepsilon$. Тогда при достаточно малом ε центр описанной окружности около $\triangle A'B'C'$ находится на расстоянии близком к $(\cos \pi/6)^{-1} = 2/\sqrt{3}$ относительно всех вершин $\triangle A'B'C'$ и все эти круги его не покроют.

Рассмотрев симплекс, у которого вершины находятся вблизи вершин $\triangle ABC$ и, кроме того, все вершины кроме двух близки между собой, можно получить аналогичные примеры для произвольной размерности $\geqslant 2$.

Несмотря на кажущуюся простоту этой задачи, многие дают неправильный ответ. (*А. Я. Канель-Белов*)

13.2. Условие. К чему стремится объем n-мерного шара радиуса 2008 при $n \to \infty$?

Решение. Ответ: этот объем стремится к нулю!

Этот факт вытекает из формулы для объёма n-мерного единичного шара. (Этой формуле посвящена заметка А. А. Заславского в данном выпуске, см. с. 270–271). Наша цель — показать, как это увидеть непосредственно.

Объем n-мерного шара радиуса R равен $B_n R^n$, где B_n — объем n-мерного шара единичного радиуса. Нам достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C > 0$, что $B_n < C\varepsilon^n$. В этом случае предел $\lim_{n\to\infty} B_n R^n = 0$ при любом R.

В свою очередь, для этого достаточно установить, что $B_n/B_{n-1} < \varepsilon$ при всех достаточно больших n. Легко видеть, что

$$B_n = \int_{-1}^{1} B_{n-1} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1} dx$$

или

$$B_n/B_{n-1} = \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1} dx.$$

Но

$$\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1} dx = \int_{-1}^{-\varepsilon/3} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1} dx + \int_{\varepsilon/3}^{1} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1} dx + \int_{-\varepsilon/3}^{\varepsilon/3} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{n-1} dx$$

Остаётся заметить, что первые два интеграла не превосходят

$$\left(\sqrt{1-(\varepsilon/3)^2}\right)^{n-1}$$

и, следовательно, стремятся к нулю при $n \to \infty$, а третий интеграл не превосходит $2\varepsilon/3$. (Мы пользуемся тем, что значение интеграла не превосходит произведения максимального значения функции на меру множества, по которому интегрируют). Задача решена. (*А. Я. Канель-Белов*)