О гиперболической геометрии и истории её признания

А. Пападопулос

В 2010 г. в серии “Heritage of European Mathematics”, издаваемой Европейским математическим обществом, опубликован английский перевод последней работы Н. И. Лобачевского «Пангеометрия»[1)] с обширными комментариями переводчика проф. А. Пападопулоса (Страсбург). С любезного разрешения автора и издателя мы публикуем выполненный Б. Р. Френкиным русский перевод помещённой в этом издании статьи А. Пападопулоса “On hyperbolic geometry and its reception”. Читатель узнает из неё много интересных подробностей об истории неевклидовой геометрии и её признания. В частности, автор приводит документированные свидетельства того, что и в начале XX в., когда неевклидова геометрия получила впечатляющие приложения в теории автоморфных функций и теории чисел, находились математики, отказывавшиеся её признавать. Это весьма поучительно как пример непризнания научной теории людьми, не понимающими её смысла (или даже не желающими его понять). Так, в наше время есть люди, не признающие теории относительности или эволюционной теории Дарвина.

Э.Б. Винберг

Создание неевклидовой геометрии можно считать важнейшим достижением геометрии девятнадцатого века.[2)]

Ниже я напомню некоторые факты, относящиеся к этому событию и его последствиям, уделив особое внимание тому, как воспринималась неевклидова геометрия в первые годы после смерти Лобачевского.

A. Papadopoulos. On hyperbolic geometry and its reception. В кн.: Nikolai I. Lobachevsky. Pangeometry. Ed. by A. Papadopoulos. (Н. И. Лобачевский. Пангеометрия. Под ред. А. Пападопулоса.) Herit. Eur. Math., Eur. Math. Soc., Zürich, 2010. P. 90–115. Перевод Б. Р. Френкина.

[1)] Русское издание «Пангеометрии» Н. И. Лобачевского, как и других его работ, см. в [2]. — Прим. перев.

[2)] Напомним суждение Давида Гильберта: «Обратимся к основам анализа и геометрии. Наиболее значительными и важными событиями последнего столетия в этой области являются, как мне кажется, арифметическое овладение понятием континуума в работах Коши, Больцано, Кантора и открытие *неевклидовой* геометрии Гауссом, Бойяи и Лобачевским.» [8, с. 23].

Как известно, путь к гиперболической геометрии был извилист, причём огромное количество энергии было потрачено на попытки доказать ошибочное утверждение, а именно что постулат Евклида о параллельных следует из других аксиом. Доказательство этого ложного утверждения было главной заботой многих первоклассных геометров в течение почти двадцати веков. Некоторые из этих геометров опубликовали свои «доказательства», а затем отвергли их, другие же от них не отказались. Многие примеры хорошо известны. Не столь известный пример относится к Эйлеру, попытавшемуся дать два «доказательства» постулата о параллельных. О них сообщает его доверенный ученик и родственник Николай Фусс. Тексты, написанные рукой Фусса, который был также помощником Эйлера и постоянным секретарём Санкт-Петербургской академии наук в течение многих лет, обнаружены в 1961 г. Они анализируются в книге Пона "L'Aventure des parallèles" («Приключения параллельных») [32, с. 281 – 282]. Первая попытка Эйлера основана на допущении, что геометрическое место точек, равноудалённых от данной прямой, есть прямая (точнее, объединение двух прямых), а вторая — на существовании подобных треугольников. Как известно, оба утверждения равносильны постулату Евклида о параллельных. Упомянем также эпизод с Лагранжем, который в конце жизни представил во Французскую академию наук мемуар с «доказательством» постулата о параллельных, но в последний момент прервал чтение и забрал рукопись со словами "Il faut que j'y songe encore" («Я должен подумать ещё»). Об этой истории сообщает Барбарен в "Géométrie non-Euclidienne" («Неевклидовой геометрии») [12, с. 15], а также Бонола в "Non-Euclidean Geometry" («Неевклидовой геометрии») [18, с. 52] со ссылкой на де Моргана. О том же событии подробнее говорит Пон в "l'Aventure des parallèles" [32, с. 231–234], где анализируется и рукопись Лагранжа.

Известно также, что все три создателя неевклидовой геометрии, а именно Лобачевский, Бойяи и Гаусс, в некоторый период своей жизни потратили несколько лет в попытках доказать постулат о параллельных.

П. Штэкель и Ф. Энгель в своей статье о Гауссе и Бойяи [33] цитируют отрывок из автобиографии Яноша Бойяи, где он говорит, что до 1820 года искал доказательство постулата о параллельных. А. Шатле в [20, с. 136] утверждает, что Я. Бойяи через несколько лет после того, как его знаменитая «Наука о пространстве»[3)] вышла из печати, вернулся к попыткам доказать постулат Евклида о параллельных и даже считал некоторое время, что ему удалось найти доказательство.

Что касается Гаусса, можно процитировать его письмо к Фаркашу Бойяи в 1799 г.:

[3)] Русский перевод: Я. Больаи. Аппендикс. Перевод В. Ф. Кагана [4, с. 71–100]. — Прим. перев.

> «Правда, я достиг многого, что для большинства могло бы сойти за доказательство [V постулата], но это не доказывает в моих глазах ровно *ничего*». [4)]

Дж. Б. Холстед, который перевёл «Науку о пространстве» Бойяи на английский, пишет (см. [18]) на с. IX своего предисловия к этому переводу, процитировав выдержки из переписки Гаусса:

> «Из этого письма мы ясно видим, что в 1799 г. Гаусс ещё пытался доказать, что евклидова система геометрии — единственная непротиворечивая и что именно эта система царит во внешнем пространстве нашего физического опыта. Первое ложно, второе никогда не удастся доказать.»

Розенфельд заключает из переписки Гаусса, что последний вплоть до 1816 г. всё ещё пытался доказать постулат о параллельных и лишь в 1817 г. пришёл к убеждению в недоказуемости этой аксиомы (см. [7, с. 197]).

Теперь обратимся к Лобачевскому.

Представляется, что во время обучения и по крайней мере до 1820 г. Лобачевский работал над доказательством постулата о параллельных (см. Энгель [21, с. 381]).

А. Васильев опубликовал в 1909 г. сборник учебных записей, сделанных студентом Казанского университета М. Темниковым на занятиях по геометрии, которые вёл Лобачевский в 1815–1816 и 1816–1817 учебных годах. Эти записи содержат принадлежащее Лобачевскому «доказательство» постулата о параллельных. Б. Л. Лаптев сообщает об этих же записях в своей «Теории параллельных прямых в ранних работах Н. И. Лобачевского» [6]. В 1951 г. Лаптев опубликовал издание этих записей со своими комментариями. «Доказательство» постулата о параллельных, принадлежащее Лобачевскому, анализируется также Поном в его “L’Aventure des parallèles” [32].

Момент, когда Лобачевский прекратил свои попытки доказать постулат о параллельных и начал работать над новой геометрией, в которой он не выполняется, — это важная дата, но, к сожалению, она известна лишь приблизительно. В [39] на с. 415 и в [38] на с. 472 Вуцинич пишет следующее: «Б. Л. Лаптев на основании нового документального материала показывает, что уже в 1822 г. Лобачевский убедился в тщетности всех попыток получить доказательство постулата о параллельных и что, скорее всего, к 1824 г. он был поглощён построением новой геометрии». Хоузел в [28] также цитирует Лаптева [6], согласно которому Лобачевский в 1823 г. прочёл курс геометрии, где заявил: «Строгого доказательства сей истины до сих пор не могли сыскать. Какие были даны, могут назваться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле

[4)] [7, с. 196]; в подлиннике см. [25, с. 159–160].

Математическими доказательствами».[5] Хоузел отсюда делает вывод, что в тот момент Лобачевский ещё работал над доказательством постулата Евклида о параллельных. Лаптев в своей книге 1976 г. [5] утверждает, однако, что Лобачевский уже в 1817 г. оставил все попытки вывести постулат о параллельных из других постулатов.

На заседании Физико-математического общества при Казанском университете в 1826 г. Лобачевский представил статью на французском языке, озаглавленную “Exposition succinte des principes de la géométrie, avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles” («Краткое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных»). В нашей книге[6] воспроизведён относящийся сюда документ. Статья не сохранилась, и хотя её заглавие побуждает заключить, что она содержит новое «доказательство» постулата о параллельных, обычно предполагают иное. Розенфельд в своей «Истории неевклидовой геометрии» [7, с. 191] высказывает мнение, что во второй половине заглавия Лобачевский скорее подразумевал «строгое доказательство» «начал обыкновенной геометрии».

Таким образом, эта история непроста. Но в любом случае есть основания считать, что примерно в 1822–1823 гг. Лобачевский по крайней мере допускал существование геометрии, в которой евклидов постулат о параллельных не выполнен, а остальные постулаты верны.

Рассказы — вроде приведённых выше — о первоклассных математиках, в том числе создателях гиперболической геометрии, пишущих «доказательства» постулата о параллельных, могут вызвать улыбку, но в истории неевклидовой геометрии есть и невесёлая сторона. Она состоит в том, что для признания первых результатов, определивших основы теории, потребовался невероятно долгий срок, а их авторам пришлось испытать гораздо больше печали, чем радости. Три создателя теории, а именно Гаусс, Бойяи и Лобачевский, так и не получили при жизни должного признания за свои работы в этой области (а они прожили довольно долго после того, как сделали свои открытия). Разумеется, Гаусс был велик и при жизни обычно считался самым знаменитым из математиков того времени. Но неевклидова геометрия не могла ничего добавить к его славе, и в его первых биографиях работа в области гиперболической геометрии едва упоминается. По существу Гаусс никогда и не стремился к признанию своих результатов по гиперболической геометрии, и главная причина (по крайней мере, именно её он указывал в переписке с некоторыми своими друзьями) заключалась просто в том, что он хотел избежать полемики. Бойяи практически

---

[5] [6, с. 203]. Источники цитаты: Н. И. Лобачевский. Геометрия. Казань, 1909; [2, т. II, с. 3–134]. — Прим. перев.

[6] См. сноску в начале статьи. — Прим. перев.

перестал публиковаться как математик — с горьким чувством, что Гаусс украл его работу, — сразу после того, как работа Бойяи по неевклидовой геометрии появилась в виде 28-страничного приложения к работе его отца “Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici” («Опыт введения учащегося юношества в начала чистой математики, элементарной и высшей, приспособленным для этого наглядным методом»). Он оставил несколько тысяч страниц рукописных заметок, которые были обнаружены и изучены после его смерти. Они содержат результаты (новые для своего времени) в самых разных областях, включая теорию чисел, аксиоматизацию математики и применение комплексных чисел в геометрии. Бойяи ныне считается гением. Но это признание стало посмертным. Точно так же и жизнь Лобачевского была трудной, а полное признание его достижений пришло лишь через несколько лет после его смерти.

Мемуар Лобачевского «О началах геометрии», который он представил на рецензию в Санкт-Петербургскую академию наук в 1832 г., получил отрицательный отзыв М. В. Остроградского, влиятельного члена академии. Жизнь Остроградского очень отличалась от жизни Лобачевского. Он был избран действительным членом Санкт-Петербургской академии наук в 1831 г. в возрасте 30 лет. До этого он уже получил известность в возрасте 24 лет, когда Коши высоко оценил его работу в своём “Mémoire sur les Intégrales définies, prises entre des limites imaginaires” («Мемуар об определённых интегралах, взятых между мнимыми пределами»), Paris, 1825.[7)]

> «Указав на то, что из двух определённых интегралов, на вычисление которых при помощи своего нового метода претендует г. Лобачевский, один уже известен и легко выводится при помощи интегрального исчисления, а другой неверен,[8)]

[7)]На с. 2 этого мемуара Коши пишет: «Молодой русский, наделённый большой проницательностью и весьма искусный в анализе бесконечно малых — г. Остроградский, — занимающийся также применением этих интегралов и их преобразованием в обыкновенные интегралы, дал новое доказательство формул, которые я напомнил выше, и обобщил другие формулы, которые я привёл в девятнадцатой тетради Journal de l’Ecole Royale Polytechnique». Читая мемуар Лобачевского, Остроградский, который был специалистом по интегральному исчислению, не обратил внимания на геометрическое содержание статьи и в своей оценке учёл лишь два определённых интеграла, вычисленных Лобачевским. В «Истории неевклидовой геометрии» Розенфельда ([7, с. 191]) мы находим следующее изложение рецензии Остроградского, извлечённое из архивов Санкт-Петербургской академии:

[8)]Как отмечает Б. А. Розенфельд ([7, с. 192]), это «интеграл, зависящий от параметра, при различных значениях которого он принимает различные значения». Видимо, этим и объясняется замечание Остроградского. — Прим. перев.

> г-н Остроградский замечает, кроме того, что работа выполнена с таким малым старанием, что большая часть её непонятна. Поэтому он полагает, что этот труд г-на Лобачевского не заслуживает внимания Академии».

Вуцинич в [39, с. 314] пишет, что после этой рецензии Остроградский и в дальнейшем продолжал жёстко критиковать эту работу Лобачевского.

После отрицательной рецензии Остроградского работа Лобачевского была опубликована в местном журнале «Казанский вестник» [3] и оставалась незамеченной в течение ряда лет. Розенфельд сообщает в [7, с. 201] о единственном русском математике — это был профессор Казанского университета П. И. Котельников, — который осознал значение работ Лобачевского и воздал ему должное при жизни. Розенфельд приводит следующую выдержку из актовой речи под названием «О предубеждении против математики», произнесённой Котельниковым в Казанском университете в 1842 г.:

> «При этом случае не могу умолчать о том, что тысячелетние тщетные попытки доказать со всей математической строгостью одну из основных теорем геометрии, равенство суммы углов в прямолинейном треугольнике двум прямым, побудили достопочтенного заслуженного профессора нашего университета г-на Лобачевского предпринять изумительный труд построить целую науку, геометрию, на новом предположении: сумма углов в прямолинейном треугольнике меньше двух прямых — труд, который рано или поздно найдёт своих ценителей.»

Поддержка Котельниковым Лобачевского — это, действительно, «исключение, которое подтверждает правило».

Э. Б. Винберг пишет в своей заметке о Лобачевском [37], что геометрические работы Лобачевского подвергались осмеянию и воспринимались как странности уважаемого профессора и ректора университета.

Тем не менее Лобачевский продолжал работать и публиковаться по вопросам геометрии. По мнению В. Ф. Кагана, огромная преподавательская нагрузка и полная погружённость в административные дела, вероятно, предохранили Лобачевского от глубокой духовной депрессии, случившейся с Я. Бойяи и Ф. А. Тауринусом[9] скорее всего потому, что их работы по неевклидовой геометрии не нашли признания при их жизни.

После враждебности, пренебрежения и даже насмешек, с которыми его математические работы были восприняты в России, Лобачевский решил писать статьи по-французски и по-немецки и послал свои рукописи в

[9] Франц-Адольф Тауринус (1794–1874) — немецкий математик. В 1825 и 1826 гг. опубликовал две работы, содержавшие элементы неевклидовой геометрии.

западноевропейские журналы, ища признания на Западе. Довольно странно, что эти работы оставались незамеченными в течение нескольких лет после публикации. Было, однако, одно важное исключение: Гаусс заметил статью Лобачевского, опубликованную по-немецки, и впечатление было столь сильно, что он решил прочитать работы Лобачевского, написанные по-русски.[10)]

Теперь посмотрим, как развивались события спустя десяток лет после смерти Лобачевского.

Публикация в период 1860–1865 гг. переписки Гаусса с Шумахером, бесспорно, стала первым важным фактором, который привлёк внимание мирового математического сообщества к работам Лобачевского или по крайней мере к его имени.

В 1865 г. А. Кэли опубликовал "Note on Lobatchewsky's imaginary geometry" («Заметку о воображаемой геометрии Лобачевского») [19], где он рассматривает тригонометрические формулы Лобачевского, используемые в гиперболической геометрии, и проводит сравнение между этими формулами и тригонометрическими формулами сферической геометрии. Хотя, как обычно считают, Кэли не понял главных идей Лобачевского, заметка показывает, что работы Лобачевского уже становились известны математическому сообществу.

В 1872 г. В. В. Буняковский (1804–1889), член Санкт-Петербургской академии наук, написал статью по-французски, озаглавленную "Considérations sur quelques singularités qui se présentent dans les constructions de la géométrie non euclidienne" («Замечания о некоторых особенностях, присущих построениям неевклидовой геометрии»), в которой, как он утверждал, установлено противоречие между геометрией Лобачевского и наглядными представлениями о пространстве. Как сформулировал Розенфельд в [7, с. 192], хотя в статье Буняковского содержится критика работ Лобачевского, её отличие от прежних отзывов, написанных Остроградским и его учениками, состоит в том, что Буняковский с уважением говорит о таланте Лобачевского.

[10)]См. письмо Гаусса к Й. Ф. Энке в феврале 1841 г., опубликованное в его собрании сочинений [25, том 8, с.232]. Русский перевод [4, с. 117]: «Я начинаю довольно успешно читать по-русски и нахожу в этом большое удовольствие. Г. Кнорре прислал мне небольшой мемуар Лобачевского (в Казани), написанный по-русски, и как этот мемуар, так и небольшая книжка о параллельных линиях на немецком языке (о ней появилась весьма нелепая заметка в "Repertorium'e" Герсдорфа) возбудили во мне желание узнать больше об этом остроумном математике.» Вуцинич в своей книге "Science in Russian Culture" («Наука в русской культуре») [39] на с. 309 упоминает, что Гаусс выучил русский, читая книгу Буняковского «Основания математической теории вероятностей», «очень хорошо написанную работу». Г. Уолдо Даннингтон [40] утверждает, что причиной, по которой Гаусс изучал русский язык, было его желание прочитать работу Лобачевского по неевклидовой геометрии в подлиннике.

Полное признание работ Лобачевского и открытой им неевклидовой геометрии пришло в статье Дж. Баттальини “Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky” («О воображаемой геометрии Лобачевского») [13] (1867), в известной статье Э. Бельтрами “Saggio di Interpretazione della geometria non-Euclidea” («Опыт интерпретации неевклидовой геометрии») [14] (1868) и в работе Ф. Клейна “Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie” («О так называемой неевклидовой геометрии») [29] (1871). На статью Бельтрами обычно ссылаются в связи с тем, что в ней установлена непротиворечивость неевклидовой геометрии относительно евклидовой. Уэль перевёл её на французский, и в том же году она была опубликована в журнале “Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure”. Клейн узнал о работах Лобачевского на семинаре Вейерштрасса в Берлинском университете в 1870 г.

Во введении к статье Бельтрами “Saggio di Interpretazione della geometria non-Euclidea” автор пишет, объясняя её цель (цит. по [4, с. 180–181]):

> «Мы старались, насколько позволяли наши силы, дать себе отчёт о результатах, к которым приводит учение Лобачевского, и затем, следуя приёму, вполне, по нашему мнению, согласному с хорошими традициями научного исследования, мы попытались отыскать реальное основание для этого учения, прежде чем признать для него[11)] необходимость нового порядка вещей и идей. Думаем, что это удалось нам для планиметрической части этого учения, но нам кажется невозможным сделать то же для остальной части.»

Во французском переводе статьи Баттальини, принадлежащем Уэлю (и одобренном Бельтрами), сказанное в последней цитированной фразе уточнено; в нём говорится следующее:

> «Считаем, что достигли нашей цели в отношении планиметрической части, однако нам представляется невозможным достичь её в случае трёх измерений.»

На следующий год Бельтрами опубликовал другую статью на ту же тему под заглавием “Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante” («Основы теории пространств постоянной кривизны») [16]. Там он пишет (цит. по [4, с. 360]):

> «Можно убедиться в том, что теория Лобачевского совпадает, за исключением терминов, с геометрией пространства трёх измерений постоянной отрицательной кривизны.»

[11)] Здесь исправлена имевшаяся в переводе неточность, за что мы благодарны А. Пападопулосу и его коллегам. — Прим. перев.

Б. Риман в своей вступительной лекции 1854 г. «О гипотезах, лежащих в основании геометрии»,[12] где он подробно рассматривает три вида геометрий на поверхностях постоянной кривизны, ни разу не упоминает имени Лобачевского, хотя его наставник Гаусс знал о работах Лобачевского. Это может выглядеть удивительным, особенно если заметить, что Риман упоминает Лежандра и его безуспешные попытки доказать евклидов постулат о параллельных в качестве примера «мрака», по его выражению, которым геометрия была окутана со времён Евклида. Но тут следует вспомнить, что отождествление неевклидовой плоскости Лобачевского с поверхностью постоянной отрицательной кривизны было проведено лишь позже, а именно в работах Бельтрами [16] и Клейна [29], упомянутых выше. Лекция Римана была опубликована лишь в 1868 г., после его смерти.

Упомянем также в нашем рассказе статью Бельтрами "Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche" («О поверхностях вращения, которые служат образцом всех псевдосферических поверхностей») [15], в которой автор описывает так называемую *псевдосферу* — поверхность отрицательной постоянной кривизны, которая локально моделирует геометрию Лобачевского. Псевдосфера является поверхностью вращения в евклидовом трёхмерном пространстве, меридианом которой служит трактриса. Локальное поведение геодезических на псевдосфере, как установил Бельтрами, таково же, как у прямых на кусочке гиперболической плоскости. Это открытие было очень важным шагом в истории неевклидовой геометрии, поскольку доставило первый конкретный пример поверхности, которая вкладывается в евклидово пространство и локально изометрична гиперболической плоскости. Её универсальным накрытием является оридиск (поверхность, ограниченная орициклом) на гиперболической плоскости, и он не изометричен гиперболической плоскости. Вопрос существования поверхности в евклидовом пространстве, внутренняя геометрия которой такая же, как у гиперболической плоскости в целом, оставался открытым ряд лет и был в 1901 г., т. е. уже после смерти Бельтрами, окончательно решён Давидом Гильбертом, который показал, что не существует аналитической поверхности без особенностей, которая вкладывается в евклидово трёхмерное пространство и имеет такую же внутреннюю геометрию, как гиперболическая плоскость.[13]

Что касается дальнейшего развития неевклидовой геометрии, следу-

[12] Рус. перевод: В. Л. Гончаров [4, с. 309–341]. — Прим. перев.

[13] Необязательность условия аналитичности вскоре была показана Г. Люткемейером в его гёттингенской диссертации "Über den analytischen Charakter der Integrale von partiellen Differentialgleichungen" (1902). В действительности не существует C^2-дифференцируемого вложения гиперболической плоскости в R^3. Н. Кайпер показал в 1955 г., что существует C^1-вложение гиперболической плоскости в R^3. Отметим также, что

ет отметить другую работу, видимо не привлёкшую должного внимания. Она принадлежит Жозефу-Мари де Тилли (1834–1906), члену Королевской академии Бельгии и одновременно армейскому генералу. Де Тилли ввёл понятие расстояния как исходное в трёх геометриях: гиперболической, евклидовой и сферической. Он развивал аксиоматический подход к этим геометриям, основанный на метрических понятиях, — см., например, его "Essai sur les Principes Fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique" («Очерк основных принципов геометрии и механики») [34] и "Essai de Géométrie analytique" («Очерк общей аналитической геометрии») [35].

Важно также отметить, что после первого периода увлечения гиперболической геометрией (около 1870 г.) сложилось мнение, что некоторые прежние попытки доказать постулат Евклида о параллельных (авторами их были, например, Валлис, Саккери, Ламберт, Лежандр) содержат ценные математические результаты. Несколько таких попыток строилось от противного, т. е. их авторы искали противоречие в следствиях из отрицания постулата Евклида о параллельных. Позже обнаружилось, что некоторые из этих следствий, найденных предшественниками гиперболической геометрии, вошли в число результатов, доказанных Лобачевским, Бойяи и Гауссом. Например, Бельтрами написал статью "Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewski" («Итальянский предшественник Лежандра и Лобачевского») [17], которая реабилитировала "Euclides ab omni naevo vindicatus" («Евклид, очищённый от всех пятен») Саккери и включала выдержки из этой книги, содержащие различные теоремы, авторами которых ранее считались Лежандр, Лобачевский и Бойяи. В 1887 г. Джино Лориа опубликовал статью, озаглавленную "Il passato e il presente delle principali teorie geometriche" («Прошлое и настоящее основных геометрических теорий») [30], которая была опубликована по-немецки в 1888 г. в переводе Ф. Шутте. Лориа в итоге расширил свою статью до 476-страничной книги с тем же названием, содержащей обзор развития геометрии с древности до первых лет двадцатого века. Большое значение имели также компилятивные труды Энгеля и Штэккеля "Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss" («Теория параллельных прямых от Евклида до Гаусса») [22] и Бонолы "Geometria non-euclidea, Esposizione storico-critica del suo sviluppo" («Неевклидова геометрия. Историко-критический обзор её развития») [18].

Несмотря на весь прогресс, описанный выше и продолжавшийся до конца девятнадцатого века, неевклидова геометрия всё ещё оставалась сомнительной областью. Некоторые геометры не понимали её основных

существуют C^∞-вложения гиперболической плоскости в R^5 (этот результат получил Д. Блануча также в 1955 г.).

идей, а другие подвергали сомнению основания теории. Например, некоторым математикам трудно было воспринять тот факт, что площадь треугольника ограничена, а также что существуют треугольники с произвольно малой суммой углов, прямые без общих точек, не имеющие общего перпендикуляра, и так далее. Типичный математик рассматривал гиперболическую геометрию просто как логический курьёз, но были у неё и суровые противники. Приведём несколько примеров.

Ж. Барбарен в своей статье “La correspondance entre Houël et de Tilly” («Переписка между Уэлем и Тилли») [11, с. 50–61,] сообщает, что около 1870 г. Французская академия наук была буквально затоплена попытками доказать евклидов постулат и эти попытки были столь многочисленны, что для их рассмотрения академия учредила специальную “Commission des parallèles” («Комиссию по параллельным»). Вскоре в академии произошёл открытый конфликт между сторонниками и противниками неевклидовой геометрии, и после этого конфликта все обращения в академию по этому вопросу систематически возвращались их авторам [41]. Прошло несколько лет, прежде чем конфликт закончился. В своей книге “La science et l’hypothèse” («Наука и гипотеза») Пуанкаре отмечает, что во времена написания книги (1902 г.) Французская академия получала «не более» одного-двух новых доказательств [постулата о параллельных] в год ([9, с. 39]).

Дискуссия между сторонниками и противниками неевклидовой геометрии имела ответвления в физике, использовались также этические и философские аргументы. Мораль была поколеблена, поскольку принципы, веками считавшиеся неопровержимыми (это были математические принципы!), объявлялись устаревшими.

Математик Жюль Андраде рассказывает в статье, опубликованной в 1900 г. в “l’Enceignement mathématique” [10], что на одном важном собрании (о котором он не сообщает подробнее) он слышал следующее утверждение:

> «Сама мораль заинтересована в доказательстве евклидова постулата, так как если достоверность покидает даже математиков, то, увы, что станется с моральными ценностями!»

Приведём также отрывок из романа Достоевского «Братья Карамазовы» (1880 г.), где существование неевклидовой геометрии ставит теологические проблемы:

> (Иван говорит своему брату Алёше [1, с. 363]) «...Объявляю, что принимаю Бога прямо и просто. Но вот, однако, что надо отметить: если Бог есть и если Он действительно создал землю, то, как нам совершенно известно, создал Он её по эвклидовой геометрии, а ум человеческий с понятием лишь о трёх измерениях пространства. Между тем находились и находятся

> даже и теперь геометры и философы и даже из замечательнейших, которые сомневаются в том, чтобы вся вселенная, или ещё обширнее, — всё бытие было создано лишь по эвклидовой геометрии, осмеливаются даже мечтать, что две параллельные линии, которые по Эвклиду ни за что не могут сойтись на земле, может быть, и сошлись бы где-нибудь в бесконечности. Я, голубчик, решил так, что если я даже этого не могу понять, то где ж мне про Бога понять. Я смиренно сознаюсь, что у меня нет никаких способностей разрешать такие вопросы, у меня ум эвклидовский, земной, а потому где нам решать о том, что́ не от мира сего.»

Когда же закончился конфликт между сторонниками и противниками неевклидовой геометрии? Ответ не вполне ясен. В своей биографической заметке 1895 г. о Лобачевском [27] Дж. Б. Холстед пишет следующее:

> «День испытания [неевклидовой геометрии] благополучно прошёл, и можно с бо́льшим успехом искать квадратуру круга и изобретать вечный двигатель, чем делать малейшие возражения против неевклидовой геометрии.»

К этому утверждению надо относиться с осторожностью, поскольку в то время, когда Холстед писал это, ещё существовали яростные противники гиперболической геометрии.

В первых пяти томах журнала “American Mathematical Monthly” (основан в 1894 г.) Холстед частями публиковал статью, озаглавленную “Non-Euclidean geometry: Historical and expository”. («Неевклидова геометрия: история и обзор»). Статья в основном состоит из его перевода книги Саккери “Euclides ab omni naevo vindicatus”. Эти же выпуски содержат несколько статей, цель которых — указать противоречия в неевклидовой геометрии. Например, в томе 1 (1894 г.) этого журнала, в короткой заметке под названием “Easy corollaries in non-Euclidean geometry” («Простые следствия неевклидовой геометрии») [26] Холстед писал, что «в геометрии Лобачевского возможен треугольник, сумма углов которого отличается от развёрнутого угла меньше чем на любой данный сколь угодно малый угол». В более позднем выпуске в том же году (с. 247–248) Дж. Н. Лайл опубликовал заметку, которая начинается с фразы Холстеда в качестве предположения, а далее автор рассуждает на дюжине строк и завершает следующими словами: «Поскольку заключение абсурдно, предположение, из которого оно выведено, также должно быть абсурдно». Тот же автор в другой статье того же тома (с. 426–427) пишет, что «Лобачевский в своей „Теории параллельных“ делает выводы из ложных посылок с таким правдоподобием и утончённой софистикой, что склоняет многих принять и посылки, и выводы в качестве серьёзной геометрии».

Легко привести другие выдержки такого рода из статей противников неевклидовой геометрии, опубликованных в серьёзных математических журналах. Такая ситуация сохранялась до конца первого десятилетия двадцатого века.

Мишель Фролов, математик и одновременно генерал французской армии, автор книги "La théorie des paralléles démontrée rigoureusement, Essai sur le livre I des éléments d'Euclide" («Теория параллельных в строгом изложении, очерк книги I „Начал" Евклида»), (Базель, 1893 г.; второе издание, 1899 г.) написал несколько статей против сторонников неевклидовой геометрии в журнале "l'Enseignement Matheématique". Приведу здесь большую выдержку из одной такой статьи, поскольку она вполне даёт представление о том, как значительная часть математиков относилась к гиперболической геометрии в начале двадцатого века.

> «Неевклидова геометрия, созданная Гауссом и его коллегами Лобачевским и Бойяи и, согласно известному математику М. Ж. Бертрану, тридцать лет назад не имевшая всерьёз убеждённых последователей, в наши дни весьма в моде. Среди её сторонников можно найти членов Академий наук, преподавателей университетов и колледжей. Она применяется для интегрирования дифференциальных уравнений; существует также надежда решить с её помощью проблему трёх тел. Её последователями с целью развития и пропаганды этого воззрения опубликованы сотни статей, самая характерная черта которых — полнейшая путаница между прямыми и кривыми линиями,[14] вследствие чего полностью исчезает понятие прямой линии, без которого изучение Геометрии становится призрачным. Это всё равно что учиться музыке, не имея ушей. Но это не всё: создаётся геометрия существ без ширины и обитателей пустых сфер.[15] Представляются диссертации по этой теории. Присуждаются поощрительные премии и почётные звания за работы по усовершенствованию этой теории.[16] Наконец, ей придают *большое философское значение, поскольку, согласно её последователям, показав несостоятельность кантовских представлений*

[14]Замечание Фролова в некотором смысле оправданно, но такова участь гиперболической геометрии; изображая гиперболические прямые на (евклидовом) листе бумаги, мы чертим их как кривые линии, так как иначе либо расстояние между ними постоянно, либо эти прямые выглядят пересекающимися.

[15]Здесь имеются в виду известные слова Пуанкаре из его статьи "Les géométries non euclidiennes" («Неевклидовы геометрии») [31], повторенные в книге "La science et l'hypothèse" («Наука и гипотеза») [9, с. 40].

[16]Вероятно, имеются в виду премия Лобачевского и три сопровождающих её «похвальных отзыва», учреждённые в 1897 г.

> *о пространстве, эта теория до основания разрушила критическую метафизику* (цитата из книги P. Mansion “Métagéometrie” («Метагеометрия»), Mathesis, октябрь 1896 г., с. 41).
>
> Налицо весьма тревожные симптомы, заставляющие опасаться, что эта теория не замедлит завоевать место в преподавании, так же как она уже проникла в некоторые трактаты по геометрии. Что проку утверждать, что нео-геометры не имеют другой цели, кроме тренировки в анализе различных гипотез. Представляется, что гипотезы в математике никогда не следует признавать и что специализированные журналы, посвящённые преподаванию математики, должны не откладывая обратиться к важному вопросу, который можно выразить в очевидной альтернативе: верна или ложна неевклидова геометрия?
>
> [. . .] Неевклидова геометрия — лишь гипотетическое воззрение, основанное на отрицании аксиомы XI или постулата Евклида, который более двадцати веков обоснованно считался очевидной истиной, подтверждённой всеми физическими фактами. Эта гипотеза, которую ничто не подтверждает, немедленно привела к цепи сплошных парадоксов, которые, как казалось их открывателям, не содержат противоречия. Они думали, что создали чудесную теорию, призванную изменить лицо Математики и пролить на неё потоки обильного света.
>
> Её приверженцы тут же постарались сделать её неуязвимой, находя всё новые доказательства недоказуемости евклидова постулата. Напротив, профессиональные математики ничего не сделали, чтобы защитить Геометрию Евклида и Архимеда от вторжения этой разрушительной доктрины, которая переворачивает все геометрические факты физического мира.»

Статья, откуда взяты все эти цитаты, опубликована в томе 2 (1900 г.) журнала “l’Enseignement mathématique” [24]. Отметим, что журнал, основанный незадолго до того (в 1899 г.), имел престижный список учредителей, включавший таких математиков, как Аппель, Кремона, Клейн, Миттаг-Леффлер, Пикар и Пуанкаре. В этом журнале имеются и другие статьи того же автора, в которых он приводит то, что называет «противоречиями» в неевклидовой геометрии. Ответы других математиков на эти статьи публиковались в течение первого десятилетия двадцатого века в “l’Enseignement mathématique” и других журналах. В томе 4 (1902) “l’Enseignement mathématique”, с. 330, имеется следующий комментарий редакции:

> «Напоминаем нашим читателям, что “l’Enseignement mathématique” находится в распоряжении сторонников как евклидовой, так и неевклидовой геометрии. Не беря сторону тех или

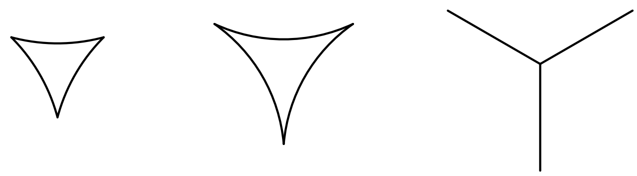

Рис. 1. Здесь изображена фигура из письма Гаусса Шумахеру. Это треножник, возникающий (по Гауссу) как предел гиперболических треугольников

> других, наш журнал является трибуной, открытой для всех математиков.»

Обосновывая своё утверждение, что в неевклидовой геометрии царит путаница, Фролов привёл следующий интересный пример. Он основан на письме Гаусса Шумахеру от 12 июля 1831 г.,[17] в котором Гаусс утверждает, что если мы берём равносторонний треугольник с центром O на гиперболической плоскости и одновременно устремляем три вершины этого треугольника к бесконечно удалённым точкам a, b и c, то мы получим в качестве предельной фигуры бесконечный треножник, образованный лучами Oa, Ob, Oc (см. рис. 1). Фролов пишет по этому поводу:

> «Последователи Гаусса, более смелые, если не более разумные, чем он, объяснили, что мэтр заблуждался и что равносторонний треугольник в пределе переходит не в свои биссектрисы, а в три прямые QR, ST, UV,[18] являющиеся взаимными асимптотами. Эта поправка была необходима, поскольку было странно, что стороны треугольника ломаются. Но такое объяснение предполагает тайную силу, которая вдруг отделяет стороны треугольника друг от друга, так как хотя легко вообразить непересекающиеся прямые, но трудно понять, что помешает соединить между собой три точки a, b, c, взятые на биссектрисах треугольника сколь угодно далеко от центра O. Концепция Гаусса представляется более ясной, чем у его последователей. Но вместо того, чтобы распутывать это бессмысленное недоразумение, лучше было бы признать, что при увеличении треугольника его углы не меняются и их сумма остаётся постоянной, что означает отвергнуть гипотезу и принять постулат Евклида.»

[17] [25, с. 216].

[18] Эти прямые образуют фигуру, ныне называемую *идеальным треугольником*.

Следует признать, что, строго говоря, Фролов прав, указывая на то, что можно считать ошибкой Гаусса: предел треугольников, при обычном понимании слова «предел», не есть треножник. Но современный геометр заметит, что интуиция Гаусса в данном случае хорошо вписывается в контекст *«грубой геометрии»* (coarse geometry), которая развивалась М. Громовым в течение последних двух десятилетий двадцатого века.

Затем Фролов объясняет, что́ именно он считает противоречиями в работах Лобачевского, и после этой и других подобных атак на неевклидову геометрию заключает свою статью следующими словами:

> «Мы вправе пожелать, чтобы эта парадоксальная и противоречивая теория не проникла в преподавание, где она может испортить ум учащихся.»

Математик К. Видаль следующим образом завершает статью, также появившуюся в “l'Enseignement mathématique” (1902 г.) [36]:

> «Из всех предыдущих обсуждений, как нам кажется, следует по меньшей мере вынести впечатление, что неевклидова теория не столь прочна, как предпочитают говорить. И, возможно, недалёк день, когда её приверженцы не осмелятся более имитировать перед лицом своих оппонентов уверенность и дух примирения, всегда не лишённые некоторой иронии. С другой стороны, понятно, что некоторым геометрам, обманутым искусными софизмами и глубоко вовлечённым в неевклидову авантюру, трудно отказаться от своих заблуждений. Но, хотят они или нет, они будут, как мы полагаем, побеждены логикой.»

В обзоре по аксиоме о параллельных, опубликованном в Mathematical Gazette в 1913 г. [23], У. Б. Фрэнкленд пишет:

> «Теперь я хочу перейти к последней половине восемнадцатого века, когда Бертран из Женевы доказал аксиому о параллельных полностью и окончательно.»[19)]

И далее в той же статье:

> «Это действительное доказательство, как представляется мне после более чем десятилетних размышлений, [...] исключает гипотезу Лобачевского.»

Всё это показывает, что хотя сегодня для нас гиперболическая геометрия не только столь же естественна, как евклидова, но и является источником самых актуальных и перспективных тем исследований, её рождение было, вероятно, самым трудным среди математических теорий, а процесс её признания — чрезвычайно длительным.

[19)] Автор имеет в виду швейцарского математика Луи Бертрана (1731–1812), ученика Эйлера, который также опубликовал «доказательство» постулата о параллельных.

Добавим, что во всей этой истории есть нечто парадоксальное. С одной стороны, абсолютное господство евклидовой геометрии закончилось с открытиями Лобачевского, Бойяи и Гаусса. Но, с другой стороны, эти три автора показали, что Евклид был прав, рассматривая постулат о параллельных как постулат, а не как теорему, и в этом смысле их работы подтвердили точку зрения Евклида, остававшуюся спорной в течение двух тысячелетий.

Список литературы

[1] Ф. М. Достоевский. *Собрание сочинений в девяти томах*. М.: АСТ, 2006. Том седьмой. Братья Карамазовы, части I-III.

[2] Н. И. Лобачевский. *Полное собрание сочинений*. Под общей редакцией В. Ф. Кагана, А. П. Котельникова, А. П. Нордена, В. В. Степанова, Н. Г. Чеботарёва, П. А. Широкова. М.-Л.:ГИТТЛ, 1946–1951.

[3] Н. И. Лобачевский. *О началах геометрии* // Казанский вестник. Вып. 25: февраль-март 1829, с. 178–187; апрель 1829, с. 228–241. Вып. 27: ноябрь-декабрь 1829, с. 227–243. Вып. 28: март-апрель 1830, с. 251–283; июль-август 1830, с. 571–683. Англ. перевод: F. Engel [21, с. 1–66].

[4] *Об основаниях геометрии*. Под ред. А. П. Нордена. М.: ГИТТЛ, 1956.

[5] Б. Л. Лаптев. *Геометрия Лобачевского, её история и значение*. М.: Знание, 1976.

[6] Б. Л. Лаптев. *Теория параллельных прямых в ранних работах Н. И. Лобачевского* // Историко-математические исследования. Т. 4, 1951. С. 201–229.

[7] Б. А. Розенфельд. *История неевклидовой геометрии*. М.: Наука, 1976.

[8] *Проблемы Гильберта*. М.: Наука, 1969.

[9] А. Пуанкаре. *Наука и гипотеза*. В кн.: А. Пуанкаре. О науке. М.: Наука, 1990. Первоначальное издание: H. Poincaré, La science et l'Hypothèse, Paris, 1902.

[10] J. Andrade. *Euclidien et non-euclidien*// L'Enseignement mathématique. Vol. 2, 1900. P. 298–300.

[11] P. Barbarin. *La correspondance entre Hoüel et de Tilly* // Bulletin des Sciences Mathématiques. Tome L, 1926. P. 50–61.

[12] P. Barbarin. *La Géométrie non Euclidienne* (suivie de Notes Sur la Géométrie non Euclidienne dans ses Rapports avec la Physique Mathématique par A. Buhl). Paris: Gauthier-Villars, третье издание, 1928. (Первое издание 1902, репринт третьего издания: Paris: Jacques Gabay, 1990.)

[13] G. Battaglini. *Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky* // Giornale di Matematiche. Anno V, 1867. P. 217–231.

[14] E. Beltrami. *Saggio di Interpretazione della geometria non-Euclidea* // Giornale di Matematiche. Vol. VI, 1868; Beltrami's Works. Vol. I. P. 374–405. Французский перевод: G.J. Hoüel // Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. Sér. 1. Tome VI, 1869. P. 251–288. Английский перевод: J. Stillwell. Sources of Hyperbolic geometry. History of Mathematics, Vol. 10, AMS-LMS, 1996. Русский перевод: П. П. Мей [4, с. 180–212].

[15] E. Beltrami. *Sulla superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudosferiche* // Giornale di matematiche Vol. 10, 1872. P. 147–159; Beltrami's Works. Vol. II. P. 394–409.

[16] E. Beltrami. *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante* // Annali di matematica pura et applicata. Serie II. Tomo II, 1868-69. P. 232–255; Beltrami's Works Vol. I. P. 406–429. Французский перевод: G.J. Hoüel // Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure. Sér. 1. Tome VI, 1869. P. 347–375. Английский перевод: J. Stillwell. Sources of Hyperbolic geometry, History of Mathematics Vol. 10, AMS-LMS, 1996. Русский перевод: П. П. Мей [4, с. 342–365].

[17] E. Beltrami. *Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewski* // Atti della Reale Accademia dei Lincei Roma. V. 5 (4), 1889. P. 441–448.

[18] R. Bonola. *La geometria non-euclidea, Esposizione storico-critica del suo sviluppo*. Первое издание, Ditta Nicola Zanchinelli editore, Bologna, 1906. Немецкий перевод: M. Liebmann. В серии Wissenschaft und Hypothese, Teubner, Leipzig, 1908. Англ. перевод: H. S. Carslaw. Non-Euclidean Geometry, A critical and historical study of its development. First edition, 1912. Reprinted by Dover, 1955.

[19] A. Cayley. *Note on Lobatchewsky's imaginary geometry* // Phil. Mag. London. Vol. 29, 1865. P. 231–233. Coll. Papers, V, No. 326. P. 471–472.

[20] A. Châtelet. *Reviews on hyperbolic geometry* // Bulletin des Sciences Mathématiques. 2e série, tome XXXVII, 1913. P. 134–144.

[21] F. Engel. *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, Zwei Geometrische Abhandlungen aus dem Russischen Übersetzt mit Ammerkungen und mit einer Biographie des Verfassers*. Leipzig, Teubner, Leipzig, 1898.

[22] F. Engel, P. Stäckel. *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*. Leipzig, B. G. Teubner, 1895.

[23] W. B. Frankland. *Notes on the Parallell-Axiom* // Mathematical Gazette. Vol. 7, 1913. P. 136–139.

[24] M. Frolov. *Considérations sur la géométrie non-Euclidienne* // L'Enseignement Mathématique. Volume 2, 1900. P. 179–187.

[25] C. F. Gauss. *Collected Works*. Vol. VIII. Königliche Gesellshaft der Wissenschaften, Göttingen, 1900.

[26] G. B. Halsted. *Easy corollaries on non-Euclidean geometry* // American Mathematical Monthly. Vol I, 1894. P. 42.

[27] G. B. Halsted. *Lobachevsky* // American Mathematical Monthly. Vol. II, 1895. P. 136–139.

[28] C. Houzel. *The birth of non-Euclidean geometry* // 1830-1930: a century of geometry. Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin-Heidelberg, 1992. P. 3–21.

[29] F. Klein. *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* (*erster Aufsatz*) // Mathematische Annalen. Vol. IV, 1871. P. 573-625. Французский перевод: L. Laugel. Sur la géométrie non Euclidienne // Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. 1'ere Série. Tome 11, no. 4, 1897. P. G1–G72. Английский перевод: J. Stillwell. Sources of Hyperbolic geometry // History of Mathematics. Vol. 10, AMS-LMS, 1996. Сокращённый вариант статьи: Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1871. P. 244–253. Французский перевод: G.J. Hoüel // Bulletin des Sciences Mathématiques. 1'ere Série. Tome II, 1871. P. 341-351. Русский перевод: А.П. Широков // [4, с. 253–303].

[30] G. Loria. *Il Passato e il presente delle principali teorie geometriche* // Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino. S. 2. V. 38, 1887. P. 327–376.

[31] H. Poincaré. *Les géométries non euclidiennes* // Revue générale des sciences pures et appliquées. Vol. 2, 1891. P. 769–774.

[32] J.-C. Pont. *L'Aventure des parall'eles Histoire de la géométrie non euclidienne*: *Précurseurs et attardés*. Peter Lang ed. 1986.

[33] P. Stäckel, F. Engel, *Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie* // Math. Annalen. T. XLIX (2), 1897. P. 149–205.

[34] J.-M. de Tilly. *Essai sur les Principes Fondamentaux de la Géometrie et de la Mécanique*. Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux, 1880.

[35] J.-M. de Tilly. *Essai de Géométrie analytique générale*. Mémoires de l'Académie Royale de Belgique, 1892.

[36] C. Vidal. *Sur quelques arguments non-euclidiens* // LÉnseignement Mathématique. Volume 4, 1902. P. 330–346.

[37] E. B. Vinberg. *Nikolaj Lobachevskij – On the occasion of his 200th anniversary* // European Mathematical Society Newsletter. Vol. 6, 1992. P. 8–9.

[38] A. Vucinich. *Nikolai Ivanovivh Lobachevskii*: *The Man behind the First Non-Euclidean Geometry* // Isis. Vol. 5. No. 4. Dec. 1962. P. 465–481.

[39] A. Vucinich. *Science in Russian Culture*, *A History to* 1960. Stanford University Press, 1963.

[40] G. Waldo Dunnington. *The Sesquicentennial of the Birth of Gauss* // The Scientific Monthly. Vol. XXIV. May, 1927. P. 402–414.

[41] S. Walter. *La vérité en géométrie*: *sur le rejet de la doctrine conventionnaliste* // Philosophia Scientiae. Vol. 2, 1997. P. 103–135.