Тема номера: многогранники Ньютона

Многогранники и уравнения

В. А. Тиморин А. Г. Хованский

Введение

В этой статье обсуждается связь между геометрией выпуклых многогранников с целыми вершинами и числом решений систем алгебраических уравнений. Эта тема очень активно разрабатывается в настоящее время. Однако большинство научных статей предполагают от читателя владение хорошей алгебро-геометрической техникой. Здесь мы хотим обсудить, пользуясь по возможности более элементарным языком, то, с чего эта теория начиналась.

Наше изложение основано на работах [1, 2]. Кроме того, мы приводим некоторые элементарные примеры, связанные с фундаментальными принципами выпуклой геометрии и алгебраической геометрии. Надеемся, что эти примеры дадут мотивировку для дальнейшего изучения предмета.

1. Многогранники Ньютона

Каждому многочлену от двух переменных можно сопоставить набор точек на плоскости. Эти точки будут иметь целочисленные координаты, то есть принадлежать решётке $\mathbb{Z}^2$. А именно, моному $u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}$ от переменных u_1, u_2 сопоставляется точка (α_1, α_2). Многочлену сопоставляется набор точек, соответствующих всем мономам, которые входят в данный многочлен с ненулевыми коэффициентами. Например, многочлену $2+u_1-u_1^2u_2$ соответствует набор из трёх точек $(0,0)$, $(1,0)$ и $(2,1)$. Набор целочисленных точек, соответствующий данному многочлену f, называется *носителем* многочлена f.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 14, 2010(30–57)

Что происходит с носителями при умножении многочленов? Начнём со случая, когда оба многочлена — мономы. Очевидно, если умножить моном $u_1^{\alpha_1}u_2^{\alpha_2}$ на моном $u_1^{\beta_1}u_2^{\beta_2}$, то получится моном $u_1^{\gamma_1}u_2^{\gamma_2}$, где $\gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$ и $\gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2$. Другими словами, точка $c = (\gamma_1, \gamma_2)$, соответствующая произведению мономов, является суммой точек $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ и $b = (\beta_1, \beta_2)$. Точки мы складываем покоординатно: каждая координата суммы является суммой соответствующих координат точек-слагаемых.

Пусть теперь мы перемножаем два многочлена, не являющихся мономами. Легко проверить следующую формулу: если A_1 и A_2 — носители многочленов f_1 и f_2, соответственно, то носитель A многочлена f_1f_2 удовлетворяет включению

$$A \subseteq A_1 + A_2.$$

Здесь в правой части стоит сумма двух множеств. Сумма $A_1 + A_2$ определяется как множество всех точек, представимых в виде a_1+a_2, где $a_1 \in A_1$, и $a_2 \in A_2$ (эта операция называется *суммой множеств по Минковскому*). Всякий моном m, входящий в многочлен f_1f_2 с ненулевым коэффициентом, можно записать в виде произведения m_1m_2, где m_1 и m_2 — мономы, входящие с ненулевыми коэффициентами в разложения многочленов f_1 и f_2 соответственно. Поскольку умножению мономов соответствует сложение точек в $\mathbb{Z}^2$, отсюда вытекает выписанная формула для носителей.

Заметим, однако, что равенство $A = A_1 + A_2$ справедливо не для всех многочленов, как показывает следующий пример. Пусть $f_1(u_1, u_2) = u_1 + u_2$, $f_2(u_1, u_2) = u_1 - u_2$. Тогда множества A_1 и A_2 совпадают и состоят из двух точек $(1, 0)$, $(0, 1)$. Сумма $A_1 + A_2$ состоит из трёх точек $(2, 0)$, $(1, 1)$ и $(0, 2)$. Однако носитель многочлена $f_1f_2(u_1, u_2) = u_1^2 - u_2^2$ содержит только две из них. Точка $(1, 1)$ выпадает по следующей причине: её можно представить двумя способами в виде суммы $a_1 + a_2$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$; соответствующие коэффициенты взаимно уничтожаются.

Если же точку a можно только одним способом представить в виде $a_1 + a_2$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, то точка a обязательно входит в A. Например, все вершины многоугольника, натянутого на $A_1 + A_2$, удовлетворяют этому условию (докажите это геометрическое утверждение!). Это одна из причин, по которой удобней рассматривать не носитель многочлена, а его выпуклую оболочку (то есть минимальный многоугольник, содержащий все точки носителя). Выпуклая оболочка носителя называется *многоугольником Ньютона*. При перемножении многочленов их многоугольники Ньютона складываются: если Δ_1 и Δ_2 — многоугольники Ньютона многочленов f_1 и f_2, соответственно, то многоугольник Ньютона Δ многочлена f_1f_2 равен

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Для многочленов многих переменных можно аналогичным образом определить *многогранник Ньютона*. Многогранник Ньютона многочлена всегда является выпуклым многогранником с целочисленными вершинами. При перемножении многочленов их многогранники Ньютона складываются.

Многогранник Ньютона носит имя И. Ньютона неспроста. Ньютон разработал способ представления аналитических функций, заданных неявно (например, как решения алгебраических или дифференциальных уравнений), в виде локальных степенных рядов по дробным степеням независимой переменной. Такие ряды называются степенными рядами Пьюзо. Метод Ньютона удобно применять, пользуясь многогранником Ньютона (хотя сам Ньютон никаких многогранников не рассматривал). Долгое время многогранники Ньютона в основном использовались для изучения локальной структуры аналитических функций в окрестностях особых точек. Ситуация изменилась в 1970-е годы, когда были обнаружены глобальные геометрические структуры, связанные с многогранниками Ньютона.

Многогранник Ньютона полезен по следующей причине. Мы ограничимся пока только очень неформальным объяснением. Пусть f — фиксированный многочлен с многогранником Ньютона Δ. Выберем точку $x \in \mathbb{C}^n$ с очень большими или очень маленькими по абсолютной величине координатами. Посчитаем значения всех мономов, входящих в многочлен f, в точке x. Тогда, с вероятностью, близкой к единице, один из мономов во много раз (скажем, в 1000) больше, чем остальные. Назовём такой моном *главным*. Нетрудно видеть, что главные мономы соответствуют вершинам многогранника Δ. Таким образом, вершины играют самую важную роль при изучении асимптотических свойств многочлена f. С некоторой вероятностью (впрочем, близкой к нулю), может оказаться так, что доминируют несколько мономов. Однако все эти мономы будут лежать на границе многогранника Δ.

Задачи

1. Пусть Δ — выпуклый многоугольник на плоскости с координатами (α_1, α_2), а $l(\alpha_1, \alpha_2) = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ — линейная функция. Всегда найдётся такая вершина v многоугольника Δ, что
$$l(v) = \max_{a\in\Delta} l(a).$$

2. Пусть f — многочлен от двух комплексных переменных u_1 и u_2 с многоугольником Ньютона Δ. Тогда существует такая константа C, что если $|\log|u_1||$ или $|\log|u_2||$ больше, чем C, то для некоторой стороны Γ многоугольника Δ и для любых точек $(\alpha_1, \alpha_2) \in \Gamma$, $(\beta_1, \beta_2) \notin \Gamma$, имеет место неравенство
$$|u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2}| > 100 |u_1^{\beta_1} u_2^{\beta_2}|.$$

3. Докажите, что если векторы $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ линейно независимы, то существует такая константа $C > 0$, что для всякого вектора $b \in \mathbb{R}^n$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \langle a_i, b \rangle \geqslant C|b|.$$

Здесь $\langle a, b \rangle$ означает скалярное произведение векторов a и b, а $|b|$ — длину вектора b.

4. Пусть A — конечное множество точек в $\mathbb{R}^n$. Существует константа $C > 0$, обладающая следующим свойством: для всякого вектора $b \in \mathbb{R}^n$ найдётся такое аффинное подпространство Λ, что для всех $a \in A \cap \Lambda$ и для всех $a' \in A - \Lambda$ выполнено неравенство $\langle b, a' \rangle \leqslant \langle b, a \rangle - C|b|$. Кроме того, можно считать, что аффинное пространство Λ порождается своим пересечением с множеством A.

5. Пусть f — многочлен от комплексных переменных $(u_1, \ldots, u_n)$ с многогранником Ньютона Δ. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся константа C со следующим свойством: если для комплексного вектора $(u_1, \ldots, u_n)$ длина вектора $(\log|u_1|, \ldots, \log|u_n|)$ больше, чем C, то найдётся такая грань Γ многогранника Δ, что

$$|u_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot u_n^{\beta_n}| < \varepsilon |u_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot u_n^{\alpha_n}|$$

для всякой точки $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Gamma$ и всякой точки $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \notin \Gamma$.

2. Суммы конечных множеств

Для любых двух множеств в $\mathbb{R}^n$ определена их сумма Минковского: определение, данное в предыдущем разделе, дословно переносится на случай произвольной размерности. Эта операция важна не только при изучении многочленов. В качестве «случайного» примера рассмотрим такой: распространение света в однородной, но неизотропной среде. Пусть источник света помещён в начало координат, а A_t — световое пятно, образованное за время t, то есть множество тех точек, в которые свет успел добраться за время t. Если среда однородна (то есть её свойства не меняются при параллельном переносе), то источник, помещённый в точку $x \in \mathbb{R}^n$, осветит за время t множество $x + A_t$. Согласно принципу Гюйгенса, множество A_{t+s} может быть получено следующим образом. В каждой точке множества A_t помещается воображаемый «вторичный источник света». Множество A_{t+s} есть объединение световых пятен за время s, полученных от всех вторичных источников. Вспоминая определение суммы по Минковскому, получаем, что

$$A_{t+s} = A_t + A_s.$$

Обсудим некоторые свойства операции суммирования по Минковскому. Сумма множеств не зависит ни от порядка слагаемых, то есть $A + B = B + A$, ни от того, в какой последовательности производится суммирование, то есть $A + (B + C) = (A + B) + C$. Это вытекает из аналогичных свойств операции сложения точек. Кроме того, если, несколько злоупотребляя обозначениями, обозначить через 0 множество, состоящее только из начала координат (то есть из точки, все координаты которой нулевые), то $A + 0 = 0 + A$ для любого множества A в $\mathbb{R}^n$. Если A — множество в $\mathbb{R}^n$, а λ — действительное число, то множество λA определяется как множество всех точек вида

$$\lambda a = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n),$$

где точка $a = (a_1, \ldots, a_n)$ пробегает все множество A. Выполняются обычные распределительные законы

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$$

Есть, однако, и существенные различия между операциями над точками и операциями над множествами.

Задачи

1. Пусть A — подмножество в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что $2A \subseteq A + A$. Приведите пример, когда включение строгое.

2. Если множество A выпукло, то $A + A = 2A$.

3. Пусть A — отрезок в $\mathbb{R}$, а B — множество его концов. Докажите, что $A + B = A + A = 2A$.

4. Пусть A — треугольник в $\mathbb{R}^2$, а B — множество его вершин. Докажите, что $2A + B = 2A + A = 3A$.

5. Пусть A — выпуклый многоугольник в $\mathbb{R}^2$, а B — множество его вершин. Докажите, что $2A + B = 2A + A = 3A$. *Указание*: всякий выпуклый многоугольник можно разбить на треугольники.

6. Пусть A — симплекс в $\mathbb{R}^n$ (то есть выпуклая оболочка множества из $n + 1$ точек, не связанных никакими аффинными соотношениями), а B — множество его вершин. Докажите, что $nA + B = nA + A = (n + 1)A$.

Мы видим, что, вообще говоря, сумма множеств не удовлетворяет свойству сокращения, то есть из $A + C = B + C$ не следует $A = B$. Однако верно следующее.

Предложение 1. *Предположим, что A и B — произвольные компактные (т. е. замкнутые и ограниченные) подмножества пространства $\mathbb{R}^n$. Если $A + C = B + C$ для некоторого компактного множества C, то выпуклые оболочки множеств A и B совпадают.*

Доказательство. Определим функцию $H_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$H_A(x) = \max_{y \in A} \langle x, y \rangle,$$

где $\langle x, y\rangle$ обозначает евклидово скалярное произведение векторов x и y. Функция H_A называется *опорной функцией* множества A. Нетрудно проверить, что выпуклая оболочка множества A совпадает с множеством всех $y \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\langle x, y\rangle \leqslant H_A(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ (докажите это свойство, исходя из определения выпуклой оболочки как минимального выпуклого множества, содержащего A). Отсюда, в частности, следует, что если опорные функции двух множеств равны, то совпадают и выпуклые оболочки этих множеств. Кроме того, пользуясь простейшими свойствами максимума, нетрудно показать, что $H_{A+C} = H_A + H_C$. Точно так же, $H_{B+C} = H_B + H_C$. Отсюда получаем, что $H_A = H_B$, следовательно, выпуклые оболочки множеств A и B совпадают. □

3. Группы Гротендика

В теории представлений и алгебраической геометрии очень полезна следующая конструкция. Пусть E — некоторое множество, элементы которого можно складывать, причём сложение коммутативно, ассоциативно, и обладает нейтральным элементом, а вот вычитание не определено. Такие множества называются коммутативными полугруппами. Например, множество всех (скажем, конечных) подмножеств решётки $\mathbb{Z}^n$ со сложением по Минковскому образует коммутативную полугруппу. Все ненулевые многочлены от n переменных образуют коммутативную полугруппу по умножению. (Как мы уже видели, имеется тесная связь между этими двумя полугруппами). Мы хотим превратить полугруппу E в группу, то есть сделать так, чтобы там было определено вычитание. Можно рассмотреть множество формальных разностей $a - b$, $a, b \in E$. Здесь $a - b$ означает не результат какой-либо операции, проделанной над элементами a и b, а просто некоторый абстрактный объект, сопоставляемый каждой паре (a, b). На множестве формальных разностей можно определить вычитание: а именно, $a-b$ минус $c-d$ равно $(a+d)-(b+c)$, то есть формальной разности элементов $a + d$ и $b + c$ полугруппы E. Однако, некоторые формальные разности следует считать совпадающими, чтобы выполнялись обычные групповые законы, а именно $a - b$ равно $c - d$, если $a + d = b + c$. В частности, все формальные разности вида $a-a$ отождествляются с $0-0$, где 0 — нейтральный элемент полугруппы E. Полученное множество формальных разностей (с указанным отождествлением) называется *группой Гротендика* полугруппы E. Сама полугруппа отображается в свою группу Гротендика: элемент a переходит в формальную разность $a - 0$. Заметим, однако, что это отображение не всегда инъективно.

Найдём, например, группу Гротендика для полугруппы всех конечных подмножеств решётки $\mathbb{Z}^n$ с операцией сложения по Минковскому. Точнее, нас интересует не вся группа Гротендика, а только образ полугруппы в группе Гротендика. Для того, чтобы описать этот образ, нам нужно ответить на такой вопрос: в каком случае два конечных подмножества A и B решётки $\mathbb{Z}^n$ представляют один и тот же элемент группы Гротендика? Другими словами, в каком случае $A+C=B+C$ для некоторого конечного подмножества $C\subset\mathbb{Z}^n$? Ответ: если и только если выпуклые оболочки множеств A и B совпадают. Следовательно, группа Гротендика носителей многочленов совпадает с группой Гротендика их многогранников Ньютона. Оказывается, многие алгебраические свойства многочленов зависят не от их носителя, а только от элемента носителя в группе Гротендика, а значит, только от многогранника Ньютона.

Доказательство сформулированного утверждения опирается на предложение 1. Из этого предложения следует, что если конечные подмножества A и B решётки $\mathbb{Z}^n$ представляют один и тот же элемент группы Гротендика, то их выпуклые оболочки совпадают. Осталось доказать, что если A и B имеют одинаковые выпуклые оболочки, то найдётся такое конечное подмножество $C\subset\mathbb{Z}^n$, что $A+C=B+C$.

Предложение 2. *Пусть Δ — выпуклый многогранник размерности n в $\mathbb{R}^n$, а V — множество всех вершин многогранника Δ. Тогда $(M+1)\Delta=M\Delta+V$ для любого действительного числа $M\geqslant n$ (здесь знак суммы обозначает сумму по Минковскому, а $M\Delta$ — это многогранник, полученный из Δ гомотетией с коэффициентом M и центром в начале координат).*

Доказательство. Если Δ — это симплекс, то, согласно задаче 6 из раздела 2, имеем $(n+1)\Delta=n\Delta+V$. Следовательно, для любого $M\geqslant n$,

$$M\Delta+V=(n\Delta+V)+(M-n)\Delta=(n+1)\Delta+(M-n)\Delta=(M+1)\Delta.$$

Таким образом, утверждение доказано для случая симплекса.

В случае произвольного выпуклого многогранника Δ мы воспользуемся следующим фактом: многогранник Δ можно представить в виде объединения симплексов, вершины которых являются вершинами многогранника Δ. Это утверждение нетрудно доказать по индукции. Если каждая грань многогранника Δ размерности $n-1$ уже представлена в виде объединения $(n-1)$-мерных симплексов (вершины которых являются вершинами многогранника Δ), то можно выбрать произвольную вершину многогранника Δ и соединить её n-мерными симплексами с $(n-1)$-мерными симплексами на гранях многогранника Δ, не проходящих через выбранную вершину.

Пусть Δ является объединением n-мерных симплексов $A_1,\ldots,A_k$, причём множество вершин V_i симплекса A_i является подмножеством множества V. Заметим, что

$$(A_1\cup\dots\cup A_k)+V=(A_1+V)\cup\dots\cup(A_k+V).$$

(В этом смысле, операции $\cup$ и $+$ на подмножествах в $\mathbb{R}^n$ ведут себя так же по отношению друг к другу, как операции $+$ и $\times$ на действительных числах). Отсюда следует, что

$$M\Delta + V \supseteq (MA_1 + V_1) \cup \dots \cup (MA_k + V_k) = \\ = (M+1)A_1 \cup \dots \cup (M+1)A_k = (M+1)\Delta.$$

Противоположное включение очевидно. □

Доказанное предложение имеет такое следствие. Пусть A и B — конечные подмножества в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что выпуклые оболочки множеств A и B совпадают (и равны Δ). Тогда существует выпуклый многогранник $\tilde{C} \subset \mathbb{R}^n$, такой, что $A + \tilde{C} = B + \tilde{C}$. А именно, можно взять $\tilde{C} = M\Delta$, где M — достаточно большое положительное число. Поскольку как A, так и B, содержат все вершины многогранника Δ, мы получаем $A + M\Delta = B + M\Delta = (M+1)\Delta$ по доказанному предложению. В самом деле, если V — множество всех вершин многогранника Δ, то

$$(M+1)\Delta = V + M\Delta \subseteq A + M\Delta \subseteq \Delta + M\Delta = (M+1)\Delta$$

и аналогично для B.

Вернемся к доказательству интересующего нас утверждения: если выпуклые оболочки конечных множеств A, $B \subset \mathbb{Z}^n$ совпадают (и равны Δ), то найдётся такое конечное множество $C \subset \mathbb{Z}^n$, что $A + C = B + C$. Мы знаем, что $A+M\Delta = B+M\Delta$ для достаточно большого $M > 0$, но $M\Delta$ не конечное множество, а многогранник. Пусть C — множество всех целых точек многогранника $M\Delta$. Тогда $A+C = B+C$. В самом деле, если $c \in C$, то, в частности, $c \in M\Delta$ и, значит, для всякого $a \in A$, сумма $a + c$ представляется в виде $b + c'$, где $b \in B$, $c' \in M\Delta$. Однако, поскольку точки a, b и c целые, точка $c' = a+c-b$ тоже целая. Мы доказали, что $A+C \subseteq B+C$. Противоположное включение доказывается точно так же.

Мы доказали, что группа Гротендика конечных подмножеств решетки $\mathbb{Z}^n$ совпадает с группой Гротендика многогранников Ньютона.

Задачи

1. Опишите группы Гротендика следующих полугрупп:

   а) конечные подмножества в $\mathbb{R}^n$ с операцией сложения по Минковскому,

   б) натуральные числа с операцией произведения,

   в) классы изоморфизма конечномерных векторных пространств над $\mathbb{C}$ с операцией прямой суммы.

2. Докажите, что группа Гротендика компактных (т. е. замкнутых и ограниченных) подмножеств в $\mathbb{R}^n$ изоморфна группе всех непрерывных функций на S^{n-1} с операцией сложения. *Указание*: рассмотрите опорные функции множеств.

4. Целые точки в выпуклых многогранниках

Рассмотрим выпуклый многогранник Δ в $\mathbb{R}^n$. Какова связь между Δ и множеством всех целых точек в многограннике Δ? Мы обсудим несколько утверждений, устанавливающих эту связь. Простое, но очень важное наблюдение состоит в следующем:

Теорема 3. *При $k \to \infty$, объём многогранника $k\Delta$ асимптотически равен числу целых точек в многограннике $k\Delta$.*

Напомним, что для две последовательности a_k и b_k действительных чисел *асимптотически равны*, если a_k/b_k стремится к 1 при $k \to \infty$.

Теорема 3 верна по следующей причине. Рассмотрим стандартный n-мерный куб I, состоящий из всех точек $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ таких, что

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

С каждой целой точкой $a \in \mathbb{Z}^n$ можно связать сдвинутый куб $a + I$. Пусть Δ_k — объединение кубов $a + I$ по всем целым точкам a многогранника $k\Delta$. Множества Δ_k и $k\Delta$ отличаются не очень сильно: различие наблюдается только среди точек, расстояние от которых до границы многогранника $k\Delta$ не превышает $\sqrt{n}$, то есть в $\sqrt{n}$-окрестности границы многогранника $k\Delta$. Заметим, что n-мерный объём R-окрестности границы многогранника $k\Delta$ растёт как $(n-1)$-мерный объём границы, то есть как k^{n-1}. Следовательно, объёмы множеств $k\Delta$ и Δ_k могут отличаться не более чем на $O(k^{n-1})$. Однако сами эти объёмы растут как k^n (сформулируйте и докажите более точное утверждение!). Значит, они асимптотически равны. Осталось заметить, что объём множества Δ_k равен числу целых точек в многограннике $k\Delta$.

Допустим, что все вершины многогранника Δ — целые точки. В этом случае Δ называется *целочисленным многогранником*. Например, многогранник Ньютона любого многочлена — целочисленный многогранник. Обозначим через A множество всех целых точек в многограннике Δ. Определим множество $k * A$ как сумму Минковского k копий множества A. Заметим, что, вообще говоря, $kA \neq k * A$. Это видно даже на одномерном примере $\Delta = [0, 1]$, $A = \{0, 1\}$. В этом примере $2 * A = A + A = \{0, 1, 2\}$, а $2A = \{0, 2\}$. С другой стороны, множество $k * A$, очевидно, лежит в многограннике $k\Delta$. К сожалению, неверно также и то, что множество $k * A$ совпадает с множеством всех целых точек в многограннике $k\Delta$. Рассмотрим, например, многогранник (тетраэдр) Δ в $\mathbb{R}^3$ с вершинами $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ и $(1, 1, 0)$. Можно показать, что точка $(1, 1, 1)$ принадлежит многограннику 2Δ, но не принадлежит множеству $2*A$, где $A = \mathbb{Z}^3 \cap \Delta$ (см. также задачу 3 в разделе 8). Вообще, никакая точка из $\mathbb{Z}^3$, сумма координат которой нечётна, не может лежать во множестве $k * A$. Однако имеет место следующая теорема:

Теорема 4. *Пусть Δ — целочисленный многогранник в $\mathbb{R}^n$, а A — некоторое множество целых точек в многограннике Δ, порождающее решётку $\mathbb{Z}^n$ как группу по сложению и содержащее все вершины многогранника Δ. Существует константа $\rho > 0$, обладающая следующим свойством: при любом целом $k > 0$ каждая целая точка многогранника $k\Delta$, отстоящая от границы этого многогранника на расстояние $\geqslant \rho$, принадлежит множеству $k * A$.*

Утверждение этой теоремы является многомерным обобщением старой задачи про трёх- и пятирублёвые купюры: доказать, что любую целую сумму рублей, начиная с 8, можно набрать, используя исключительно купюры достоинством 3 и 5 рублей. В настоящее время такая формулировка потеряла актуальность.

Задачи

1. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — положительные целые числа, не имеющие нетривиальных общих делителей. Тогда найдётся целое положительное число m такое, что всякое целое число $a \geqslant m$ представляется в виде

$$a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$$

для некоторых целых неотрицательных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. *Указание*: Пусть $s = a_1 + \cdots + a_n$. Всякое целое число в отрезке $[-s, s]$ представляется в виде линейной комбинации чисел $a_1, \ldots, a_n$ с целыми коэффициентами. Обозначим через M положительное целое число, превосходящее модули всех этих коэффициентов. Тогда можно взять $m = Ms$.

2. Приведите пример трёхмерного многогранника Δ со следующими свойствами: множество A всех целых точек многогранника Δ порождает решётку $\mathbb{Z}^3$ как группу по сложению, но не все целые точки в многограннике 2Δ принадлежат множеству $2 * A$. *Указание*: рассмотрите тетраэдр Δ в $\mathbb{R}^3$ с вершинами $(0,0,0)$, $(1,2,2)$, $(2,1,2)$ и $(2,2,1)$. Этот тетраэдр задаётся такой системой линейных неравенств на координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leqslant 5, \quad 3\alpha_i \leqslant 2(\alpha_j + \alpha_k) \text{ при } i \neq j \neq k.$$

Все целые точки многогранника Δ получаются из точек $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ и $(1,2,2)$ перестановками координат (таким образом, всего многогранник Δ содержит 5 целых точек). Пусть $A = \mathbb{Z}^3 \cap \Delta$. Множество A порождает решётку $\mathbb{Z}^3$ как группу по сложению. Точка $(3,3,3)$ принадлежит многограннику 2Δ, но не содержится во множестве $2 * A$.

3. Пусть A — конечное подмножество в $\mathbb{Z}^n$, которое порождает решётку $\mathbb{Z}^n$ как группу относительно сложения. Существует константа $C > 0$, обладающая следующим свойством: для всякой линейной комбинации

$$b = \sum_{a \in A} \lambda_a a$$

элементов множества A с действительными коэффициентами $\lambda_a \in \mathbb{R}$, которая оказывается целочисленным вектором, существует линейная комбинация

$$\sum_{a \in A} n_a a$$

с целыми коэффициентами $n_a \in \mathbb{Z}$, равная b и такая, что $|\lambda_a - n_a| < C$ для всех $a \in A$. *Указание*: рассмотрим выпуклую оболочку Π множества $\{0\} \cup A$. Всякую целую точку из Π можно представить в виде целочисленной линейной комбинации элементов множества A. С другой стороны, вектор b можно перевести в многогранник Π, вычитая подходящую целочисленную линейную комбинацию элементов множества A.

4. Пусть A — конечное подмножество в $\mathbb{Z}^n$, содержащее начало координат и порождающее решётку $\mathbb{Z}^n$ как группу по сложению. Обозначим через Δ выпуклую оболочку множества A. Пусть C — константа, фигурирующая в задаче 3, а $k > 2C$ — целое число. Определим $\Delta(k, C)$ как множество всех линейных комбинаций

$$\sum_{a \in A} \lambda_a a,$$

таких, что $C \leqslant \lambda_a \leqslant k - C$ для всех $a \in A$. Тогда $\Delta(k, C)$ — выпуклый многогранник, содержащийся в многограннике $k\Delta$. Докажите, что всякая целая точка многогранника $\Delta(k, C)$ лежит в $k * A$.

Приведенные выше задачи доказывают теорему 4. Теперь из теорем 4 и 3 вытекает следующий результат.

Теорема 5. *Пусть Δ и A — такие же, как в теореме* 4. *Тогда число точек во множестве $k * A$ асимптотически равно объёму многогранника $k\Delta$ при $k \to \infty$.*

5. Общее положение и дискриминант

В этом разделе мы обсудим смысл следующего выражения: «некоторое условие выполняется для точки $z \in \mathbb{C}^n$ общего положения». Начнём с элементарных примеров. Рассмотрим квадратное уравнение от одной комплексной переменной t:

$$at^2 + bt + c = 0.$$

Коэффициенты a, b, c этого уравнения рассматриваются как параметры. Вообще говоря, это уравнение имеет ровно два комплексных корня. Однако имеются исключения. А именно, встречаются уравнения, у которых только один корень. Например, уравнение $t^2 - 2t + 1 = 0$ имеет единственный корень $t = 1$, так же, как и уравнение $t - 1 = 0$, в котором $a = 0$. Если же все коэффициенты равны нулю, то корней бесконечно много — все комплексные числа являются корнями.

Посмотрим, в каких случаях выписанное уравнение имеет неправильное, то есть отличное от 2, число корней. Это происходит, когда $a = 0$ (то есть уравнение оказывается линейным), а также когда $b^2 = 4ac$ (то есть левая часть уравнения оказывается полным квадратом). Эти два условия выражаются равенствами. Понятно, что, например, при случайном выборе коэффициентов a, b, c, вероятность выполнения этих равенств нулевая. В этом смысле, мы говорим, что при *общем выборе коэффициентов*, или, что то же самое, если точка $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ находится в *общем положении*, рассматриваемое уравнение имеет ровно два корня.

Ещё один пример доставляет система из двух линейных уравнений от двух неизвестных, коэффициенты которой рассматриваются как параметры. В большинстве случаев такая система имеет ровно одно решение. Но если, скажем, все коэффициенты одного из уравнений нулевые, то решений бесконечно много. Допустим, что оба уравнения ненулевые. Тогда каждое из них описывает прямую на плоскости $\mathbb{C}^2$. Может так случиться, что соответствующие две прямые параллельны, и тогда система не имеет решений. Однако параллельность прямых выражается некоторым алгебраическим равенством на коэффициенты, и мы опять можем сказать, что в случае общего положения, рассматриваемая система имеет ровно одно решение.

Вообще-то, математики не любят исключений и пытаются формулировать утверждения так, чтобы исключений не было. Например, считается, что уравнение $(t-1)^2 = 0$ имеет не один корень, а два совпадающих; а если коэффициент a в уравнении $at^2 + bt + c = 0$ обращается в нуль, то говорят, что один из корней уходит на бесконечность. Аналогично, если прямые параллельны, то они пересекаются на бесконечности. Подобный подход требует уточнения понятия «число корней», а также расширение того множества, к которому могут принадлежать корни. Но это другая история.

В общем случае, мы будем говорить, что некоторое свойство выполнено для точек $z \in \mathbb{C}^n$ общего положения, если существует ненулевой многочлен D на $\mathbb{C}^n$ такой, что все точки z, для которых свойство не выполняется, удовлетворяют равенству $D(z) = 0$. Например, все точки $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, для которых неверно, что уравнение $at^2 + bt + c = 0$ имеет ровно два корня, удовлетворяют равенству

$$a(b^2 - 4ac) = 0.$$

Многочлен D, обращающийся в нуль во всех исключительных точках, обычно называется *дискриминантом*. Таким образом, для всякого утверждения, справедливого в общем положении, имеется свой дискриминант. Заметим, что мы не требуем, чтобы множество исключительных точек совпадало с множеством нулей дискриминанта. Требуется только, чтобы первое множество было подмножеством второго.

Приведём следующий результат, устанавливающий существование дискриминанта в некотором частном случае:

Теорема 6. *Рассмотрим произвольное число m многочленов $P_1, \ldots, P_m$ от n комплексных переменных, коэффициенты которых зависят полиномиально от конечного числа комплексных параметров $c_1, \ldots, c_k$. Тогда существуют два многочлена D и D_* от $c_1, \ldots, c_k$ со следующими свойствами. Если система уравнений*

$$\begin{cases} P_1 = 0, \\ \ldots, \\ P_m = 0 \end{cases}$$

совместна в $(\mathbb{C} - 0)^n$ (то есть имеет хотя бы одно решение, ни одна координата которого не обращается в нуль), то $D(c_1, \ldots, c_k) = 0$. Если же $D(c_1, \ldots, c_k) = 0$, но $D_*(c_1, \ldots, c_k) \neq 0$, то выписанная система уравнений совместна в $(\mathbb{C}-0)^n$. Наконец, существует набор комплексных чисел $c_1, \ldots, c_k$, на котором многочлен D обращается в нуль, а многочлен D_* — нет.

Многочлен D называется *результантом* системы $P_1 = \cdots = P_m = 0$. Теорема утверждает, грубо говоря, что все точки в пространстве параметров, для которых система совместна в $(\mathbb{C} - 0)^n$, удовлетворяют равенству $D = 0$, а почти все точки, для которых $D = 0$, задают совместные в $(\mathbb{C} - 0)^n$ системы. Заметим, что многочлен D может быть тождественно равен нулю.

Мы не будем доказывать теорему 6, хотя существуют вполне элементарные её доказательства, основанные на операции деления многочленов с остатком. Просто доказательство заняло бы достаточно много места и отвлекло бы нас от основной сюжетной линии. Но мы проиллюстрируем эту теорему на простейших примерах. Рассмотрим квадратное уравнение $t^2 = c$ (или, что эквивалентно, $t^2 - c = 0$). Оно имеет решения при любом c. Однако, при $c = 0$ единственное решение равно нулю. Таким образом, мы можем взять $D(c) = 0$, $D_*(c) = c$. Рассмотрим теперь систему из двух уравнений от одной неизвестной:

$$t^2 = c_1, \quad t^3 = c_2.$$

Мы тоже могли бы легко переписать эту систему так, что в правой части стояли бы нули. Эта система имеет решение (и притом только одно), если $c_2^2 = c_1^3$. Однако, если $c_1 = c_2 = 0$, то решение равно нулю. Таким образом, мы можем взять $D(c_1, c_2) = c_2^2 - c_1^3$, $D_*(c_1, c_2) = c_1$.

6. Теорема Кушниренко

Одно из замечательных глобальных свойств многогранника Ньютона содержится в следующей теореме:

Теорема 7 (Кушниренко [3]). *Рассмотрим систему полиномиальных уравнений с комплексными коэффициентами*

$$\varphi_1(u_1, \ldots, u_n) = 0, \ \ldots, \ \varphi_n(u_1, \ldots, u_n) = 0.$$

Предположим, что все многочлены φ_i имеют одинаковые многогранники Ньютона Δ, и их коэффициенты находятся в общем положении. Тогда система имеет ровно $n!\mathrm{Vol}(\Delta)$ решений в $(\mathbb{C}-0)^n$, т. е. комплексных решений $(u_1, \ldots, u_n)$, удовлетворяющих условию $u_1, \ldots, u_n \neq 0$. Здесь $\mathrm{Vol}(\Delta)$ *обозначает n-мерный объём многогранника Δ.*

То, что коэффициенты системы находятся в общем положении, говорит вот о чем. Мы фиксируем целочисленный многогранник Δ. Любой многочлен, многогранник Ньютона которого совпадает с Δ, имеет вид

$$\sum_{a\in\Delta\cap\mathbb{Z}^n} \lambda_a x^a,$$

где $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ пробегает все целые точки в многограннике Δ, а x^a — это моном $u_1^{\alpha_1} \ldots u_n^{\alpha_n}$ (мы обозначаем через x точку из $\mathbb{C}^n$ с координатами $u_1, \ldots, u_n$). Таким образом, многочлен с многогранником Ньютона Δ однозначно задаётся набором коэффициентов λ_a. Многочлен общего положения с фиксированным многогранником Ньютона Δ — это многочлен, набор коэффициентов λ_a которого находится в общем положении. Теорема Кушниренко, таким образом, выполнена для всех систем уравнений с многогранником Ньютона Δ, если только коэффициенты этих уравнений не удовлетворяют некоторому нетривиальному алгебраическому соотношению.

Заметим, что условие $u_1, \ldots, u_n \neq 0$ существенно. Дело в том, что для многих многогранников Δ, как бы мы ни выбирали коэффициенты многочленов φ_i с многогранником Δ, всегда будут неизолированные корни в объединении координатных плоскостей. Более того, очень часто все точки пространства $\mathbb{C}^n$, у которых хотя бы одна координата обращается в нуль, служат решениями рассматриваемой системы (определите, каким условиям должен удовлетворять многогранник Ньютона, чтобы это было так). Впрочем, если начало координат содержится в многограннике Δ, требование $u_1, \ldots, u_n \neq 0$ можно убрать. Есть, однако, ещё одна, чуть более концептуальная, причина, по которой требование $u_1, \ldots, u_n \neq 0$ является естественным. Дело в том, что при таком требовании, параллельный перенос многогранника Ньютона не меняет числа корней.

В теореме Кушниренко можно рассматривать не только многочлены, но и *многочлены Лорана*, то есть линейные комбинации мономов вида $u_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot u_n^{\alpha_n}$, в которых α_i — целые числа, но не обязательно положительные. Многогранник Ньютона многочлена Лорана определяется точно так же, как и многогранник Ньютона многочлена. Конечно, теорема Кушниренко для многочленов Лорана является формальным следствием теоремы Кушниренко для многочленов. Однако, для дальнейшего не имеет смысла ограничиваться только многочленами, поскольку все, что мы собираемся сказать, в той же степени справедливо и для многочленов Лорана.

В этой статье мы наметим одно из доказательств теоремы Кушниренко (в настоящее время имеется пара десятков простых доказательств, использующих различные идеи; однако, когда теорема была впервые доказана, она была сложным передовым результатом).

Задачи Постройте явные примеры систем уравнений с многогранником Ньютона Δ, имеющих ровно $n!\mathrm{Vol}(\Delta)$ корней в $(\mathbb{C}-0)^n$, где в качестве Δ взяты следующие многогранники размерности n:

1. Координатный симплекс в $\mathbb{R}^n$, заданный как множество точек $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leqslant m.$$

Здесь m — положительное целое число.

2. Координатный куб в $\mathbb{R}^n$, заданный как множество точек $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant m, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь m — положительное целое число.

3. Параллелограмм в $\mathbb{R}^2$ с вершиной в нуле, натянутый на целочисленные векторы (a, b) и (c, d) (вершины этого параллелограмма — точки с координатами $(0, 0)$, (a, b), (c, d) и $(a + c, b + d)$). Здесь $n = 2$.

4. Треугольник с вершинами $(0, 0)$, (a, b) и (c, d).

5. Восьмиугольник в $\mathbb{R}^2$ с вершинами $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 3)$, $(0, 2)$, $(0, 1)$.

Заметим, что из теоремы Кушниренко вытекает, в частности, следующее качественное утверждение. Существует целое неотрицательное число d такое, что любая система общего положения с многогранником Ньютона Δ имеет ровно d корней. Это утверждение является отражением общего принципа — одного из самых основных неформальных принципов комплексной алгебраической геометрии — «принципа сохранения числа».

7. Невырожденные системы

Рассмотрим систему уравнений $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$ в $(\mathbb{C}-0)^n$, где $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — многочлены Лорана. Допустим, что точка $x \in \mathbb{C}^n$ с координатами $(u_1, \dots, u_n)$ является корнем этой системы. Корень $x \in (\mathbb{C}-0)^n$ называется *невырожденным*, если дифференциалы функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ линейно независимы в точке x, другими словами, определитель $J(x) = J(u_1, \dots, u_n)$ матрицы Якоби, общий член которой равен $\partial\varphi_i/\partial u_j$, отличен от нуля в точке x. Если корень x невырожден, то, по теореме об обратной функции, отображение $\Phi\colon (\mathbb{C}-0)^n \to \mathbb{C}^n$, заданное формулой

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)),$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между некоторой окрестностью точки x и некоторой окрестностью начала координат в $\mathbb{C}^n$. Система уравнений $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$ называется *невырожденной* (в $(\mathbb{C}-0)^n$), если все её корни невырожденны в $(\mathbb{C}-0)^n$. В дальнейшем, мы будем всюду понимать невырожденность именно как невырожденность в $(\mathbb{C}-0)^n$.

Нам понадобится теорема, устанавливающая существование дискриминанта для следующего утверждения: общая система уравнений $\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$ в $(\mathbb{C}-0)^n$ невырожденна.

Теорема 8. *Рассмотрим систему уравнений Лорана*

$$\varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$$

от n комплексных неизвестных, коэффициенты которой являются многочленами от параметров $c_1, \dots, c_k$. Предположим, что в число параметров входят свободные члены всех многочленов $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Если для хотя бы одного набора значений параметров рассматриваемая система имеет невырожденное решение, то существует ненулевой многочлен D от $c_1, \dots, c_k$ такой, что $D(c_1, \dots, c_k) = 0$ для всякой вырожденной системы.

Идея доказательства этого утверждения состоит в следующем. Заметим, что J является многочленом Лорана. Поскольку J не равен тождественно нулю при некотором наборе значений параметров, множество точек в $(\mathbb{C}-0)^n$, заданное уравнением $J = 0$ при этих значениях параметров, мало. Другими словами, для почти всех точек из $(\mathbb{C}-0)^n$ якобиан J отличен от нуля. Можно по-разному придать точный смысл этому утверждению. Например, можно сказать, что множество нулей якобиана имеет меру нуль, или что оно нигде не плотно (см. задачи ниже).

Рассмотрим отображение $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, введённое выше, при том конкретном наборе значений параметров, при котором система имеет невырожденное решение. Образ множества нулей якобиана при отображении Φ тоже должен быть мал. Это означает, что для почти любой точки $z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ в $\mathbb{C}^n$ якобиан $J(x)$ отличен от нуля во всех точках $x \in (\mathbb{C} - 0)^n$ таких, что $\Phi(x) = z$. Другими словами, почти все значения $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ правых частей соответствуют невырожденным системам вида

$$\varphi_1 - \zeta_1 = 0, \ \ldots, \ \varphi_n - \zeta_n = 0.$$

Поскольку свободные члены многочленов φ_i входят в число параметров, это означает, что в нашем семействе полиномиальных систем найдутся невырожденные системы. Более того, почти все (в некотором смысле) системы невырожденны.

Условие вырожденности системы $\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = 0$ переписывается как условие совместности переопределённой системы $\varphi_1 = \ldots = \varphi_n = J = 0$. По теореме 6 существуют такие многочлены D и D_* от $c_1, \ldots, c_k$, что вырожденность рассматриваемой системы уравнений влечёт равенство $D(z) = 0$, а само это равенство при условии $D_*(z) \neq 0$ влечёт вырожденность системы. При этом многочлен D_* отличен от нуля в некоторых точках, в которых D равен нулю.

Если бы многочлен D был равен нулю, то отсюда бы следовало, что система вырожденна для почти всех значений параметров $c_1, \ldots, c_k$. Но мы знаем, что она невырожденна для почти всех значений параметров. Значит, многочлен D отличен от нуля, что и требовалось доказать.

Задачи

1. Рассмотрим подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$. Мы говорим, что множество A *имеет меру нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть не более чем счётным числом шаров, сумма объёмов которых меньше, чем ε. Докажите, что любое подмножество множества меры нуль имеет меру нуль, и что объединение не более чем счётного числа множеств меры нуль имеет меру нуль.

2. Пусть $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение, причём $n \leqslant m$. Докажите, что для любого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ меры нуль множество $F(A)$ тоже имеет меру нуль. *Указание*: рассмотрите сначала случай, когда множество A лежит в некотором шаре. Для каждого шара B в $\mathbb{R}^n$ существует такая константа $C > 0$, что ограничение отображения F на шар B увеличивает объёмы шаров не более, чем в C раз.

3. Всё пространство $\mathbb{R}^n$ нельзя представить в виде объединения двух множеств меры нуль.

4. Пусть $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — отличный от нуля многочлен. Заметим, что пространство $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать как вещественное пространство $\mathbb{R}^{2n}$. В частности, имеет смысл говорить о множествах меры нуль в $\mathbb{C}^n$. Докажите, что множество всех точек, в которых $f = 0$, имеет меру нуль. *Указание*: одну из координат можно выразить как многозначную функцию остальных координат, пользуясь соотношением $f = 0$.

5. Рассмотрим множество $A \subset \mathbb{C}^n$ меры нуль. Предположим, что заданы два многочлена D и D_* на $\mathbb{C}^n$ со следующими свойствами. Множество точек, в которых $D = 0$, не является подмножеством множества точек, в которых $D_* = 0$.

Кроме того, всякая точка множества A удовлетворяет уравнению $D = 0$, а всякая точка, в которой $D = 0$ и $D_* \neq 0$, принадлежит множеству A. Тогда многочлен D отличен от нуля.

8. Теорема Гильберта

Теорема Гильберта устанавливает связь между числом корней общей системы уравнений на некотором множестве и размерностью пространств функций на этом множестве. Теорема может быть сформулирована в очень общей ситуации, но мы сформулируем только частный случай, который требует меньше всего специальной терминологии.

Пусть L — некоторое конечномерное пространство рациональных функций на $\mathbb{C}^n$. Напомним, что *рациональная функция* определяется как отношение двух многочленов и, вопреки терминологии, не является функцией на всем $\mathbb{C}^n$, а определена, вообще говоря, только в тех точках, где знаменатель отличен от нуля. Так как L — конечномерное пространство, существует ненулевой многочлен Q, служащий общим знаменателем для всех функций из L. Достаточно рассмотреть любую конечную систему образующих пространства L, и взять в качестве Q общий знаменатель этих образующих. Определим множество X как множество точек $x \in \mathbb{C}^n$ таких, что $Q(x) \neq 0$. Тогда всякий элемент пространства L представляет собой функцию на X. Можно даже с самого начала считать, что пространство L состоит из функций на X.

Дадим теперь два общих определения, относящихся к любому множеству X и векторному пространству L функций на X со значениями, скажем, в поле комплексных чисел. Мы будем говорить, что L *содержит константы*, если функция на X, тождественно равная 1, принадлежит пространству L. Тогда, для всякого комплексного числа λ, функция на X, тождественно равная λ, также принадлежит пространству L. Скажем, что L *разделяет точки множества* X, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ найдётся такая функция $f \in L$, что $f(x) \neq f(y)$. Обозначим через L^k векторное пространство функций на X, порождённое всевозможными k-кратными произведениями функций из L. Функция $h_L(k) = \dim L^k$ называется *функцией Гильберта* пространства L.

Теорема 9 (Гильберт). *Пусть L — конечномерное векторное пространство рациональных функций на $\mathbb{C}^n$, а X — дополнение в $\mathbb{C}^n$ до множества нулей общего знаменателя пространства L. Предположим, что пространство L содержит константы и разделяет точки множества X. Если функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L$ находятся в общем положении, то система уравнений*

$$\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = 0$$

имеет ровно d корней в X, где

$$d = n! \lim_{k\to\infty} \frac{h_L(k)}{k^n}\,.$$

Рассмотрим прямое произведение $L^{\times n}$ (=прямую сумму) n копий пространства L. Пространство $L^{\times n}$ является конечномерным комплексным векторным пространством относительно покомпонентных операций сложения и умножения на комплексные числа. Всякая точка пространства $L^{\times n}$ кодирует систему уравнений. А именно, если $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, то мы будем писать $\Phi = 0$ для обозначения системы $\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = 0$. Здесь элемент Φ следует интерпретировать как отображение из X в $\mathbb{C}^n$, переводящее элемент $x \in X$ в вектор $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$. Набор функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ общего положения — это такой набор функций, что соответствующая точка в $L^{\times n}$ находится в общем положении.

Наметим теперь, как, используя теорему Гильберта, доказать теорему Кушниренко. Рассмотрим целочисленный многогранник Δ в $\mathbb{R}^n$. Мы хотим найти число корней в $X = (\mathbb{C} - 0)^n$ у общей системы уравнений вида

$$\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = 0,$$

где φ_k — многочлены с многогранником Ньютона Δ. Обозначим через $L(\Delta)$ пространство всех многочленов Лорана, многогранники Ньютона которых лежат в Δ. Предположим (хотя это не всегда так), что пространство $L(\Delta)$ содержит константы и разделяет точки. В этом случае, мы можем воспользоваться теоремой Гильберта — число корней общей системы с многогранником Ньютона Δ равно

$$d = n! \lim_{k\to\infty} \frac{h_{L(\Delta)}(k)}{k^n}\,.$$

Пусть A — множество всех целых точек в многограннике Δ. Тогда $h_{L(\Delta)}(k)$ равно числу точек в множестве $k * A$. В самом деле, поскольку пространство $L(\Delta)$ порождается мономами x^a, где $a \in A$, пространство $L(\Delta)^k$ порождается всевозможными k-кратными произведениями таких мономов, то есть мономами вида x^b, где $b \in k * A$. Разные мономы вида x^b, очевидно, линейно независимы. Согласно теореме 5, число точек в множестве $k * A$ асимптотически равно объёму многогранника $k\Delta$, который, в свою очередь, равен $k^n \mathrm{Vol}(\Delta)$. Следовательно, $d = n!\mathrm{Vol}(\Delta)$, что и утверждает теорема Кушниренко.

Задачи

1. Докажите, что пространство $L(\Delta)$ содержит константы тогда и только тогда, когда многогранник Δ содержит начало координат.

2. Если все уравнения системы $\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = 0$ умножить на один и тот же моном, то число корней в $(\mathbb{C} - 0)^n$ от этого не изменится (и даже сами корни

останутся теми же). Поэтому любая система уравнений, левые части которой принадлежат $L(\Delta)$, эквивалентна системе уравнений, левые части которой принадлежат $L(\Delta - a)$, где $a \in \mathbb{Z}^n$ — произвольная точка. Выбирая a в многограннике Δ, мы сведём теорему Кушниренко к случаю, когда многогранник Δ содержит начало координат.

3. К сожалению, пространство $L(\Delta)$ не всегда разделяет точки множества $(\mathbb{C} - 0)^n$. Приведите пример такого многогранника Δ. *Указание*: Рассмотрите тетраэдр Δ с вершинами в точках $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ и $(1, 1, 0)$. Многогранник Δ не содержит никаких других целых точек, кроме вершин. В самом деле, всякая точка многогранника Δ имеет вид

$$(\beta + \gamma, \alpha + \gamma, \alpha + \beta) = \alpha(0, 1, 1) + \beta(1, 0, 1) + \gamma(1, 1, 0),$$

где α, β, γ — неотрицательные действительные числа, связанные соотношением $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 1$. Если этот вектор имеет хотя бы одну нулевую координату (скажем, $\beta + \gamma = 0$), то по меньшей мере два из трёх чисел α, β, γ равны нулю (в нашем случае, $\beta = \gamma = 0$). Если вектор целый, то оставшееся число (в нашем случае, α) равно нулю или единице, значит, вектор совпадает с одной из вершин многогранника Δ. Пусть все три числа α, β, γ положительны. Тогда

$$\beta + \gamma \geqslant 1, \quad \alpha + \gamma \geqslant 1, \quad \alpha + \beta \geqslant 1.$$

Складывая эти равенства, получаем $2(\alpha + \beta + \gamma) \geqslant 3$, противоречие с условием $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 1$. Таким образом, для многогранника Δ из нашего примера пространство $L(\Delta)$ порождено мономами 1, $u_2 u_3$, $u_1 u_3$, $u_1 u_2$. Все эти мономы принимают одинаковые значения в точках $(1, 1, 1)$ и $(-1, -1, -1)$.

4. Пространство $L(\Delta)$ разделяет точки множества $(\mathbb{C} - 0)^n$ тогда и только тогда, когда подгруппа группы $\mathbb{Z}^n$ по сложению, порождённая всеми целыми точками многогранника Δ, совпадает с $\mathbb{Z}^n$. *Указание*: воспользуйтесь следующим алгебраическим фактом: для любой подгруппы $\Lambda \subset \mathbb{Z}^n$, существует базис $e_1, \ldots, e_n$ в $\mathbb{Z}^n$ и целые числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, такие, что векторы $\lambda_1 e_1, \ldots, \lambda_n e_n$ образуют базис в решётке Λ.

5. Пусть Δ — целочисленный многогранник в $\mathbb{R}^n$ размерности n, а k — достаточно большое натуральное число. Тогда пространство $L(k\Delta)$ разделяет точки множества $(\mathbb{C} - 0)^n$.

Теорема Гильберта также включает в себя качественное утверждение, являющееся одним из выражений принципа сохранения числа. А именно, пусть L — конечномерное пространство рациональных функций на $\mathbb{C}^n$, а X — дополнение в $\mathbb{C}^n$ до множества нулей общего знаменателя пространства L. Из теоремы Гильберта следует (по крайней мере, если L содержит константы и разделяет точки), что существует такое целое неотрицательное число d, что система общего положения

$$\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = 0,$$

где $\varphi_i \in L$, имеет ровно d корней в X.

9. Пространство $L(\Delta)$

Рассмотрим целочисленный многогранник Δ в $\mathbb{R}^n$. В следующих двух разделах мы докажем теорему Гильберта для пространства $L(\Delta)$, а заодно уточним, что значит «система общего положения», то есть выясним, как выглядит соответствующий дискриминант. Всякую функцию $\varphi \in L(\Delta)$ можно записать в виде

$$\varphi(x) = \sum_{a \in \Delta \cap \mathbb{Z}^n} \lambda_a x^a, \quad \lambda_a \in \mathbb{C}.$$

Пусть Γ — грань многогранника Δ. Обозначим через φ_Γ функцию

$$\varphi_\Gamma(x) = \sum_{a \in \Gamma \cap \mathbb{Z}^n} \lambda_a x^a.$$

Функция φ_Γ, называемая *сужением функции* φ *на грань* Γ, состоит из тех членов многочлена φ, которые соответствуют точкам грани Γ. Заметим, что некоторой заменой переменных можно привести функцию φ_Γ к многочлену Лорана от меньшего числа комплексных переменных (количество существенных переменных равно размерности грани Γ).

Рассмотрим элемент $\Phi \in L(\Delta)^{\times n}$. Если $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, то элемент Φ_Γ определяется как $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, где ψ_i — сужение функции φ_i на грань Γ. Поскольку все функции ψ_i, $i = 1, \ldots, n$, по существу, зависят от меньшего числа переменных, система $\Phi_\Gamma = 0$ переопределена. Отсюда нетрудно вывести, что при достаточно общем выборе Φ, эта система не имеет корней. Выражаясь точнее, на пространстве $L(\Delta)^{\times n}$ определён ненулевой многочлен (зависящий от Γ) со следующим свойством: если этот многочлен не обращается в нуль, то система $\Phi_\Gamma = 0$ не имеет корней. Рассматривая произведение таких многочленов по всем собственным граням Γ многогранника Δ, мы можем заключить, что система $\Phi_\Gamma = 0$ не имеет корней ни для одной собственной грани Γ, если Φ выбрана общим образом.

Теорема 10. *Пусть $X = (\mathbb{C} - 0)^n$. Предположим, что $L(\Delta)$ содержит константы и разделяет точки множества X. Рассмотрим элемент $\Phi \in L(\Delta)^{\times n}$ такой, что система $\Phi = 0$ невырожденна, а системы $\Phi_\Gamma = 0$ не имеют корней для всех собственных граней Γ многогранника Δ. Тогда функция Гильберта $h_{L(\Delta)}(k)$ асимптотически равна $n!\, d\, k^n$, где d — число корней системы $\Phi = 0$.*

Заметим, что приведённое условие на элемент $\Phi \in L(\Delta)^{\times n}$ действительно является условием общего положения. Про условия на сужения мы это уже обсудили. Нужно только убедиться в том, что система $\Phi = 0$ невырожденна, если Φ находится в общем положении. Но это вытекает из теоремы 8, учитывая, что пространство $L(\Delta)$ содержит константы и что можно привести пример такой системы с многогранником Ньютона, лежащим в Δ, которая имеет по крайней мере один невырожденный корень (приведите такой пример!).

Как мы видели, из этого варианта теоремы Гильберта вытекает теорема Кушниренко — в предположении, что пространство $L(\Delta)$ содержит константы и разделяет точки. С другой стороны, как мы знаем, всегда можно предполагать, что пространство $L(\Delta)$ содержит константы (этого можно добиться, помножив пространство $L(\Delta)$ на подходящий моном). Но что делать, если $L(\Delta)$ не разделяет точки? Как мы видели (см. задачи в разделе 8), это означает, что целые точки в многограннике Δ не порождают решётку $\mathbb{Z}^n$ как группу по сложению.

Рассмотрим систему уравнений $\Phi = 0$ с многогранником Ньютона Δ, удовлетворяющую всем условиям теоремы 10 (за исключением того, что $L(\Delta)$ разделяет точки — имеются в виду именно условия на систему $\Phi = 0$, а не условия на многогранник Ньютона). Теперь подставим вместо x набор координат $(u_1^k, \ldots, u_n^k)$, где k — целое положительное число. Получится новая система с переменными $u_1, \ldots, u_n$. Как легко видеть, многогранник Ньютона новой системы равен $k\Delta$. Кроме того, нетрудно проверить, что новая система тоже будет удовлетворять всем условиям теоремы 10, и что всякому корню старой системы соответствует ровно k^n корней новой системы (получающихся за счёт неоднозначности извлечения корня k-й степени из комплексного числа). При достаточно большом k пространство $L(k\Delta)$ будет разделять точки, и мы можем воспользоваться теоремой Кушниренко для многогранника $k\Delta$. Согласно этой теореме, новая система имеет ровно

$$n!\mathrm{Vol}(k\Delta) = k^n\, n!\mathrm{Vol}(\Delta)$$

корней. С другой стороны, число корней новой системы ровно в k^n раз больше числа корней старой системы. Значит, старая система имела ровно $n!\mathrm{Vol}(\Delta)$ корней, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 10 будет состоять из двух явных оценок на функцию Гильберта пространства $L(\Delta)$ в терминах числа d.

Задачи

1. Пусть W — некоторое векторное подпространство в $\mathbb{R}^n$, порождённое целочисленными векторами. Тогда найдётся система векторов $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}^n$ такая, что любой вектор a из $W \cap \mathbb{Z}^n$ единственным образом записывается в виде

$$a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r,$$

где $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Здесь число r совпадает с размерностью пространства W. Система векторов $a_1, \ldots, a_r$ с указанным свойством называется *базисом решётки* $W \cap \mathbb{Z}^n$.

2. Предположим, что многогранник Ньютона Δ многочлена Лорана f лежит в аффинном подпространстве пространства $\mathbb{R}^n$, проходящем через точку $a \in \mathbb{Z}^n$

и параллельном векторному подпространству $W \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим через $a_1, \ldots, a_r$ базис решётки $W \cap \mathbb{Z}^n$. Докажите, что многочлен Лорана $x^{-a} f$ может быть записан как многочлен Лорана от $x^{a_1}, \ldots, x^{a_r}$.

10. Оценка снизу

В этом разделе мы докажем, что функция Гильберта пространства $L(\Delta)$ растёт не слишком медленно. Нам понадобится следующая версия интерполяционной теоремы Лагранжа.

Теорема 11. *Рассмотрим множество Y из $d < \infty$ точек, а также некоторое пространство L комплекснозначных функций на Y. Предположим, что L содержит константы и разделяет точки. Тогда для всякого целого числа $k \geqslant d-1$, пространство L^k совпадает с пространством всех функций на Y.*

Доказательство. Для каждого элемента $x \in Y$, определим функцию δ_x, которая равна единице в точке x и нулю во всех остальных точках множества Y. Покажем, что $\delta_x \in L^{d-1}$. Для каждого элемента $y \in Y$, отличного от x, выберем функцию $f_y \in L$ такую, что $f_y(x) \neq f_y(y)$. Такая функция существует, поскольку L разделяет точки. Теперь заметим, что

$$\delta_x = \prod_{y \neq x} \frac{f_y - f_y(y)}{f_y(x) - f_y(y)} .$$

Поскольку правая часть является произведением $d-1$ функции из L, мы получаем, что $\delta_x \in L^{d-1}$ (мы здесь воспользовались тем, что константы $f_y(x)$, $f_y(y)$ принадлежат пространству L). Как легко видеть, любую функцию f на Y можно представить как линейную комбинацию функций δ_x:

$$f = \sum_{x \in Y} f(x)\, \delta_x.$$

Следовательно, пространство L^{d-1} совпадает с пространством всех функций на Y. Для всех $k \geqslant d-1$ пространство L^k тоже совпадает с пространством всех функций на Y, так как L содержит 1. □

Теперь мы можем доказать оценку снизу на рост функции Гильберта пространства $L(\Delta)$. При наших предположениях на многогранник Δ, пространство $L(\Delta)$ содержит константы и разделяет точки.

Теорема 12. *Допустим, что пространство L комплексных функций на некотором множестве X содержит константы и разделяет точки. Предположим также, что в X найдутся непересекающиеся подмножества $U_1, \ldots, U_d$ и функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L$ такие, что отображения*

$\Phi_i\colon U_i \to \mathbb{C}^n$, заданные формулами

$$\Phi_i(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)),$$

представляют взаимно однозначные соответствия между U_i и некоторыми открытыми подмножествами V_i в $\mathbb{C}^n$, содержащими 0. Наконец, потребуем, чтобы для всякой функции $f \in L$ функции $f \circ \Phi_i^{-1}$ были бесконечно дифференцируемыми в 0 в смысле комплексного анализа. Тогда имеет место оценка $h_L(k+d-1) \geqslant d\binom{n+k}{n}$.

Заметим, что в условии теоремы поле $\mathbb{C}$ можно заменить полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Доказательство не изменится.

Доказательство. Начнём с элементарного вычисления. Нетрудно посчитать число мономов от n переменных степени $\leqslant k$. Оно в точности равно $\binom{n+k}{n}$. (Если читатель не знаком с этим вычислением, то рекомендуется его проделать; идея состоит в том, что всякий такой моном можно закодировать последовательностью из k нулей и n единиц, в которой нули кодируют переменные или константу 1, а единицы отделяют различные переменные друг от друга, а также переменные от константы 1).

Рассмотрим теперь векторное пространство $\mathcal{P}_k$ над полем комплексных чисел, состоящее из наборов $(p_1, \dots, p_d)$ многочленов p_i на $\mathbb{C}^n$ степени не выше k. Размерность пространства $\mathcal{P}_k$ равна $d\binom{n+k}{n}$, согласно упомянутому вычислению. Операции сложения векторов и умножения векторов на комплексные числа в пространстве $\mathcal{P}_k$ выполняются покомпонентно. Определим линейное отображение $\pi_k\colon L^{k+d-1} \to \mathcal{P}_k$ следующим образом: функция $f \in L^{k+d-1}$ переходит в набор $(p_1, \dots, p_d)$, в котором многочлен p_i представляет члены порядка $\leqslant k$ в степенном разложении функции $f \circ \Phi_i^{-1}$ в начале координат.

Мы хотим доказать, что образ пространства L^{k+d-1} при отображении π_k совпадает с $\mathcal{P}_k$. Другими словами, для всякого набора многочленов $p_1, \dots, p_d$, можно найти функцию $f \in L^{k+d-1}$ такую, что степенное разложение функции $f \circ \Phi_i^{-1}$ в окрестности начала координат начинается в точности с многочлена p_i. Достаточно предположить, что один многочлен p_i является мономом степени k, а остальные многочлены равны нулю. Если мы докажем утверждение для этого частного случая, то, пользуясь отображениями π_k при различных k и свойством линейности этих отображений, можно получить и общее утверждение. Итак, допустим, что

$$p_i(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \zeta_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \zeta_n^{a_n}.$$

Рассмотрим функцию $f_0 = \varphi_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_n^{a_n}$. Ясно, что $\pi_k(f_0)$ имеет вид $(p_i, \dots, p_i)$ (на всех местах стоит один и тот же моном p_i). Это вытекает из того, что функция $\varphi_j \circ \Phi_l^{-1}$ совпадает с ζ_j для каждого $l = 1, \dots, d$. Пусть $x_i = \Phi_i^{-1}(0)$. Тогда функция $f = \delta_{x_i} f_0$ удовлетворяет условию

$\pi_k(f) = (0, \ldots, p_i, \ldots, 0)$ (на i-м месте стоит p_i, на остальных местах нули). Кроме того, как нетрудно видеть, $f \in L^{k+d-1}$. □

Мы можем применить эту теорему к пространствам $X = (\mathbb{C} - 0)^n$ и $L = L(\Delta)$. Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L(\Delta)$, и система уравнений $\varphi_1 = \ldots = \varphi_n = 0$ невырожденна, то, по теореме об обратной функции, найдутся такие непересекающиеся окрестности $U_1, \ldots, U_d$ корней этой системы, что отображение $\Phi\colon X \to \mathbb{C}^n$, заданное формулой

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)),$$

осуществляет взаимно однозначное соответствие между U_i и некоторыми окрестностями начала координат в $\mathbb{C}^n$. Обозначим через Φ_i ограничение отображения Φ на U_i. Легко видеть, что все условия теоремы 12 выполнены. Мы можем заключить, что функция Гильберта пространства $L(\Delta)$ удовлетворяет неравенству

$$\dim L(\Delta)^k \geqslant d\binom{n+k}{n}.$$

11. Оценка сверху

Наконец, нам нужно построить оценку сверху на рост функции Гильберта пространства $L(\Delta)$. Первый шаг такой.

Предложение 13. *Пусть система* $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L(\Delta)^{\times n}$ *удовлетворяет всем условиям теоремы* 10. *Тогда для всякой функции* $f \in L(\Delta)$ *найдётся такая константа* $C > 0$, *что*

$$|f| \leqslant C(|\varphi_1| + \cdots + |\varphi_n| + 1).$$

Последнее неравенство (оценка сверху для $|f|$) означает, что, неформально говоря, у системы $\varphi_1 = \cdots = \varphi_n = 0$ нет корней на бесконечности. Доказательство этого предложения будет разбито на задачи. При этом используются задачи 3 и 4 из раздела 1.

Задачи

1. Рассмотрим систему функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L(\Delta)$ и некоторую точку $a \in \Delta$. Предположим, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся точка $x \in X = (\mathbb{C} - 0)^n$ такая, что

$$|\varphi_1(x)| + \cdots + |\varphi_n(x)| < \varepsilon |x^a|,$$

и при этом $|x^a|$ сколь угодно велико. Тогда найдётся собственная грань Γ многогранника Δ со следующим свойством: для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся точка $x \in X$ такая, что

$$|\varphi_{1,\Gamma}(x)| + \cdots + |\varphi_{n,\Gamma}(x)| < \varepsilon |x^b|,$$

где b — некоторая целая точка грани Γ. Здесь $\varphi_{i,\Gamma}$ обозначает сужение функции φ_i на грань Γ.

2. Предположим, что система функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L(\Delta)$ обладает следующим свойством: для всякой собственной грани Γ многогранника Δ, функции $\varphi_{i,\Gamma}$, $i = 1, \ldots, n$, не обращаются одновременно в нуль на X. Тогда для всякой функции $f \in L(\Delta)$ найдётся такая константа $C > 0$, что $|f| \leqslant C(|\varphi_1| + \cdots + |\varphi_n| + 1)$.

Рассмотрим систему $\Phi \in L(\Delta)^{\times n}$, удовлетворяющую всем условиям теоремы 10. Напомним, что Φ можно рассматривать как функцию из $X = (\mathbb{C} - 0)^n$ в $\mathbb{C}^n$. Существует ненулевой многочлен D от n переменных, такой, что при $D(z) \neq 0$, система уравнений $\Phi(x) = z$ имеет ровно d корней. Это вытекает из теоремы 8. Заметим, что $\Phi - z \in L(\Delta)^{\times n}$, поскольку пространство $L(\Delta)$ содержит константы. Пусть $f \in L(\Delta)^k$ (напомним, что пространство $L(\Delta)^k$ порождается всевозможными k-кратными произведениями элементов пространства $L(\Delta)$). Определим такую функцию:

$$S_f(z) = \sum_{\Phi(x)=z} f(x),$$

где сумма берётся по всем корням $x \in X$ системы уравнений $\Phi(x) = z$. Эта функция определена для всех значений z, для которых $D(z) \neq 0$. Нам понадобится следующее утверждение

Предложение 14. *Если $f \in L(\Delta)^k$, то функция S_f однозначно продолжается до некоторого многочлена степени $\leqslant k$.*

Доказательство этого утверждения будет представлено в виде ряда задач. Но сначала, пользуясь этим утверждением, мы докажем верхнюю оценку на размерность пространства $L(\Delta)^k$.

Теорема 15. *В предположениях теоремы* 10, *функция Гильберта пространства $L(\Delta)$ оценивается сверху следующим образом*:

$$\dim L^k(\Delta) \leqslant d\binom{n+k+d-1}{n}.$$

Доказательство. Пусть $x_1^0, \ldots, x_d^0$ — все корни невырожденной системы $\Phi(x) = 0$. Рассмотрим такие функции $g_1, \ldots, g_d \in L^{d-1}(\Delta)$, что g_i равна единице в точке x_i^0 и нулю во всех точках x_j^0, $j \neq i$. Тогда, для всякого $z \in \mathbb{C}^n$ достаточно близкого к нулю, векторы $(g_i(x_1), \ldots, g_i(x_d))$ (где $x_1, \ldots, x_d$ — все корни системы $\Phi(x) = z$) линейно независимы. Согласно предложению 14, функции S_{fg_i} однозначно продолжаются до некоторых многочленов степени $k + d - 1$ на $\mathbb{C}^n$.

Пусть $p_1, \ldots, p_d$ — многочлены степени $k + d - 1$ на $\mathbb{C}^n$. Допустим, мы знаем, что $S_{fg_i} = p_i$ при всех $i = 1, \ldots, d$. Из этого условия функция f восстанавливается однозначно. В самом деле, для того, чтобы найти значения функции f во всех корнях x системы уравнений $\Phi(x) = z$, нужно решить линейную систему

$$g_1(x_1)f(x_1) + \dots + g_1(x_d)f(x_d) = p_1(z),$$
$$\dots$$
$$g_d(x_d)f(x_d) + \dots + g_d(x_d)f(x_d) = p_d(z)$$

относительно неизвестных $f(x_1)$, $\dots$, $f(x_d)$. Согласно нашему выбору функций g_i, эта система имеет единственное решение при достаточно маленьких z. Таким образом, функция f полностью восстанавливается, по крайней мере, для таких точек $x \in X$, что $\Phi(x)$ лежит в малой окрестности начала координат. Однако, будучи многочленом Лорана, функция f уже полностью определяется этими значениями (мы пользуемся таким простым фактом: если два многочлена Лорана совпадают на открытом множестве, то они совпадают везде).

Теперь, чтобы оценить сверху размерность пространства функций $f \in L^k(\Delta)$, достаточно посчитать размерность пространства $\mathcal{P}_{k+d-1}$ всех наборов $(p_1, \dots, p_d)$ из многочленов степени $\leqslant k+d-1$ на $\mathbb{C}^n$. Размерность последнего пространства мы уже вычисляли, она равна

$$d\binom{n+k+d-1}{n}.$$

Тем самым желаемая оценка доказана. □

Мы теперь получили как верхнюю, так и нижнюю оценку для функции Гильберта пространства $L(\Delta)$. Заметим, что обе оценки асимптотически равны $\frac{d}{n!}k^n$. Это завершает доказательство теоремы 10.

Нам осталось только доказать предложение 14: для $f \in L^k(\Delta)$ функция S_f однозначно продолжается до полинома на $\mathbb{C}^n$, степень которого не превосходит k. Это доказательство разбито на задачи, некоторые из которых требуют знакомства с одномерным комплексным анализом (а именно, с простейшими свойствами голоморфных функций от одной переменной).

Задачи. Напомним, что функция S_f определена на дополнении в $\mathbb{C}^n$ ко множеству $D = 0$, где D — некоторый ненулевой многочлен.

1. Докажите, что существует такая константа $C' > 0$, что

$$|S_f(z)| \leqslant C'(|z_1| + \dots + |z_n| + 1)^k.$$

Указание: это вытекает из имеющейся оценки на функцию f:

$$|f| \leqslant C(|\varphi_1| + \dots + |\varphi_n| + 1).$$

2. Пусть Λ — такая прямая в $\mathbb{C}^n$, что ограничение многочлена D на Λ не равно тождественно нулю. Тогда, по основной теореме алгебры, ограничение многочлена D на Λ обращается в нуль только в конечном числе точек. Рассмотрим ограничение функции S_f на прямую Λ. Докажите, что это ограничение однозначно

продолжается до многочлена на Λ степени $\leqslant k$. *Указание*: воспользуйтесь следующим фактом, вытекающим из теоремы об устранимой особенности и теоремы Лиувилля: если голоморфная функция h от одной комплексной переменной определена на всем $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа точек, ограниченна в некоторых проколотых окрестностях этих точек, и удовлетворяет неравенству $|h(u)| \leqslant C(|u|+1)^k$ во всей области определения для некоторых $C, k > 0$, то h однозначно продолжается до многочлена на $\mathbb{C}$, степень которого не превышает k.

3. Предположим, что функция F определена на $\mathbb{C}^2$, и что ограничение этой функции на всякую прямую в $\mathbb{C}^2$ является многочленом степени не выше k. Тогда и сама функция F является многочленом степени не выше k. *Указание*: рассмотрим набор из $k+1$ параллельных прямых. Введём координаты (u, v) на $\mathbb{C}^2$, такие, что выбранные параллельные прямые задаются уравнениями $v = v_i$, $i = 0, \ldots, k$. По предположению, функции $F_i(u) = F(u, v_i)$ являются многочленами от u. Определим многочлен G по формуле

$$G(u,v) = \sum_{i=0}^{k} F_i(u) \frac{\prod_{j\neq i}(v - v_j)}{\prod_{j\neq i}(v_i - v_j)} .$$

Тогда G совпадает с F на каждой прямой, пересекающей $k+1$ выбранных прямых. Следовательно, $G = F$ всюду.

4. Докажите, что функция S_f, определённая выше, однозначно продолжается до многочлена на $\mathbb{C}^n$, степень которого не превосходит k. *Указание*: воспользуйтесь результатом задачи 2, и обобщите рассуждения из задачи 3.

Список литературы

[1] А.Г. Хованский. *Многогранник Ньютона, полином Гильберта и суммы конечных множеств* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 26, вып. 4, 1992. С. 57–63.

[2] А.Г. Хованский. *Суммы конечных множеств, орбиты коммутативных полугрупп и функции Гильберта* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 29, вып. 2, 1995. С. 36–50.

[3] A.G. Kouchnirenko. *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor* // Invent. Math. Vol. 32, no. 1, 1976. P. 1–31.

Владлен Анатольевич Тиморин, факультет математики, Высшая Школа Экономики.
Email: `vtimorin@hse.ru`

Аскольд Георгиевич Хованский, Институт Системных Исследований РАН, отделение математики, университет Торонто, Канада
Email: `askold@math.toronto.edu`