

---

---

# Наш семинар: математические сюжеты

---

---

## Проекция Меркатора, логарифм и мореплавание

А. В. Боровик      О. М. Худавердян

Для нетерпеливого и грамотного читателя сразу оговоримся, что основное математическое содержание этого этюда сводится к классическому предложению:

*цилиндр — униформизирующая поверхность для логарифма.*

Тем не менее думается, что содержание нашей заметки — интерпретация проекции Меркатора как логарифма в комплексной области — в той или иной степени должно входить в любой курс комплексного анализа — но почему-то мы там этого не нашли.<sup>1)</sup>

### 1. ИСТОРИЧЕСКОЕ ПРЕДИСЛОВИЕ

Если корабль должен из точки А приплыть в точку В, как ему проложить маршрут? Конечно, кратчайшее расстояние — это дуга большого круга. Но чтобы проложить такой маршрут, нужно уметь определять местоположение корабля в любой точке пути. А представьте, что на корабле есть только компас и скорость корабля точному измерению не поддаётся. Тогда можно выбрать маршрут — траекторию, которая проходит через точки А и В и составляет постоянный угол с меридианами — локсодрому. Если этот угол известен, то с помощью компаса курс фиксируется.

---

<sup>1)</sup>Наш систематический (и все ещё продолжающийся) поиск в литературе привёл пока что только к одной современной книге, касающейся нашей главной темы. Эта книга — популярная история тригонометрии, написанная Эли Маором [11]. Тем не менее интерпретация проекции Меркатора как логарифма в комплексной области приводилась в старых учебниках комплексного анализа [6].

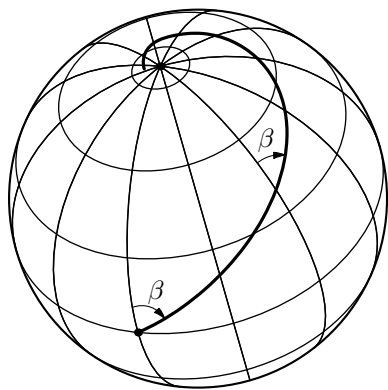


Рис. 1. Локсодрома

При этом, даже если скорость корабля не контролируется — что и было в парусную эпоху, то он всё равно не сбивается с курса! (Мы пренебрегаем сносом и течением). Мы видим как жизненно важна локсодрома и определение угла, который составляет локсодрома с меридианами.

Конечно, меридианы и параллели — локсодромы. Если точки А и Б имеют одинаковую долготу (широту), то надо держать курс на Север или на Юг (на Восток или на Запад). Как же быть если точки А и Б имеют разную долготу и разную широту?

А что если б можно было построить карту Земли в которой *все* локсодромы, не только меридианы и широты, были бы прямыми линиями?



Рис. 2. Корабельный компас в кардановой подвеске

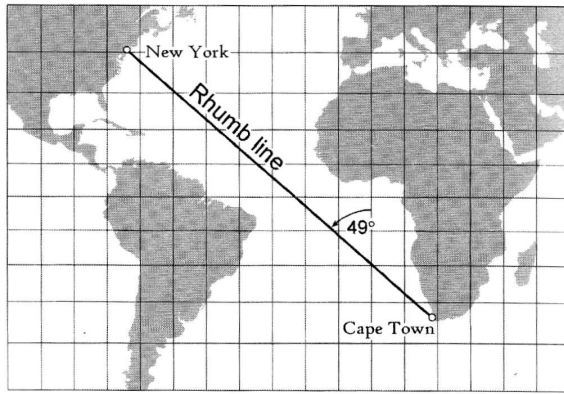


Рис. 3. Линия постоянного курса

Имея такую карту, капитан корабля с линейкой в руках одним движением карандаша, соединив точки А и В отрезком прямой, определял бы угол и соответственно фиксировал бы курс корабля.

Сразу же отметим, что многие карты мира, которые мы знаем с детства, этим свойством обладают. Это заслуга Меркатора.

Давайте попробуем повторить изобретение Меркатора. Мы, вооружённые знанием некоторых формул математики XX века, построим за Меркатора, то что он сделал в XVI веке (видимо, не применяя математики, а только следуя интуитивному пониманию, какие преобразования карты сохраняют углы). И сделав это, он на самом деле заложил основание этих формул.

Почти как у Манделъштама:

*Быть может, прежде губ уже родился шепот  
И в бездревесности кружились листы ...*

## 2. ЛОКСОДРОМЫ НА СФЕРЕ – ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ СПИРАЛИ – ПРЯМЫЕ ЛИНИИ. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

### 2.1. СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Пусть  $\theta, \varphi$  – стандартные сферические координаты на сфере

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

тогда  $x = R \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = R \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = R \cos \theta$  (рис. 4).

Если  $\alpha(t) = (\theta(t), \varphi(t))$  – кривая на сфере, то касательный вектор  $(x_t, y_t, z_t)$  к ней в точке  $(\theta, \varphi)$  равен

$$R(\cos \theta \cdot \cos \varphi \cdot \theta_t - \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \varphi_t, \cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot \theta_t + \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \varphi_t, -\sin \theta \cdot \theta_t),$$

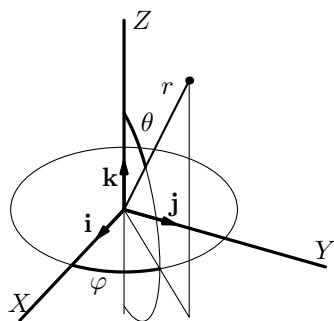


Рис. 4. Сферические координаты

а касательный вектор к меридиану  $\theta = t, \varphi = \text{const}$  в той же точке равен

$$R(\cos \theta \cdot \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta).$$

Поэтому косинус угла наклона  $\alpha(t)$  кривой к меридиану сразу находится из формулы для скалярного произведения и равен

$$\cos \alpha(t) = \frac{\theta_t(t)}{\sqrt{\theta_t^2 + \sin^2 \theta(t) \varphi_t^2(t)}}. \quad (1)$$

Кривая  $(\theta(t), \varphi(t))$  — локсодрома, если

$$\frac{\theta_t(t)}{\sqrt{\theta_t^2 + \sin^2 \theta(t) \varphi_t^2(t)}} = \text{const}, \quad \frac{\theta_t}{\varphi_t} = \pm \frac{c}{1 - c^2} \sin \theta. \quad (2)$$

Это дифференциальное уравнение локсодромы. Перейдя к параметру  $t = \varphi, \theta = \theta(\varphi)$  мы видим, что

$$\varphi(\theta) = k \int \frac{d\theta}{\sin \theta} = k \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \varphi_0. \quad (3)$$

В случае когда  $\cos \alpha = 0, \theta_t \equiv 0$ , локсодрома — параллель  $\theta = \theta_0$ .

## 2.2. СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

Функция  $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$  напоминает нам о стереографической проекции. И это верное наблюдение.

При стереографической проекции сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

на плоскость  $z = 0$  каждая точка

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta$$

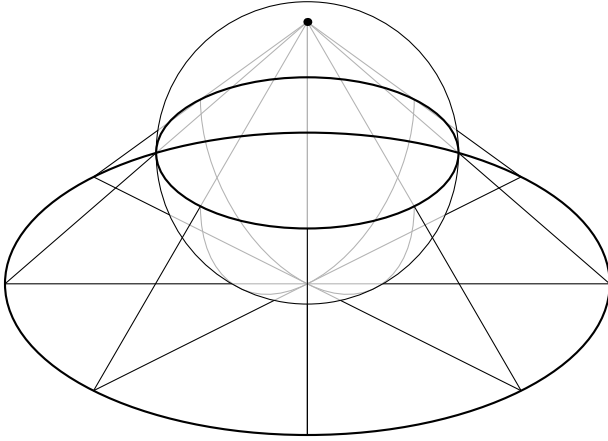


Рис. 5. Стереографическая проекция

сферы переходит в точку  $x = u$ ,  $y = v$ ,  $z = 0$  такую, что эти две точки лежат на одной прямой с Северным полюсом, точкой  $(0, 0, 1)$ .

Следовательно, точка с декартовыми координатами  $(x, y, z)$  на сфере переходит в такую точку с декартовыми координатами  $(u, v)$  на плоскости, что

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{1-z}{1},$$

то есть

$$\begin{cases} x = \frac{u}{1+u^2+v^2}, \\ y = \frac{v}{1+u^2+v^2}, \\ z = \frac{u^2+v^2}{1+u^2+v^2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u = \frac{x}{1-z}, \\ v = \frac{y}{1-z}. \end{cases} \quad (4)$$

### 2.3. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ СПИРАЛЬ

Стереографическая проекция (4) устанавливает взаимно однозначное соответствие между сферой (без северного полюса) и точками плоскости  $z = 0$ . Если  $r, \varphi$  — полярные координаты на плоскости  $z = 0$ ,  $r = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{u}{v}$ , то получаем, что

$$\frac{r}{R \sin \theta} = \frac{R}{R(1 - \cos \theta)}, \quad R = r \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \quad (5)$$

(то же самое видно на рис. 6).

При стереографической проекции точка с сферическими координатами  $(\theta, \varphi)$  на сфере переходит в точку с плоскости  $z = 0$  с полярными

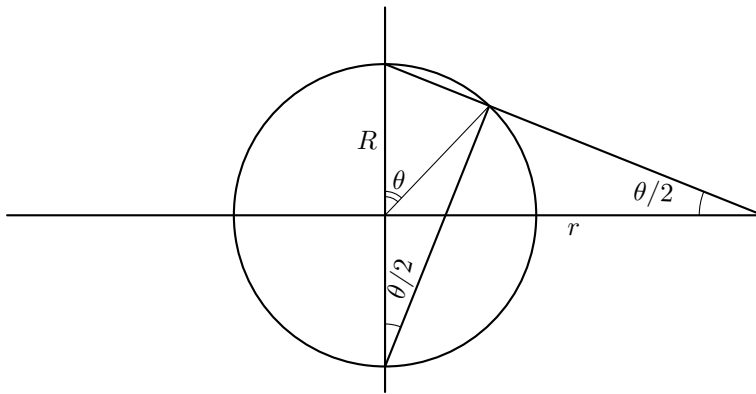


Рис. 6. Стереографическая проекция: формула (5)

координатами  $(R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \varphi)$ . Значит, образом локсодромы (3) в стереографической проекции будет кривая на плоскости  $z = 0$ , задаваемая уравнением

$$\varphi = k \log \frac{r}{R} + \varphi_0. \quad (6)$$

Это логарифмическая спираль (рис. 7). Немного позже мы объясним это явление качественно, используя азы конформной геометрии.

Заметим, что логарифмическая спираль характеризуется тем, что пересекает все выходящие из начала координат радиальные линии под постоянным углом. Насекомые летят на свечку по логарифмической спирали — у них есть инстинкт лететь под постоянным углом к источнику света.

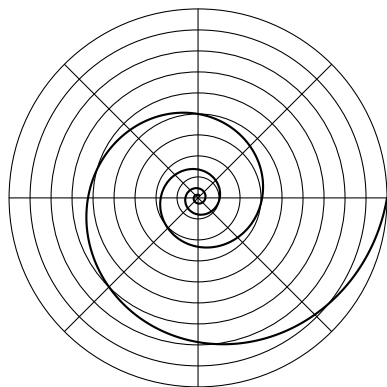


Рис. 7. Логарифмическая спираль

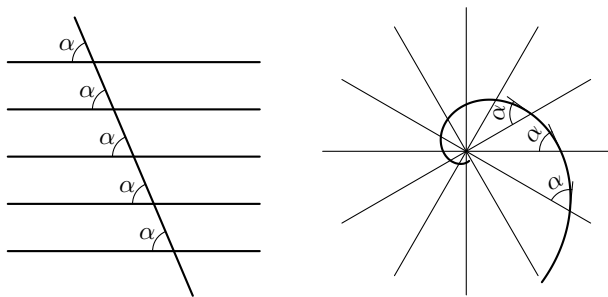


Рис. 8. Полет насекомого — по прямой и по спирали. Источник: Христо Бояджиев [5].

В природе источник света — солнце или луна, и их метод навигации обеспечивает насекомым полет по прямой линии — локсодроме их насекомого мира (рис. 8).

Интересно, что причина на то — инструментальная, точно как зависимость мореплавателя от компаса. У насекомых глаза фасеточные и состоят из многих узко направленных *омматидиев*, индивидуальных световых рецепторов (рис. 9). Луч света стимулирует небольшую группу омматидиев (их оптические оси расходятся под углами  $1^\circ$ – $6^\circ$ , см. [1]), тем самым задавая угол на источник света. Когда лучи параллельны и насекомые хотят лететь по прямой линии, они летят по такой линии, чтобы все время активировалась одна группа омматидиев [5, 7].

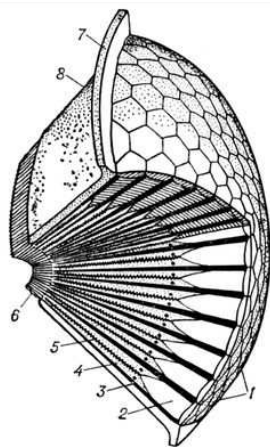


Рис. 9. Фасеточный глаз в разрезе



Рис. 10. Паутина. Паук сначала натягивает радиальные нити, а потом разматывает спираль, от центра к краю. Невольно кажется, что его проект основан на принципе постоянства углов между спиральными и радиальными нитями. Обратите внимание, что спираль много плотнее в центре, как и положено логарифмической спирали. Источник: [4]

#### 2.4. ПРОЕКЦИЯ МЕРКАТОРА

А теперь ровно один шаг до проекции Меркатора. Рассмотрим отображение  $W = \log \frac{Z}{R}$  комплексной плоскости  $Z = u + iv$  в комплексную плоскость  $W = s + it$ : если  $Z = u + iv = \rho e^{i\varphi}$ , то

$$W = \log \frac{Z}{R} = \log \frac{\rho}{R} + i\varphi, \text{ т. е. } s = \log \frac{\rho}{R}, t = \varphi. \quad (7)$$

Очевидно, что это отображение переводит образ локсодромы (6) в прямую. Композиция стереографической проекции и функции  $W = \log \frac{Z}{R}$

$$(\theta, \varphi) \mapsto R \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \mapsto \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + i\varphi \quad (8)$$

отображает локсодрому  $\varphi = k \log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$  на сфере в прямую  $t = ks$ . В частности меридианы  $\varphi = \varphi_0$  переходят в прямые  $t = \varphi_0$  и параллели  $\theta = \theta_0$  переходят в отрезки прямых  $s = \log \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}$ .

Конечно, для того чтобы функция  $W = \operatorname{Log} Z$  была определена на всей комплексной плоскости, нужно, например, отождествить в образе точки  $\pm i\pi t$ , то есть нужно полагать, что функция (7) принимает значения на цилиндре.



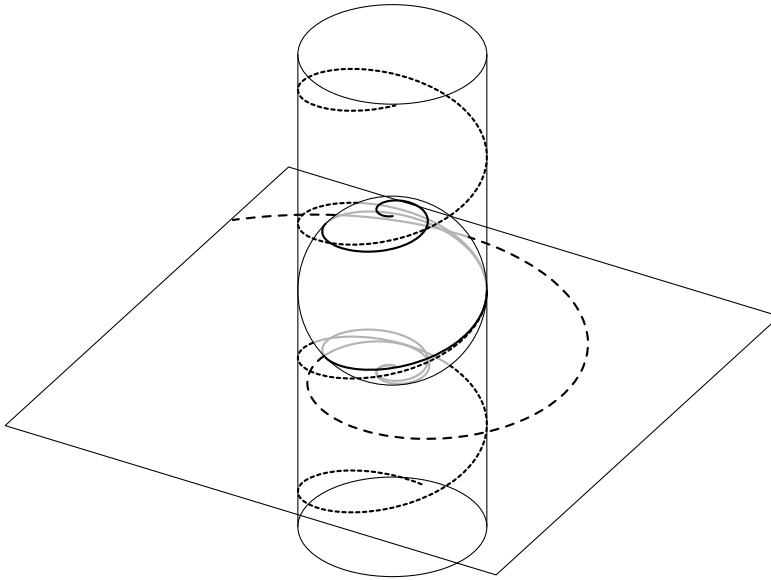


Рис. 11. Локсодрома на сфере, логарифмическая спираль на плоскости и винтовая линия на цилиндре

Подытожим наши вычисления. Мы показали, что отображение (8) отображает сферу с выколотыми полюсами на полосу

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi/2$$

с отождествлёнными краями (цилиндрическую поверхность); при этом все локсодромы, в том числе и меридианы, и параллели переходят в прямые линии (винтовые линии). Это и есть карта Земли по Меркатору (без Арктики и Антарктики).

Теперь попробуем уяснить смысл этих вычислений.

### 3. ПРОЕКЦИЯ МЕРКАТОРА КАК КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

#### 3.1. КОНФОРМНОСТЬ ПРОЕКЦИИ МЕРКАТОРА

В предыдущем разделе мы прямыми вычислениями, решив соответствующее дифференциальное уравнение, нашли локсодромы на сфере и увидели, что при стереографической проекции они превращаются в логарифмические спирали. Затем мы показали, что функция  $\text{Log } z$ , отображая сферу на прямоугольную полосу плоскости (более точно — сферу без полюсов на цилиндрическую поверхность). Обсудим это явление качественно.

При проекции Меркатора сохраняются углы локсодром с меридианами, значит и сохраняются углы между локсодромами. Отсюда следует, что проекция Меркатора — это конформное отображение: отображение сохраняет угол между любыми двумя векторами касательными к данной точке сферы.

### 3.2. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Стереографическая проекция сферы на плоскость — это тоже конформное отображение<sup>2)</sup>, при котором параллели переходят в концентрические окружности и меридианы переходят в лучи, исходящие из центра. Значит, каждая локсодрома в стереографической проекции должна пересекать все лучи, исходящие из начала координат, под одним и тем же углом. Это условие как раз и определяет логарифмическую спираль. Конформное отображение

$$Z \mapsto \text{Log } Z$$

отображает лучи, исходящие из начала координат, в прямые, параллельные вещественной прямой, и локсодромы, составляющие угол  $\alpha$  с меридианами, в прямые (винтовые линии), составляющие угол  $\alpha$  с вещественной прямой.

### 3.3. ПАРА ВЕЛИКИХ ИМЁН

И тут становится незаменимой великая идея Бернхарда Римана: при помощи стереографической проекции отождествить комплексную плоскость  $\mathbb{C}$  со сферой, добавив к плоскости точку  $\infty$  на бесконечности, приравняв её к северному полюсу сферы; неудивительно, что эта конструкция называется *римановой сферой*. Идея рассматривать цилиндр как естественную область значений комплексного логарифма  $\text{Log } Z$  (тем самым избавляясь от всех проблем, порождаемых его многозначностью) тоже восходит к Риману; этот трюк называется *униформизацией*. Геометрия цилиндра, бесконечного в длину и периодического поперёк себя, воплощает в себе фундаментальный принцип периодичности экспоненциальной функции

$$z \mapsto e^z,$$

что происходит, конечно, потому что

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z,$$

---

<sup>2)</sup> Действительно, метрика сферы в стереографических координатах имеет вид  $\frac{du^2 + dv^2}{(1 + u^2 + v^2)^2}$  и потому отличается от стандартной евклидовой метрики  $du^2 + dv^2$  на плоскости только скалярным множителем. Следовательно, локально это гомотетия и потому сохраняет углы.

где в вычислении прячется великое тождество Эйлера<sup>3)</sup>

$$e^{\pi i} = -1.$$

Логарифм — обратная функция к экспоненте, и периодичность экспоненты делает логарифм многозначной функцией. При униформизации мы приравниваем точки с одинаковыми экспонентами, то есть отождествляем комплексные числа  $z$  и  $z + 2k\pi i$  для всех целых значений  $k$ ; но это и означает свернуть плоскость в цилиндр.<sup>4)</sup>

После этих отождествлений проекция Меркатора становится ничем иным, как самим логарифмом

$$Z \mapsto \text{Log } Z.$$

Вернёмся на секунду к насекомым, тем самым, которые летят под постоянным углом к источнику света. В природе источник света — солнце или луна — находится на бесконечности, что обеспечивает насекомым полет по прямой линии. Если же свет исходит из обманной свечки в начале координат  $Z = 0$ , то чешуекрылые навигаторы оказываются на логарифмической спирали, накручивающейся на свечку [5].<sup>5)</sup> Взятие логарифма посылает свечку в бесконечность и развёртывает спираль в спасительную прямую.

### 3.4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Очевидно, что отображение

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto az \end{aligned}$$

— конформное отображение, так как оно поворачивает каждый вектор  $z$  на угол  $\arg a$  и растягивает его в  $|a|$  раз. Но конформность — свойство, которому достаточно выполняться в «бесконечно малом» масштабе вокруг

<sup>3)</sup> Википедия утверждает, что знаменитая формула Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

была открыта в 1714 году Роджером Коутсом, причём в логарифмической форме:

$$\log(\cos x + i \sin x) = ix.$$

<sup>4)</sup> Поскольку  $z \mapsto \text{Log } z$  отображает комплексную плоскость на цилиндр, одна из конструкций логарифмической линейки для умножения комплексных чисел основана на этом принципе и соответственно имеет форму цилиндра, см. [3] (источник подсказан Рональдом Дорфлером).

<sup>5)</sup> Полезно помнить одно трагическое свойство логарифмической спирали: длина её накручивающейся части всегда конечна — несмотря на то, что она успевает сделать бесконечное число оборотов. Мы оставляем проверку этого классического факта как упражнение для читателя. Кстати, а остаётся ли свойство конечности длины верным применительно к локсодроме на сфере?

каждой точки. Поэтому если функция  $w = F(z)$  из некоторой области  $\mathbb{C}$  в  $\mathbb{C}$  дифференцируема, то она в каждой точке этой области приближается линейной функцией,

$$\Delta w \approx F'(z)\Delta z,$$

и потому является конформным отображением. В частности, каждая аналитическая функция

$$z \mapsto a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$$

дифференцируема в своей области абсолютной сходимости и по сему определяет конформное отображение. Верно и обратное — конформное отображение из открытой области вещественной плоскости  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^2$ , сохраняющее ориентацию — аналитическая функция. Действительно, условие конформности означает, что якобиан функции  $(x, y) \mapsto (u, v)$  положителен (сохранение ориентации) и матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

является произведением скалярной матрицы и матрицы ортогональной, что в точности и означает выполнение уравнений Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Остальное — классическая теория функций комплексной переменной. Заметим при этом, что взаимно однозначные конформные отображения римановой сферы с выколотыми полосами на цилиндр являются композициями логарифма и линейных функций. Мы оставляем проверку этого факта читателю.

### 3.5. ОБРАТНО К МАНДЕЛЬШТАМУ

А теперь немного общих рассуждений. Мы тут всё красиво объяснили, используя функцию комплексной переменной  $\text{Log } Z$ . Логарифм уже присутствовал, в скрытом виде, в самом принципе меркаторовой проекции как проекции, сохраняющей углы!

Трудно удержаться и не привести гениальное стихотворение Мандельштама полностью:

*И Шуберт на воде, и Моцарт в птичьей гониме,  
И Гете, свищущий на вьющейся тропе,  
И Гамлет, мысливший пугливыми шагами,  
Считали пульс толпы и верили толпе.  
Быть может, прежде губ уже родился шепот,*

*И в бездревесности кружились листы,  
И те, кому мы посвящаем опыт,  
До опыта приобрели черты.*

#### 4. НАЗАД В ИСТОРИЮ: КАК ЭТО ВСЁ НА САМОМ ДЕЛЕ БЫЛО

##### 4.1. МАТЕМАТИКА *без* МАТЕМАТИКИ или МАТЕМАТИКА *до* МАТЕМАТИКИ?

Меркатор так никогда и не объяснил, как он получил свою знаменитую карту. Но он жёстко настаивал, что она передаёт локсодромы прямыми линиями. Его главное достижение было в том, что он сформулировал понятие конформной карты как карты, правильно передающей углы.

Возможно, что Меркатор и действовал без математики, на голой интуиции. Она у него могла быть. Он был мастер изготовления точных и высоко художественных глобусов. Глобус делался из плоских бумажных долек (рис. 12), которые наклеивались на деревянный шар. Так как изометрично отобразить ни плоскость, ни её кусок на фрагмент сферы нельзя, необходима ручная подгонка — бумагу намачивали и растягивали, чтобы она плотно, без щелей и морщин легла на шар. Возможно, Меркатор чувствовал геометрию сферы кончиками пальцев.

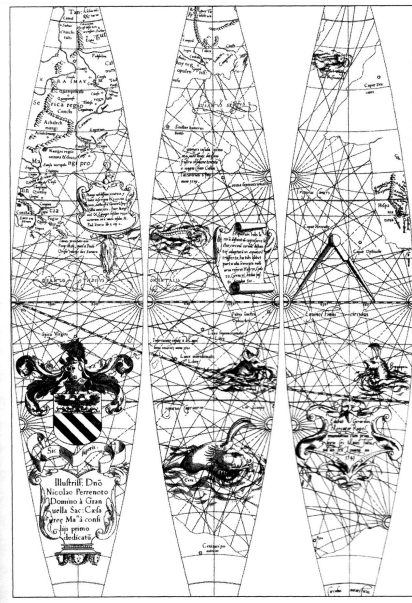


Рис. 12. Сегменты глобуса 1541 года

А ещё Меркатор был первым, кто предложил идею атласа, составленного из карт в одном масштабе и перекрывававшихся по краям — и ввёл само слово «атлас» в употребление. Математикам это тоже должно что-то такое напоминать . . .

#### 4.2. ЭДВАРД РАЙТ И СУММИРОВАНИЕ ИСКАЖЕНИЙ

По стандартам математики, Эдвард Райт (1561–1615) прожил колоритную жизнь. После изучения математики в Кембридже и нескольких лет преподавания, он был избран членом Кейз Колледжа в 1587 году. Завоевав репутацию эксперта по математическим методам навигации, в 1589 году он по приказу королевы Елизаветы был приписан в качестве навигатора к известной пиратской экспедиции Эрла Кумберлендского, охотившейся вокруг Азорских островов за испанскими золотыми галеонами. Протоколы колледжа деликатно упоминают, что Райту был предоставлен академический отпуск «по Высочайшему Указу».

В 1600 году он окончательно покинул Кембридж и переехал в Лондон, где принял пост советника по навигации Ост-Индской Компании. К тому времени он уже опубликовал свою знаменитую книгу.

Анализируя метод Меркатора, Райт начал искать формулы, которые описывали бы растяжение сегмента глобуса (вроде того, что изображён на рис. 12) в прямоугольную полоску. Принципиальное наблюдение Райта состоит в том, что длина дуги, зажатой между двумя меридианами на широте  $\varphi$  меняется обратно пропорционально  $\cos \varphi$  (рис. 13):

$$\frac{c}{c'} = \frac{1}{\cos \varphi} = \sec \varphi.$$

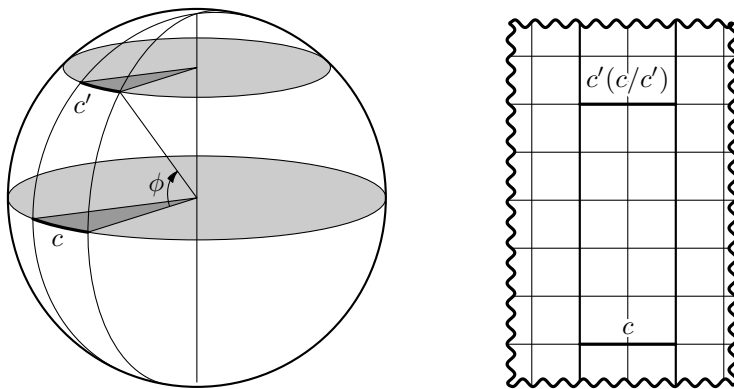


Рис. 13. Метод Райта: откуда берутся секансы

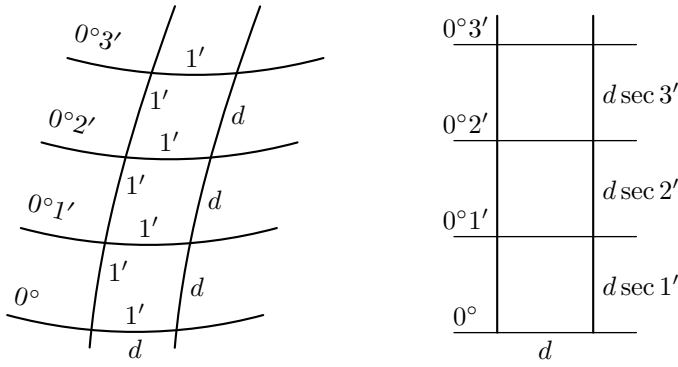


Рис. 14. Метод Райта: накапливающаяся поправка

Заметим, что широта  $\varphi$  отсчитывается от экватора, а не от южного полюса, как  $\theta$ , и потому

$$\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}.$$

На рис. 14 показано, как дольки сегментиков глобуса, образованные меридианами и параллелями, отстоящими на одну угловую минуту  $1'$  друг от друга, растягиваются в прямоугольники с одним и тем же основанием  $d$  (длина дуги одной минуты на экваторе). Мы ничего не делаем с самой нижней долькой, на экваторе: она практически квадратная. Но основание следующей дольки надо растягивать в  $\sec 1'$  раз, следующей — в  $\sec 2'$  раз, и так далее. Чтобы растяжение дольки было пропорциональным (то есть, сохраняло углы), дольки надо растягивать вдоль меридиана, в высоту, в той же пропорции. Поэтому высоты долек становятся

$$d \sec 1', d \sec 2', d \sec 3', \dots$$

Поэтому высота  $Y(\varphi)$  над экватором точки на широте  $\varphi$  равняется сумме высот минутных долек от экватора до широты  $\varphi$  минут:

$$Y(\varphi) = d(\sec 1' + \sec 2' + \sec 3' + \dots + \sec \varphi).$$

Далее Райт не мудрил: он просто взял таблицу значений секанса (а детальные таблицы тригонометрических функций существовали, по причине мореплавания) и просуммировал их значения через каждую угловую минуту. Это и стало его знаменитой таблицей.

Конечно, его вычисление в современных обозначениях не более чем численное интегрирование функции  $\sec t$ , и при этом самым простым методом прямоугольников:

$$Y(\varphi) = \int_0^\varphi \sec t \, dt.$$

Возможно, Меркатор в работе над своей карте просто перечерчивал дольки глобуса как прямоугольники (рис. 14), но чисто геометрическими методами, без вычислений.

#### 4.3. Надувающийся пузырь

К нашему изумлению, часто встречающееся в литературе сравнение проекции Меркатора с отпечатком на внутренней поверхности цилиндра надувающегося внутри пузыря, сначала сферического, а потом деформирующегося в колбаску [10], принадлежит самому Эдварду Райту:

“Suppose a sphericall superficies with meridians, paralels, rumbs, and the whole hydrographically description drawne thereupon to bee inscribed into a concave cylinder, their axes agreeing in one. Let this sphericall superficies swell like a bladder, (whiles it is in blowing) equally alwayes in euerie part thereof (that is as much in longitude as in latitude) till it apply, and ioyne it selfe (round about, and all alongst also towards either pole) vnto the concave superficies of the cylinder: each paralel vpon this sphericall superficies increasing successively from the equinoctiall towards eyther pole, vntil it come to bee of equall diameter with the cylinder, and consequently the meridians stil widening them selves, til they come to be so far distant euery where ech from other as they are at the Equinoctiall. Thus it may most easily be vnderstoode, how a sphericall superficies may (by extension) be made a cylindrical, and consequently a plaine parallelogramme [sic] superficies; because the superficies of a cylinder is nothing else but a plaine parallelogramme wown'd about two equall aequidistant circles that have one common axtree perpendicular vpon the centers of them both, and the peripheties of each of them equall to the length of the parallelogramme as the distance betwixt those circles, or height of the cylinder is equall to the breadth thereof.”

([16], цитируется по [13]).

Увы, картинка рис. 15, как и многие картинки из Интернета, физически неадекватна (мы оставляем объяснение этого читателю в качестве

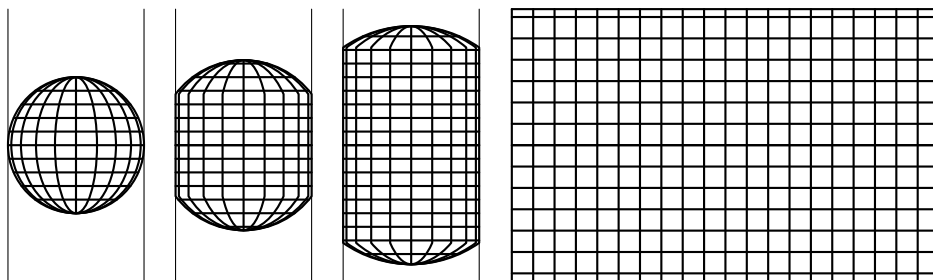


Рис. 15. Эдвард Райт: проекция Меркатора как отпечаток надувающегося пузыря. Источник: R. Israel [10]



упражнения). Досаднее, что надувание пузыря не совпадает с проекцией Меркатора. Наш коллега Стивен Хаггетт предоставил нам очень простое объяснение.<sup>6)</sup>

Положим радиус пузыря и цилиндра равным 1 и обозначим широту на нём через  $\varphi$ .

Предположим, что пузырь надут ровно настолько, что точки широты  $\varphi$  пришли в контакт с цилиндром, а точки с большей широтой — нет.

Проблема состоит в том, чтобы найти высоту  $h$  последнего круга контакта на цилиндре как функцию от  $\varphi$ .

Точки пузыря с широтами больше чем  $\varphi$  будут растянуты однородным образом, чтобы образовать полусферу радиуса 1. Экватор этой полусферы — наш круг последнего контакта. Обозначим широту на полусфере через  $\theta$ .

Рассмотрим меридиан. Его длина на пузыре от широты  $\varphi$  до северного полюса равна  $\pi/2 - \varphi$ , а на полусфере он раздувается до  $\pi/2$ . Поэтому при бесконечно малом поддувании в пузырь

$$\frac{d\psi}{\pi/2} = \frac{d\varphi}{\frac{\pi}{2} - \varphi}.$$

Но, с точностью до первого порядка величин, это бесконечно малое надувание также даёт

$$d\psi = dh.$$

Поэтому

$$\frac{dh}{\pi/2} = \frac{d\varphi}{\frac{\pi}{2} - \varphi}.$$

и потому

$$h = \frac{\pi}{2} \log \left( \frac{\pi/2}{\pi/2 - \varphi} \right),$$

что, к сожалению, не совпадает с проекцией Меркатора. . .

Нам здесь важно другое — приходится признать, что Райт пытался найти интуитивное описание конформных отображений сферы на цилиндр. В конце концов, это делал человек, участвовавший в пиратских походах, что, как читатель легко согласится, вряд ли было лучшей обстановкой для упражнений в чистой математике. Но зато его книга считается образцом простоты и ясности изложения — Райт знал, для кого он писал. Это лучшее доказательство, что математику можно объяснять даже пиратам.<sup>7)</sup>

<sup>6)</sup> Личное сообщение, 1 февраля 2009 г.

<sup>7)</sup> Вспоминается известное высказывание Израиля Моисеевича Гельфанда, что о математике можно разговаривать даже с алкашами — если тех спросить, что лучше, две бутылки на троих или три на четверых, то они сразу дадут правильный ответ.

#### 4.4. ДЖОН НЕПЕР И ЕГО ЛОГАРИФМЫ

В 1614 году Джон Непер (1550–1617) опубликовал книгу *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, в которой он построил логарифмы (в современной терминологии, он вычислял по основанию  $1/e$ , хотя осовременивание терминологии огрубляет его подход). Спустя два года книга была переведена с латыни на английский язык, и ни кем иным, как Эдвардом Райтом. Но Райт не заметил, что его собственная работа над проекцией Меркатора имеет какое-то отношение к логарифмам.

Но, что важно, почти сразу после первых работ Непера начали появляться — и широко использоваться — таблицы логарифмов тригонометрических функций. Более того, если верить статье в MacTutor [2], Непер с самого начала думал о манипуляциях с числами вида  $100 \sin x$ , и делал вычисления с точностью до семи десятичных знаков, потому что такова была точность лучших таблиц синусов. Предисловие к его книге (цитируемое здесь в переводе Райта) сразу делает ясным, что Непер думал о технических вычислениях, а не сложных процентах в бухгалтерских расчётах:

Seeing there is nothing (right well-beloved Students of the Mathematics) that is so troublesome to mathematical practice, nor that doth more molest and hinder calculators, than the multiplications, divisions, square and cubical extractions of great numbers, which besides the tedious expense of time are for the most part subject to many slippery errors, I began therefore to consider in my mind by what certain and ready art I might remove those hindrances. And having thought upon many things to this purpose, I found at length some excellent brief rules to be treated of (perhaps) hereafter. But amongst all, none more profitable than this which together with the hard and tedious multiplications, divisions, and extractions of roots, doth also cast away from the work itself even the very numbers themselves that are to be multiplied, divided and resolved into roots, and putteth other numbers in their place which perform as much as they can do, only by addition and subtraction, division by two or division by three.

#### 4.5. ЭДМУНД ГЮНТЕР, ИЛИ О ПОЛЬЗЕ ВНЕДРЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

Мы склонны недооценивать роль медленного технического развития приложений математики для роста математики в целом. Эдмунд Гюнтер (1581–1626) был архетипичный прикладник, положивший жизнь на внедрение логарифмов в практику навигации. Он создал, в частности, ранний прототип логарифмической линейки, реально использовавшейся мореплавателями и даже так и прозванной «гюнтером». В 1620 году он опубликовал семизначные таблицы логарифмов синуса и тангенса, опять же в целях облегчения тригонометрических вычислений в задачах навигации. Мы скоро увидим, что эти таблицы сыграли, без преувеличения, историческую роль.

А ещё Гюнтер ввёл в употребление общепринятое теперь обозначение  $\log$  и термины «косинус» и «котангенс».

#### 4.6. Генри Бонд, или о пользе чтения логарифмических таблиц

Примерно в 1640 году Генри Бонд, учитель математики и навигации, заметил совпадение (с точностью до линейной замены переменной, что сделало его наблюдение крайне нетривиальным) двух таблиц: таблицы Райта для  $Y(\varphi)$  и таблицы Гюнтера логарифма тангенса:

$$Y(\varphi) = \log(\operatorname{tg}(\varphi/2 + \pi/4))$$

(что то же самое что  $\log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$  в обозначениях раздела 2).

Он опубликовал своё наблюдение в 1645 году в качестве гипотезы, и оно стало одной из самых знаменитых проблем математики XVII века. Конечно, в современной терминологии это не более чем равенство

$$\int_0^\varphi \sec(t) dt = \log \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

где интеграл слева понимается в смысле интегральной суммы. Но это и классический пример того, как опасно говорить о математике прошлого в современных терминах — ведь у нас в голове сидит формула Ньютона-Лейбница, которая применительно к конкретной задаче выглядит как

$$\frac{d}{d\varphi} \int_0^\varphi \sec(t) dt = \sec \varphi,$$

но была тогда неизвестна — Лейбниц начал печатать свои работы по дифференциальному исчислению в 1684, а Ньютон — в 1693 году.

Проблему Бонда пытались решать лучшие математики того времени, например, Уильям Оутред (William Oughtred, 1574–1660), изобретатель логарифмической линейки.<sup>8)</sup> Николаус Меркатор (о нём ниже) даже предложил денежный приз за доказательство гипотезы Бонда. Он написал в своей статье (в самом первом выпуске *Философских Трудов Королевского Общества* за 1666 год [12] — как уже жизнь науки начинала походить на современную!), что он

“willing to lay a *Wager* against any one or more persons that have a mind to engage... *Whether the Artificial* [logarithmic] *Tangent-line be the true Meridian-line, yea or no?*”

<sup>8)</sup> Оутред также ввёл в употребление символ  $\times$  для умножения, и, что более существенно для нашего повествования, символы  $\sin$  и  $\cos$  для синуса и косинуса.

## 4.7. ДЖЕЙМС ГРЕГОРИ И ИСААК БАРРОУ

Проблема Бонда была решена в 1668 году Джеймсом Грегори, но, как утверждается, очень сложным образом; детали могут быть найдены в [15].<sup>9)</sup> Наконец, в 1670 году Исаак Барроу опубликовал приемлемое доказательство; в современных обозначениях, оно приведено в [14]. По-видимому, в истории анализа это было первое применение разложения рациональной функции в сумму простых дробей, ныне стандартного приёма интегрирования.

Конечно, сегодня было бы достаточно проверить начальное условие при  $\varphi = 0$  и продифференцировать:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \log \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \sec^2 \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} = \\ &= \frac{1}{\sin \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{1}{\cos(\varphi)} = \sec(\varphi) \end{aligned}$$

А ещё лучше посоветовать читателю сделать такое упражнение: возьмите интеграл

$$\int \sec(x) dx$$

при помощи универсальной тригонометрической замены

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

а потом предайтесь медитации на тему: почему эти формулы — почти в точности формулы для стереографической проекции оси абсцисс на единичный круг:

$$(t, 0) \mapsto \left( \frac{2t}{1+t^2}, \frac{t^2-1}{1+t^2} \right).$$

(Мы позаимствовали часть материала этого подраздела из статьи Роберта Израэла [10].)

<sup>9)</sup>Статья в английской Википедии (по состоянию на 13 декабря 2009 года) про Джеймса Грегори никак не упоминает его работу над гипотезой Бонда, но зато приписывает ему возможное открытие — и в то же самое время — основной теоремы анализа (формулы Ньютона — Лейбница). Это сомнительно — почему тогда он не мог найти короткого решения проблемы Бонда?

#### 4.8. НИКОЛАУС МЕРКАТОР (1620–1687; НЕ РОДСТВЕННИК И ДАЖЕ НЕ ОДНОФАМИЛЕЦ)

Действительно, оба Меркатора — псевдонимы. Настоящее имя одного было Герард де Кремер или Геерт Кремер, второго Никлаус Кауффман. Имя “Mercator” образовано от латинского слова «купец».

Николаус Меркатор был первым, кто опубликовал ряд для логарифма (в 1668 году),

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

и тем самым окончательно утвердил его как аналитическую функцию, почти замкнув круг в нашем качественном анализе (раздел 3).

А ещё Николаус Меркатор печатал книги с характерными названиями вроде *Trigonometria sphaericorum logarithmica*. Это он ввёл в массовую практику использование логарифмов для решения треугольников и тем самым нёс ответственность за мучения русских гимназистов и школьников XIX и XX веков, которых заставляли решать тригонометрические уравнения, и не просто так, а чтобы ответ был в «форме, удобной для логарифмирования». Мы (авторы этой статьи) принадлежим к первому поколению, с которым этого не делали. А может, и напрасно.

### 5. ПОЛИТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

Недостатком проекции Меркатора считается то, что она искажает площади. Это в большей степени политическая проблема, чем математическая (рис. 16). Мы не удивимся, если с ростом озабоченности по поводу глобального потепления и таяния полярных ледников преувеличенные размеры Гренландии и Антарктиды перестанут считаться недостатками карт мира.

А древняя проекция Меркатора как раз очень хорошо выражает этот новый взгляд на мир (рис. 17).

Есть серьёзные причины, почему метеорологи предпочитают для своих карт погоды проекцию Меркатора — или, для полярных районов, стереографическую проекцию. Но мы про это напишем как-нибудь в другой раз.

### 6. НОВЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Конформные отображения одной поверхности на другую играют все возрастающую роль в современных компьютерных методах обработки изображений — они позволяют упрощать поверхность, сохраняя её текстуру. Рис. 18 взят из совместной работы медиков и информатиков [8]. На смену конформной картографии идёт конформная колоноскопия [9], и медики смело используют слово «навигация»:



Рис. 16. Карта мира в проекции Меркатора. Видимо, напечатана в Америке, раз Америка помещена в центре мира



Рис. 17. Поверхность Земли в проекции Меркатора

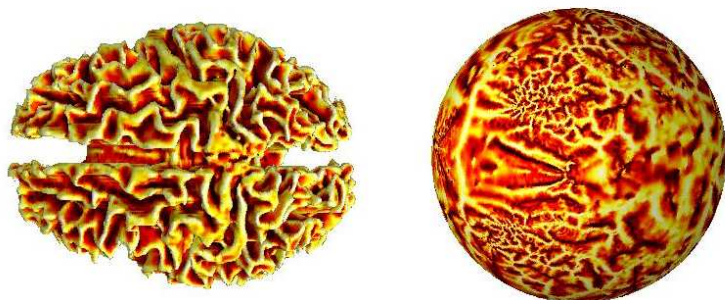


Рис. 18. Конформное отображение поверхности человеческого мозга на сферу [8].

Virtual colonoscopy has some fundamental problems, which it shares with conventional colonoscopy. The most important one is that the navigation using inner views is very challenging and it happens frequently that sizable areas are not inspected at all, leading to incomplete examinations. An alternative approach for the inspection of the entire surface of the colon is to simulate the approach favored by pathologists, which involves cutting open the tube represented by the colon, and laying it out flat for a comprehensive inspection. In some recent work [...], a visualization technique is proposed using cylindrical and planar map projections. It is well-known that such projections can cause distortions in shape [...]

In this paper, we take another approach. We present a method for mapping the colon onto a flat surface in a conformal manner. A conformal mapping is a one-to-one mapping between surfaces which preserves angles, and thus preserves the local geometry as well. Our approach to flattening such a surface is based on a certain mathematical technique from Riemann surface theory, which allows us to map any highly undulating tubular surface without handles or self-intersections onto a planar rectangle in a conformal manner. [9, p. 359]

## 7. ВМЕСТО ПОСЛЕСЛОВИЯ: О РАЗНООБРАЗИИ ГЕОМЕТРИЙ

Одна из причин, почему геометрия недооценивается в современном образовании — мы забыли, что нас окружают много разных геометрий, и мы должны выбирать ту, которая лучше всего соответствует нашему способу измерять или смотреть на мир. Мореплаватель, державший курс по компасу под переменчивым ветром, жил в конформной геометрии на римановой сфере. Астроном, меривший угловые расстояния между звёздами, пользовался сферической геометрией. Мир теории относительности — это геометрия Лобачевского.

Мы часто недооцениваем, до какой степени непосредственно нам может быть дана в наших ощущениях непривычная — или, скажем точнее, не упоминаемая в школе — геометрия. Конформная геометрия мореплавателей — ещё не самый крайний случай, потому что она опосредована приборами — компасом и проч. Например, если просто смотреть на мир одним глазом, без всяких приборов, просто закрыв рукой другой глаз, то увидишь действительную проективную плоскость  $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$ .

Но проективная геометрия заслуживает отдельного рассказа, и снова с большим количеством картинок. Мы его когда-нибудь напишем.

### ПРИЗНАТЕЛЬНОСТИ

Мы выражаем нашу признательность коллегам, которые помогли нам советами: Otus Persapiens, Мише Гавриловичу, Рональду Дорфлеру (Ronald W. Doerfler), Александру Звонкину, Габору Медьеши, Сергею Утюжникову, Стивену Хаггетту (Stephen Huggett).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. А. Мазохин-Поршняков. *Зрение насекомых*. М.: Наука, 1965. См. также <http://www.cultinfo.ru/fulltext/1/001/008/115/404.htm>
- [2] *John Napier*. The MacTutor History of Mathematics archive. <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Napier.html>
- [3] *Rod Lovett's Slide Rules*. <http://sliderules.lovett.com/stanleycomplex/stanleycomplexpics.htm>
- [4] *Spider Web*. <http://www.pestproducts.com/spider-webs.htm>
- [5] K. N. Boyadzhiev. *Spirals and Conchospirals in the Flight of Insects* // The College Mathematics J. Vol. 30, no. 1, 1999. P. 23–31; doi:10.2307/2687199.
- [6] H. F. K. L. Burkhardt. *Theory of Functions of a Complex Variable* (S. E. Razor, transl.). Boston: D. C. Heath, 1913. Эл. версия <http://www.archive.org/details/theoryfunctions00rasorich>
- [7] G. Fraenkel, D. Gunn. *The Orientation of Animals*. Clarendon Press, 1940. Reprinted Dover, 1961.
- [8] S. Haker, S. Angenent, A. Tannenbaum, R. Kikinis, G. Sapiro, M. Halle. *Conformal Surface Parameterization for Texture Mapping* // IEEE Transactions of Visualization and Computer Graphics. Vol. 6, no. 2, 2000. P. 181–189. Эл. версия <http://www.ima.umn.edu/preprints/apr99/1611.pdf>



- [9] S. Haker, S. Angenent, A. Tannenbaum, R. Kikinis. *Non-distorting Flattening for Virtual Colonoscopy* // Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1935, 2000. P. 358–366. DOI 10.1007/b12345.
- [10] R. Israel. *Mercator's Projection*.  
<http://www.math.ubc.ca/~israel/m103/mercator/mercator.html>
- [11] E. Maor. *Trigonometric Delights*. Princeton University Press, 2002.
- [12] N. Mercator. *Certain problems touching some points of navigation* // Philos. Trans. Roy. Soc., London. Vol. 1, 1666. P. 215–218.
- [13] E. J. S. Parsons, W. F. Morris. *Edward Wright and His Work* // Imago Mundi. Vol. 3, 1939. P. 61–71.
- [14] V. F. Rickey, P. Tuchinsky. *An application of geography to mathematics: History of the integral of the secant* // Mathematics Magazine. Vol. 53, no. 3, 1980. P. 162–166.
- [15] H. W. Turnbull. *James Gregory Tercentenary Memorial Volume*. London: G. Bell & Sons, 1939. P. 463–464.
- [16] E. Wright. *Certain Errors in Navigation, Arising either of the ordinaire erroneous making or using of the sea Chart, Compasse, Crosse staffe, and Tables of declination of the Sunne, and fixed Starres detected and corrected*. London: Valentine Sims, 1599.

---

А. В. Боровик, School of Mathematics, University of Manchester, Oxford Street, Manchester M13 9PL, United Kingdom  
email: borovik@manchester.ac.uk

О. М. Худавердян, School of Mathematics, University of Manchester, Oxford Street, Manchester M13 9PL, United Kingdom  
email: khudian@manchester.ac.uk