Решение циклических многоугольников

И. Х. Сабитов*

§1. В последние годы появилось довольно много работ, посвящённых вписанным в окружность многоугольникам, которые для краткости называются *циклическими многоугольниками*. Основным содержанием этих работ является получение и исследование аналога формулы Герона, дающего возможность вычисления площадей таких многоугольников через длины их сторон. Для меня история появления исследований по этой тематике состоит из двух параллельно развивавшихся частей, которые впоследствии слились вместе в 2003–2004 годах, и с этого времени она уже имеет в математическом мире единое течение.

Первая часть истории, к которой я сам имею некоторое отношение, началась на рубеже 20-го и 21-го веков. Точно не помню, но где-то в 2000–2001 годах ко мне подошёл незнакомый человек, который представился как Варфоломеев Виталий Викторович, и сказал, что он хотел бы, чтобы я послушал его соображения об обобщении формулы Герона на случай площадей многоугольников. Оказалось, он был на семинаре кафедры дифференциальной геометрии и приложений, на котором я делал доклад о вычислении объёма многогранника как корня некоторого многочлена, зависящего только от комбинаторного строения многогранника и длин его рёбер. Доклад навёл его на мысль о попытке нахождения такого же многочлена для площадей многоугольников, но при некоторых дополнительных условиях, так как очевидно, например, что ромбы с одинаковой длиной сторон, но с разными углами имеют непрерывно изменяющиеся значения площадей, так что не может быть формулы, дающей значения площади в зависимости только от длин сторон. Вот с момента этой встречи я и помню, как В. В. Варфоломеев постепенно получал новые результаты в этом направлении, несколько раз рассказывал о них на семинаре по геометрии в целом, и завершил первый круг своих исследований статьей [1], где он показал, что все метрические характеристики вписанных в окружность n-угольников — квадрат площади, квадрат радиуса окружности, квадраты длин диагоналей — являются корнями некоторых полиномиальных уравнений, коэффициенты которых зависят только от n и

*Работа частично поддержана грантами РФФИ №09–01–00179 и Минобразования РФ №РНП 2.1.1.3704

квадратов длин сторон многоугольника. Можно сказать, что появилась новая область геометрии, которую по аналогии с термином «решение треугольников» можно назвать *решением многоугольников*.

Вторая параллельно развивающаяся часть истории исследований о вписанных в окружность n-угольников началась несколько раньше с работ [12] и [13], в которых их автор Д. Роббинс, во-первых, сформулировал саму постановку задачи (в частности, вместо длинного оборота «вписанные в окружность многоугольники» он ввёл широко используемый ныне термин «циклические многоугольники»), во-вторых, нашёл для площадей 5- и 6-угольников нормированное полиномиальное уравнение[1)], зависящее только от длин сторон многоугольника, и высказал гипотезу о степени таких многочленов для произвольных n. Начиная с весны 2004 года, когда ныне работающий в США выпускник мехмата МГУ Игорь Пак приехал в Москву с докладами о своих результатах, исторические пути двух направлений исследований циклических многоугольников пересеклись, и с тех пор специалисты в этой области геометрии уже работают, зная о результатах своих коллег из других стран.

К сожалению, судьба зачинателей обоих направлений сложилась трагически: оба они рано ушли после тяжёлой практически неизлечимой болезни, имея большие планы на будущее и работая до последних дней жизни. Д. Роббинс умер в августе 2003 г., и статья [8], опубликованная в газете “Wall Street Journal”, привлекла внимание широкой математической общественности к его работам. В. В. Варфоломеев скончался в январе 2005 г., работая перед смертью над статьей о бесконечномерных алгебрах Ли, которые он связывал с бесконечно малыми деформациями циклических многоугольников вдоль описанных окружностей и которые он хотел использовать для описания особенностей алгебраических функций, порождённых обобщёнными многочленами Герона.

Из работ о циклических многоугольниках, появившихся после публикаций Роббинса и Варфоломеева, можно назвать следующие: [6], [7], [9], [10], [11], [14], [15].

§2. Поскольку речь будет идти и о многоугольниках с самопересечениями, для начала нужно ввести понятие площади многоугольника, пригодное для всех многоугольников. Делается это так. Пусть дан плоский треугольник (т. е. область плоскости, ограниченная «проволочным» треугольником[2)]), тогда его границу можно обходить в двух направлениях,

[1)]Многочлен называется *нормированным*, если его старший коэффициент равен единице; следуя англоязычной терминологии такой многочлен называют также *мономиальным*.

[2)]Между прочим, это постоянная проблема практически во всех языках — как точно отличить по термину, идёт ли речь о многоугольнике (многограннике) как о двумерном при одном из них внутренность области по ходу обхода остаётся слева, при другом она остаётся справа. Первое направление обхода называется положительным и соответственно треугольник называется *положительно ориентированным*, второе направление обхода называется отрицательным и соответственно треугольник называется *ориентированным отрицательно*. Ориентированная или алгебраическая площадь треугольника — это его обычная «геометрическая» площадь, взятая со знаком «+» или «−», соответственно его положительной или отрицательной ориентированности. Аналитически ориентированная площадь S даётся значением определителя

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}, \tag{1}$$

где $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ — координаты вершин треугольника в какой-нибудь прямоугольной декартовой системе, пронумерованных в порядке его обхода. Соответственно тому, положительно или отрицательно направление обхода по маршруту $1 \to 2 \to 3 \to 1$, формула (1) даст значение площади треугольника с данными вершинами и соответствующим знаком.

Пусть теперь нам дан «проволочный» n-угольник P (возможно, с самопересечениями и даже с самоналожениями) с некоторым указанным направлением его обхода и пусть его вершины пронумерованы последовательно в порядке обхода (выбор первой точки не имеет значения) как точки $M_1, M_2, \dots, M_n$ и $M_{n+1} = M_1$ соответственно с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n), $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$. Выберем на плоскости произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ и на сторонах M_iM_{i+1}, $1 \leqslant i \leqslant n$, многоугольника как на основаниях построим треугольники Δ_i с общей вершиной M_0. На каждом из треугольников появится ориентация, наведённая направлением обхода его стороны M_iM_{i+1}. Так вот, *ориентированной* или *алгебраической* площадью, ограниченной ориентированным многоугольником P, называется сумма ориентированных площадей построенных выше плоских треугольников Δ_i.

Имеет место следующее простое, но важное утверждение.

Утверждение 1. *Значение ориентированной площади не зависит от выбора точки M_0.*

Приведём два доказательства этого утверждения. Первое доказательство основано на простых геометрических рассмотрениях. Пусть площадь вычислена как сумма ориентированных площадей $S_1, \dots, S_n$ плоских треугольников с общей вершиной O. Пусть точка O' — новая общая вершина

(трёхмерном) множестве или как об одномерном (двумерном) объекте? Такое отличие обеспечивается лишь в парах «окружность – круг» и «сфера – шар», в остальных же случаях надо или специально оговаривать, что́ имеется в виду, или читатель сам должен по смыслу догадываться, о каком объекте идёт речь.

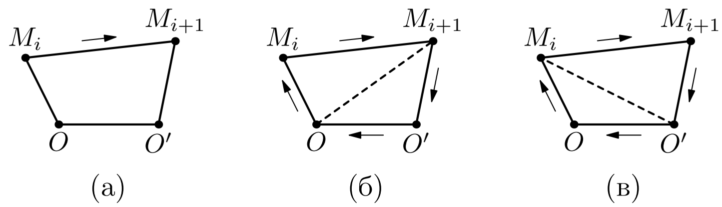

Рис. 1.

и $S'_1, \ldots, S'_n$ — ориентированные площади новых треугольников. Рассмотрим сторону с номером i и с концевыми точками M_iM_{i+1}. Соединив точки O и O', получим «проволочный» 4-угольник $OM_iM_{i+1}O'$ с ориентацией, определённой ориентацией стороны M_iM_{i+1} многоугольника (рис. 1а и 2а). Вычислим ориентированную площадь этого 4-угольника двумя способами: при выборе O и O' как общей вершины треугольников. Для 4-угольника на рис. 1а выбор точки O даёт два треугольника OM_iM_{i+1}, $M_{i+1}O'O$ (рис. 1б), оба с отрицательной ориентацией, и поэтому ориентированная площадь 4-угольника равна «обычной» его площади со знаком «$-$». При выборе точки O' как общей вершины получаем два треугольника $O'OM_i$ и $M_iM_{i+1}O'$ тоже с отрицательной ориентацией (рис. 1в), и поэтому ориентированная площадь 4-угольника снова равна «обычной» его площади со знаком «$-$», т. е. значение ориентированной площади 4-угольника в данном случае не зависит от выбора точки O или O' как общей вершины.

Теперь рассмотрим более сложный случай на рис. 2. При выборе точки O имеем треугольник OM_iM_{i+1} с положительной ориентацией и треугольник $M_{i+1}O'O$ с отрицательной ориентацией (рис. 2б). Треугольник OBM_{i+1}, являясь их общей частью, в каждом из них имеет площади разных знаков, поэтому

$$S_{\Delta OM_iM_{i+1}} + S_{\Delta M_{i+1}O'O} = |S_{\Delta BM_iM_{i+1}}| - |S_{\Delta OBO'}|. \tag{2}$$

Пусть треугольники имеют общую вершину O' (рис. 2б). Тогда треугольники $O'OM_i$ и $M_iM_{i+1}O'$ имеют соответственно отрицательную и

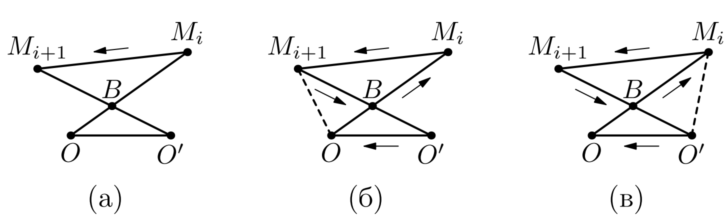

Рис. 2.

положительную ориентацию, а их общая часть — треугольник OBM_i — встречается дважды с противоположным знаком площади. Поэтому снова имеем

$$S_{\Delta O'OM_i} + S_{\Delta M_iM_{i+1}O'} = |S_{\Delta BM_iM_{i+1}}| - |S_{\Delta OBO'}|,$$

т. е. такое же значение, что и в (2).

Такие же рассмотрения можно провести и при других случаях взаимного расположения точек O, O' и отрезка M_iM_{i+1}, поэтому считаем доказанным, что ориентированная площадь 4-угольника $OM_iM_{i+1}O'$ одинакова при любом из двух возможных разбиений его на треугольники с общей вершиной O или O'. Значит, имеем равенство

$$S_i + S_{\Delta OM_{i+1}O'} = S'_i + S_{\Delta O'OM_i}\,.$$

Если теперь рассмотреть аналогичным образом площадь 4-угольника $OM_{i-1}M_iO'$, получим равенство

$$S_{i-1} + S_{\Delta OM_iO'} = S'_{i-1} + S_{\Delta O'OM_{i-1}}.$$

При сложении этих двух равенств имеем

$$S_{i-1} + S_i + S_{\Delta OM_{i+1}O'} = S'_{i-1} + S'_i + S_{\Delta O'OM_{i-1}}\,,$$

т. е. искусственно прибавляемая площадь треугольника OM_iO' с основанием $O'O$ исчезает за счёт взаимного уничтожения равных слагаемых в правой и левой частях равенства. Аналогичные рассмотрения с другими сторонами приводят к уничтожению всех таких искусственно вводимых площадей, и мы в итоге получим равенство

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = S'_1 + S'_2 + \dots + S'_n\,,$$

что и утверждалось.

Второе — алгебраическое — доказательство получается применением формулы (1) для каждого треугольника Δ_i. По сравнению с геометрическим способом оно теряет в наглядности, но преимущество его в том, что нам теперь не нужно будет перебирать все возможные случаи взаимного расположения точек O, O' и ориентированного отрезка M_iM_{i+1}. Рассмотрим три последовательно идущие стороны с номерами $i-1$, i, $i+1$ с соответствующими вершинами $M_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$, $M_i(x_i, y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ и $M_{i+2}(x_{i+2}, y_{i+2})$. Пусть точка O, выбранная как общая вершина треугольников с основаниями на ориентированных сторонах многоугольника, имеет координаты (x_0, y_0). Вычисляя по соответствующей формуле (1) площади S_{i-1}, S_i, S_{i+1} (каждый раз в этой формуле в качестве x_1, y_1 выбираем x_0, y_0), получаем

$$S_{i-1} + S_i + S_{i+1} = \frac{1}{2}x_0(y_{i-1} - y_{i+2}) - \frac{1}{2}y_0(x_{i-1} - y_{i+2}) + f(x_{i-1}, \dots, y_{i+2}),$$

где f есть некоторая явно выписываемая квадратичная функция указанных при ней аргументов, не включающих x_0 и y_0. Мы видим, что координаты концевых точек стороны M_iM_{i+1} не встречаются ни в каких операциях с участием x_0 или y_0, следовательно, на вклад стороны M_iM_{i+1} в величину площади многоугольника значения x_0 и y_0 не влияют. Это заключение верно для каждой стороны, что и доказывает рассматриваемое утверждение.

Заметим, что мы не говорим о площади *области, ограниченной многоугольником*, так как в случае самопересечения неясно, о какой области идёт речь. Однако, если многоугольник не имеет самопересечений, тогда он ограничивает некоторую область плоскости, являющуюся плоским многоугольником, и нетрудно доказать следующее

Утверждение 2. *Если многоугольник не имеет самопересечений, тогда абсолютная величина его ориентированной или алгебраической площади равна «обычной» площади области, ограниченной этим многоугольником. В частности, положительное значение ориентированной площади соответствует случаю, когда обход многоугольника по ходу нумерации его вершин оставляет область внутри многоугольника слева*[3]*.*

Для доказательства утверждения достаточно заметить, что любой плоский многоугольник можно разбить на треугольники, а для треугольников мы уже знаем справедливость высказанного утверждения.

Ниже мы всегда будем говорить об алгебраических площадях вписанных в окружность многоугольников, поэтому, предполагая, что начало координат расположено в центре окружности и что точка $M_0(x_0, y_0)$ для формулы (1) выбрана в начале координат, мы для алгебраической площади S циклического n-угольника имеем формулу

$$2S = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} x_k & y_k \\ x_{k+1} & y_{k+1} \end{vmatrix}, \tag{3}$$

где $x_k = R\cos\varphi_k$, $y_k = R\sin\varphi_k$, а R — радиус окружности, а для длин l_k сторон многоугольника имеем равенства

$$l_k^2 = (x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2. \tag{4}$$

Если нам даны n положительных чисел $l_1, l_2, \ldots, l_n$, каждое из которых меньше полусуммы всех чисел (или, что то же самое, каждое меньше суммы остальных или, короче, максимальное меньше суммы остальных),

[3] Широко распространённый способ описания положительного обхода многоугольника как обхода против часовой стрелки не является вполне корректным — нарисуйте невыпуклую область с достаточно сильной «невыпуклостью» и вы увидите, что на её границе есть участки, где направление обхода идёт против часовой стрелки, так есть и участки, где оно идёт по направлению часовой стрелки.

то мы всегда можем построить циклический n-угольник со сторонами, длины которых последовательно равны именно этим l_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Для этого достаточно взять окружность диаметра большего, чем сумма всех l_i, отложить на ней, начиная с некоторой её точки, в обе стороны (т. е. по и против хода часовой стрелки) дуги, стягивающие хорды самой большой длины из числа длин l_i, затем из обеих полученных точек откладывать в одном и том же направлении, скажем, против часовой стрелки, последовательно в циклическом порядке, считая от уже отложенной, дуги с длинами хорд, равными оставшимся длинам сторон. Одна из концевых точек полученных при этом ломаных при непрерывном уменьшении радиуса окружности первой совпадёт с начальной точкой, завершая в итоге построение замкнутого циклического многоугольника[4)], так что задача нахождения площади циклического n-угольника не является пустой (кстати, в ту же окружность можно вписать и другие многоугольники с теми же длинами сторон, но взятыми в любом другом порядке). Построенный таким образом многоугольник будет выпуклым, но для тех же длин могут существовать невыпуклые (и тогда обязательно самопересекающиеся) многоугольники, тоже вписанные в некоторую окружность. Чтобы убедиться в этом, достаточно представить себе, что вписанный в окружность n-угольник получен по описанному выше построению из сторон некоторого уже существующего самопересекающегося n-угольника с вершинами на данной окружности, см. рис. 3 и рис. 4. Вот имея в виду такие многоугольники, мы и будем говорить про алгебраическую площадь многоугольников.

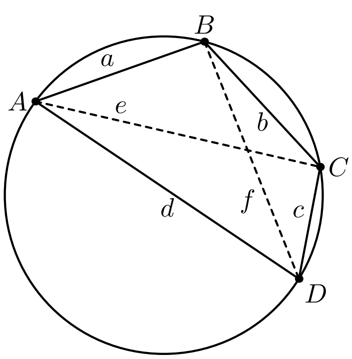

Рис. 3.

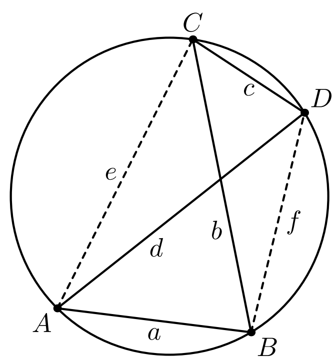

Рис. 4.

Ориентированную площадь циклического многоугольника можно представить и другой формулой. Для этого вычислим ориентированную площадь S_k каждого треугольника с основанием на стороне M_kM_{k+1} многоугольника и с вершиной в центре описанной окружности, считая

[4)]Подробное доказательство возможности такого построения см. в [3].

известным радиус окружности и соответствующий центральный угол φ_k. Получим

$$2S = R^2 \sum_{k=1}^{n} \sin\varphi_k\,, \tag{5}$$

где ориентированные углы φ_k должны удовлетворять равенству[5)]

$$\varphi_1 + \cdots + \varphi_n = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

Длины сторон многоугольника связаны с введёнными углами соотношениями

$$l_k^2 = 2R^2(1 - \cos\varphi_k). \tag{7}$$

§3. Приступим к исследованию связи между площадью и длинами сторон циклического многоугольника. Для начала представим формулу Герона для площади треугольника в следующей форме

$$(4S)^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c) = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4, \tag{8}$$

где a, b, c — длины сторон треугольника, p — его полупериметр, а S — площадь[6)].

Индийский математик 7-го (!) века Брахмагупта нашёл для площади вписанного в окружность выпуклого четырёхугольника со сторонами a, b, c, d формулу, аналогичную формуле Герона:

$$\begin{aligned}(4S)^2 &= 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) = \\ &= 4\left[a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2\right] - (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 + 8abcd = \\ &= (a-b+c+d)(b-a+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d).\end{aligned} \tag{9}$$

[5)]Эти углы можно определять с выполнением условия $-\pi \leqslant \varphi_k \leqslant \pi$, причём равенство $|\varphi_k| = \pi$ означает, что длина соответствующей стороны многоугольника равна диаметру окружности, и в этом случае для φ_k можно брать любое значение π или $-\pi$, на справедливости равенств (5) и (6) это не отразится.

[6)]Между прочим, В. В. Варфоломеев предлагал такой «эвристическо-алгебраический» метод доказательства формулы Герона: площадь треугольника равняется нулю тогда и только тогда, когда одна его сторона равна сумме двух его сторон. Значит, предполагая алгебраическую зависимость площади от длин сторон и учитывая равноправие сторон, получаем, что простейшее алгебраическое выражение для площади должно иметь вид $S^2 = k(p-a)(p-b)(p-c)$, где коэффициент k нужно подобрать так, чтобы, во-первых, получалась нужная для S^2 размерность, во-вторых, при равенстве всех сторон получалось известное значение $S^2 = \dfrac{3a^4}{16} = k\dfrac{a^3}{8}$, что даёт $k = \dfrac{3a}{2} = \dfrac{a+a+a}{2} = p$ опять же ввиду равноправия сторон. Конечно, всякий легко найдёт логические изъяны этого «доказательства», но оно показывает «естественность» формулы Герона — другого выражения для площади треугольника и не надо было ожидать. Но вот для объёма тетраэдра это эвристическое рассуждение уже не проходит.

Доказательство можно оставить читателю, как приятное, но довольно хлопотливое упражнение по элементарной геометрии, или найти его, например, в [4, задача 4.46]. Для дальнейшего изложения нам будет нужен ещё ряд формул. Приведём их без доказательства. Пусть дан циклический выпуклый четырёхугольник, изображённый на рис. 3 с приведёнными там же обозначениями сторон (пусть эти же буквы обозначают длины соответствующих сторон). Пусть диагональ, разделяющая пару сторон (a, b) от пары (c, d), обозначена как e, а другую диагональ обозначим f. Пусть R — радиус описанной окружности, S — площадь четырёхугольника. Тогда имеют место следующие формулы (доказательства см., например, в [4, задачи 6.37–6.38] или в [15]):

$$1)\quad ef = ac + bd \quad \text{(формула Птолемея);}$$

$$2)\quad e^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}\,, \quad f^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}\,; \tag{10}$$

$$3)\quad 4SR = (ab+cd)e;$$

$$4)\quad (4SR)^2 = (ab+cd)(ac+bd)(ad+bc); \tag{11}$$

$$5)\quad R^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{4(ac+bd)^2 - (a^2-b^2+c^2-d^2)^2} \tag{12}$$

(при $d = 0$ все эти формулы переходят в известные формулы для треугольников). Рассмотрим теперь случай невыпуклого циклического четырёхугольника (рис. 4) с теми же длинами сторон. Проведём диагонали AC и BD и обозначим их длины соответственно через e_2 и f_2. Четырёхугольник $ADBC$ — выпуклый и циклический, значит, для него верны предыдущие формулы. Поэтому имеем

$$1)\quad bd = ac + e_2 f_2;$$

$$2)\quad d^2 = \frac{(ae_2+cf_2)(ac+e_2f_2)}{af_2+ce_2}\,, \quad b^2 = \frac{(af_2+ce_2)(ac+f_2e_2)}{ae_2+cf_2}\,;$$

$$4)\quad R^2 = \frac{(af_2+ce_2)(ac+f_2e_2)(ae_2+cf_2)}{4(ac+f_2e_2)^2 - (a^2-f_2^2+c^2-e_2^2)^2}$$

(формулы с участием площади не пишем, так как нет простой зависимости между ориентированными площадями 4-угольников $ABCD$ и $ABDC$).

Из этих формул находим значения e_2, f_2, R^2 и ориентированной площади S (ниже через β обозначен $\angle ABC$):

$$e_2 f_2 = bd - ac, \quad e_2^2 = \frac{(bd-ac)(ad-bc)}{ab-cd}\,, \quad f_2^2 = \frac{(bd-ac)(ab-cd)}{ad-bc}\,, \tag{13}$$

$$R^2 = \frac{(ab-cd)(bd-ac)(ad-bc)}{4(bd-ac)^2 - (a^2-b^2+c^2-d^2)^2}\,, \tag{14}$$

$$S^2 = |S_{CAB} + S_{CDA}|^2 = (|S_{CAB}| - |S_{CDA}|)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}(ab-cd)^2 \sin^2\beta = \frac{1}{4}(ab-cd)^2\left(1 - \frac{(a^2+b^2-e_2^2)^2}{4a^2b^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{16}[4\left(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2\right) - (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 - 8abcd], \tag{15}$$

$$(4SR)^2 = (ab-cd)(bd-ac)(ad-bc). \tag{16}$$

Если мы перемножим уравнения, дающие значения S^2 для двух циклических четырёхугольников с одинаковыми длинами сторон, то получим уравнение
$$(16S^2)^2 - 2A(16S^2) + B - 64a^2b^2c^2d^2 = 0, \tag{17}$$
где $A = 4\left(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2\right) - (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$, $B = A^2$. Мы видим, что оба возможных значения алгебраических площадей циклических четырёхугольников с одинаковым набором длин сторон могут быть вычислены через корни одного и того же квадратного уравнения, коэффициенты которого являются симметрическими функциями от квадратов длин сторон с некоторыми числовыми коэффициентами, не зависящими от конкретного вида циклического четырёхугольника. Поэтому уравнение (17) вполне естественно назвать *обобщённой формулой Герона* для четырёхугольников.

Замечание. Из формулы (15) для S^2 видно, что при некоторых значениях длин сторон четырёхугольника правая часть формулы будет отрицательной (например, это так при значениях $a = 1/2$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$). Это значит, что не при всяком наборе четырёх длин можно найти два четырёхугольника, оба вписанные в свою окружность.

Теперь заметим, что мы в состоянии вычислить через длины сторон и другие геометрические характеристики циклических четырёхугольников. Именно, из формул (10) и (13) для диагоналей получаем следующее уравнение:

$$(a^2b^2 - c^2d^2)D^4 - 2(a^2b^2d^2 + a^2b^2c^2 - a^2c^2d^2 - b^2c^2d^2)D^2 +$$
$$+ (a^2d^2 - b^2c^2)(b^2d^2 - a^2c^2) = 0, \tag{18}$$

где через D обозначена длина диагонали, разделяющей пару сторон (a, b) от пары (c, d). Аналогичное уравнение можно выписать и для второй диагонали. Снова получаем, что для любых циклических четырёхугольников существует одно уравнение, решение которого даёт длины диагоналей четырёхугольника, как только известны длины его сторон. Таким же образом можно находить и радиус описанной окружности. Поэтому мы можем говорить о *решении циклических четырёхугольников* в том же смысле, что и для треугольников, т. е. мы знаем связи между всеми геометрическими характеристиками таких четырёхугольников. Но, вообще говоря, здесь есть некоторые исключения. Дело в том, что в уравнении (18) коэффициент при старшей степени при некоторых значениях длин четырёхугольника может обратиться в нуль. Тогда мы или не сможем найти величину диагонали, если все коэффициенты уравнения равны нулю (так бывает, например, если четырёхугольник состоит из боковых сторон и диагоналей равнобочной трапеции: такой четырёхугольник может непрерывно деформироваться, сохраняя длины сторон и оставаясь вписанным в окружности переменного радиуса), или же для данного набора длин не существует невыпуклого циклического четырёхугольника (например, для длин $a = 1/2$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$). Но обратим внимание, что в многочлене для площади старший коэффициент всегда равен 1, поэтому даже если четырёхугольник непрерывно деформируется с сохранением длин сторон[7)], его площадь может принимать только конечное число значений. Например, в случае описанного выше изгибаемого циклического четырёхугольника площадь остаётся равной нулю, хотя и диагонали, и радиус окружности изменяются непрерывно.

Выясним алгебраический смысл полученных уравнений. В формулах (3) и (4) даны выражения площади и длин сторон многоугольника через координаты его вершин. Общность уравнения (17) (т. е. то утверждение, что оно выполнено для площадей и длин сторон *всех* циклических 4-угольников) выражается в том, что если для циклического 4-угольника в уравнение (17) вместо S и длин сторон подставить их значения через координаты, то слева получим *тождественный* нуль при всех значениях координат $(x_1, \ldots, y_4)$, удовлетворяющих равенствам

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2 = x_4^2 + y_4^2,$$

выражающим то условие, что вершины 4-угольника расположены на одной окружности. Другая интерпретация получается применением представления площади и длин сторон циклического многоугольника через его центральные углы φ_k. Из равенства (6) имеем, что

$$\begin{aligned} \sin\varphi_n &= -\sin(\varphi_1 + \cdots + \varphi_{n-1}), \\ \cos\varphi_n &= \cos(\varphi_1 + \cdots + \varphi_{n-1}). \end{aligned} \tag{19}$$

Тогда, подставляя в уравнение (17) вместо S и длин a, b, c, d их выражения (5) и (7), с учётом равенства (19), мы получим тождественный относительно $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ нуль. Для трёх- и четырёхугольников этот факт можно проверить даже «вручную».

[7)] Такая деформация называется *изгибанием*.

§4. Для полноты изложения мы в этом пункте напомним, что такое *результант* двух многочленов, потому что результант и его свойства играют основную роль в применяемом дальше математическом аппарате исследования. Пусть даны два многочлена

$$P(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m, \quad Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n, \tag{20}$$

где a_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ и b_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ — некоторые коэффициенты, числа или функции от каких-то переменных. Составим из коэффициентов этих многочленов следующий определитель порядка $m+n$:

$$R(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots\dots & a_m & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

В теории результантов утверждается, что для того, чтобы два уравнения $P(x) = 0$ и $Q(x) = 0$ имели общее решение, необходимо, чтобы результант этих многочленов был равен нулю; обратно, если результант двух многочленов равен нулю, то либо эти многочлены имеют общее решение, либо оба старших коэффициента равны нулю (следовательно, если хотя бы один из старших коэффициентов не равен нулю, то существует общее решение). Таким образом, сведение решения системы уравнений $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ к решению или проверке равенства $R(P,Q) = 0$ можно назвать исключением неизвестного x.

§5. Переходим к исследованию циклических многочленов с произвольным числом сторон. Сначала, следуя [1], установим алгебраическую зависимость площади, радиуса окружности и длин диагоналей циклического многоугольника от квадратов длин его сторон.

Теорема 1. *Квадрат длины любой диагонали циклического многоугольника является алгебраической функцией квадратов длин многоугольника.*

Доказательство получается индукцией по числу вершин. Для числа вершин $n = 4$ утверждение верно в силу выполнения уравнения (18) для диагоналей. Пусть утверждение верно для $(n-1)$-угольников. Рассмотрим произвольный циклический n-угольник (рис. 5 и рис. 6). Построим в нем диагонали A_1A_3 и A_1A_4 и рассмотрим два циклических многоугольника $A_1A_2A_3A_4$ и $A_1A_3A_4\dots A_n$ с общим радиусом описанной окружности.

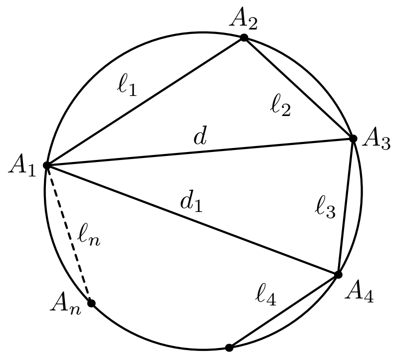

Рис. 5.

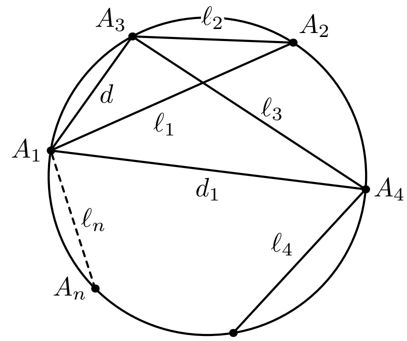

Рис. 6.

По индукционному предположению, для квадрата длины d_1 диагонали A_1A_4 второго многоугольника существует алгебраическое уравнение вида

$$a_0(d^2, l_3^2, \ldots, l_n^2)(d_1^2)^N + a_1(d^2, l_3^2, \ldots, l_n^2)(d_1^2)^{N-1} + \ldots + a_N(d^2, l_3^2, \ldots, l_n^2) = 0. \tag{21}$$

Возьмём уравнение (18) для квадрата длины d диагонали A_1A_3 четырёхугольника $A_1A_2A_3A_4$ и перепишем его, заменив в нем D на d и d на d_1 и представив его по степеням d_1:

$$l_1^2 l_2^2 (d_1^2)^2 + b_1(d^2, l_1^2, l_2^2, l_3^2) d_1^2 + b_2(d^2, l_1^2, l_2^2, l_3^2) = 0\ . \tag{22}$$

Теперь исключаем d_1^2 из этого уравнения и уравнения (21), приравняв нулю их результант. Получим уравнение, которое можно представить как полиномиальное уравнение некоторой степени L относительно $d^2 = |A_1A_3|^2$:

$$D_0(l_1^2, \ldots, l_n^2)(d^2)^L + D_1(l_1^2, \ldots, l_n^2)(d^2)^{L-1} + \cdots + D_L(l_1^2, \ldots, l_n^2) = 0 \tag{23}$$

(для случая 5-угольника $L = 7$ и получится уравнение 7-й степени относительно d^2 со старшим коэффициентом $l_3^6 l_4^2 l_5^2$).

Полученное уравнение (23) пригодно для нахождения так называемых «малых» диагоналей, которые соединяют концы двух сторон, имеющих общую вершину. С использованием этого уравнения мы можем найти полиномиальное уравнение и для квадрата длин остальных диагоналей, так как каждую из них можно рассматривать как малую диагональ для некоторого многоугольника с меньшим числом сторон, вписанного в ту же окружность и полученного из исходного многоугольника последовательным отсечением из него областей, ограниченных частью его сторон и постепенно вычисляемыми малыми диагоналями. Например, чтобы получить уравнение для d_1^2 — квадрата длины диагонали A_1A_4, надо исключить d^2 из уравнений (23) и (22). Теорема доказана. □

Аналогичная теорема верна и для радиуса описанной окружности:

Теорема 2. *Квадрат радиуса описанной окружности для циклического n-угольника является алгебраической функцией квадратов длин его сторон.*

Доказательство использует уже известное полиномиальное уравнение для $d = |A_1A_3|$. Именно, искомый радиус R является радиусом описанной окружности и для треугольника $A_1A_2A_3$ с длинами сторон l_1, l_2 и d. А для треугольника формула для радиуса нам известна:

$$16S_\Delta^2R^2 = l_1^2l_2^2d^2,$$

где площадь S_Δ треугольника выражается по формуле (8) через l_1^2, l_2^2, d^2. Из полученной формулы и из (23) исключим переменную d^2 и получим для R^2 некоторое полиномиальное уравнение (например, для 5-угольника получится уравнение 7-й степени для R^2 со старшим коэффициентом, равным свободному члену в уравнении (23) для d^2). □

Наконец, для площади S циклического многоугольника тоже есть алгебраическая зависимость от длин его сторон.

Теорема 3. *Квадрат ориентированной площади циклического многоугольника является алгебраической функцией квадратов длин его сторон.*

Доказательство проведём индукцией по числу сторон по схеме, которая в принципе одновременно позволит найти этот многочлен. Пусть для циклических $(n-1)$-угольников квадрат их ориентированной площади S_{n-1} является корнем некоторого многочлена:

$$a_0(l_1^2,\dots,l_{n-1}^2)(S_{n-1}^2)^N+a_1(l_1^2,\dots,l_{n-1}^2)(S_{n-1}^2)^{N-1}+\dots+a_N(l_1^2,\dots,l_{n-1}^2)=0. \tag{24}$$

Пусть теперь нам дан циклический n-угольник P_n с вершинами $A_1, A_2, \dots, A_n$. Диагональю A_1A_3 длины d отсечём от него треугольник $\Delta = A_1A_2A_3$ с площадью S_Δ. Останется некоторый циклический $(n-1)$-угольник P_{n-1} со сторонами $d, l_3, \dots, l_n$. Ориентированная площадь S_n многоугольника P_n связана с площадью S_{n-1} многоугольника P_{n-1} соотношением

$$S_n = S_{n-1} + \varepsilon S_\Delta,$$

где $\varepsilon = \pm 1$, так как в общем случае неизвестно, надо ли прибавить или отнять площадь отсечённого треугольника. Подставим в (24) значение $S_{n-1} = S_n + \varepsilon S_\Delta$ и вынесем в одну часть все мономы, содержащие сомножитель $\varepsilon S_n S_\Delta$. После возведения в квадрат останется полиномиальное уравнение, содержащие чётные степени S_n, S_Δ и чётные степени длин сторон $l_3, \dots, l_n$ многоугольника P_n. Подставляя всюду вместо выражения $16S_\Delta^2$ его значение по формуле (8), получим многочлен относительно d^2.

Остаётся исключить d^2 из этого уравнения и уравнения (23) и получить многочлен вида

$$b_0(l_1^2,\dots,l_n^2)(S_n^2)^K + b_1(l_1^2,\dots,l_n^2)(S_n^2)^{K-1} + \dots + b_K(l_1^2,\dots,l_n^2) = 0. \qquad \square$$

Выполним подробно в случае циклического 4-угольника описанную выше процедуру получения многочлена для площади. Пусть дан циклический 4-угольник, который может иметь одну из форм, изображённых на рис. 3 или 4. Проведём диагональ A_1A_3 и ориентированную площадь 4-угольника будем рассматривать как сумму ориентированных площадей S_1 и S_2 треугольников $\Delta_1 = A_1A_3A_4$ и $\Delta_2 = A_1A_2A_3$. Обход треугольников проводится в соответствии с обходом входящих в них сторон 4-угольника (на рис. 3 оба треугольника имеют одинаковую ориентацию, так что их площади должны сложиться, а на рис. 4 их ориентации противоположны, и поэтому площадь 4-угольника получится вычитанием площадей треугольников). Площадь S_1 треугольника Δ_1 удовлетворяет многочлену

$$16S_1^2 - (2d^2(l_3^2 + l_4^2) + 2l_3^2l_4^2 - d^4 - l_3^4 - l_4^4) = 0 \qquad (25)$$

Для общей площади S четырёхугольника имеем соотношение $S = S_1 + \varepsilon S_2$, $\varepsilon = \pm 1$. Подставим в (25) значение $S_1 = S - \varepsilon S_2$. Получим

$$16S^2 + 16S_2^2 - (2d^2(l_3^2 + l_4^2) + 2l_3^2l_4^2 - d^4 - l_3^4 - l_4^4) = 32\varepsilon SS_2.$$

Заменим здесь $16S_2^2$ по формуле (8) выражением $2(l_1^2 + l_2^2)d^2 - d^4 - (l_1^2 - l_2^2)^2$ и после приведения подобных возведём обе части в квадрат. Приходим к уравнению, разложенному по степеням d^2:

$$\begin{aligned}&4[(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 - l_4^2)^2 + x]d^4 - \\ &\quad - 4[x(l_1^2 + l_2^2 + l_3^1 + l_4^2) - ((l_3^2 - l_4^2)^2 - (l_1^2 - l_2^2)^2)(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 - l_4^2)]d^2 + \\ &\qquad + x^2 + 2[(l_1^2 - l_2^2)^2 + (l_3^2 - l_4^2)^2]x + [(l_3^2 - l_4^2)^2 - (l_1^2 - l_2^2)^2]^2 = 0,\end{aligned}$$

где положено $x = 16S^2$. Теперь перепишем уравнение (18) для диагонали 4-угольника с заменой в нем a на l_1, b на l_2, c на l_3 и d на l_4:

$$(l_1^2l_2^2 - l_3^2l_4^2)d^4 - 2(l_1^2l_2^2l_4^2 + l_1^2l_2^2l_3^2 - l_1^2l_3^2l_4^2 - l_2^2l_3^2l_4^2)d^2 + (l_1^2l_4^2 - l_2^2l_3^2)(l_2^2l_4^2 - l_1^2l_3^2) = 0$$

и исключение d^2 из двух найденных многочленов с использованием результанта $R(x)$ приведёт к уравнению для x. Получим уравнение вида

$$R(x) = (l_1^2l_2^2 - l_3^2l_4^2)^2x^4 + A_1x^2 + A_2 = 0. \qquad (26)$$

Мы видим, что для $x = 16S^2$ получилось уравнение 4-й степени, а ранее полученное уравнение (17) было степени 2 и оно имело ровно два корня, соответствующие двум возможным значениям модуля ориентированной площади. Получение уравнения степени выше реальной — общий недостаток применения метода исключения с использованием результанта. Выход состоит в том, что полученный многочлен (26) является приводимым и он разлагается на два множителя 2-й степени (по отношению к $16S^2$), только один из которых удовлетворяет описанному в конце §3 алгебраическому свойству искомых многочленов — обращаться в тождественный нуль при подстановке вместо площади и длин их координатные представления. В нашем случае вычисления[8)] дают для результанта (26) разложение вида

$$\begin{aligned}R(x) = [(l_1^2l_2^2 - l_3^2l_4^2)^2x^2 + (12l_1^2l_2^2l_3^2l_4^2(l_1^4 + l_2^4 + l_3^4 + l_4^4 + 3l_1^2l_2^2 + 3l_3^2l_4^2 - 2l_1^2l_3^2-\\ - 2l_1^2l_4^2 - 2l_2^2l_4^2 - 2l_2^2l_4^2) + 4((l_3^6l_4^6 - l_1^6l_2^6) - (l_1^2 + l_2^2)(l_3^2 + l_4^2)(l_1^4l_2^4 + l_3^4l_4^4))+\\ + 2(l_1^4l_2^4 + l_3^4l_4^4)(l_1^4 + l_2^4 + l_3^4 + l_4^4))x + C]\boldsymbol{(x^2 - 2Ax + B - 64l_1^2l_2^2l_3^2l_4^2)},\end{aligned}$$

где выделенный жирным шрифтом множитель как раз совпадает с приведённым в (17) многочленом для $x = 16S^2$ (а коэффициент C мы не приводим в явном виде, так как его запись заняла бы более 15 строк).

Такая проблема возникает и в общем случае, и в работе [1] утверждается, что и в общем случае полученный после исключения диагонали результант допускает разложение на множители, у одного из которых старший коэффициент является числом, а не функцией от длин многоугольника, и именно он и будет искомым многочленом для площади. К сожалению, это рассуждение автором не раскрыто подробно, а проведено «скороговоркой». Но существование многочлена с целочисленными коэффициентами подробно доказано в работе [6] с использованием другого алгебраического аппарата, а именно, теории мест, но этот метод доказательства не является конструктивным, он даёт только существование некоторого требуемого нормированного многочлена без указания способа его нахождения. Следовательно, метод работы [1] даёт конструктивный способ построения искомого многочлена — по описанной выше процедуре находим ненормированный многочлен большой степени и среди его делителей должен быть искомый нормированный многочлен наименьшей возможной степени.

§6. Окончательный ответ о многочлене для площади циклического многоугольника, полученный усилиями нескольких математиков (см. работы [12], [13], [1], [6], [7], [9], [10]), можно сформулировать в виде следующей теоремы

Теорема 4. *Пусть рассматриваются циклические n-угольники с известными длинами сторон $l_1, \dots, l_n$. Тогда для любого $n \geqslant 3$ существует единственный нормированный многочлен*

$$Q = x^N + a_1x^{N-1} + \dots + a_{N-1}x + a_N, \tag{27}$$

[8)] Эти вычисления проведены А. Словесновым, которому я, пользуясь случаем, хочу выразить свою благодарность.

такой, что для ориентированной площади S каждого из этих многоугольников величина $K^2 = 16S^2$ является корнем многочлена Q. Коэффициенты a_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, многочлена Q суть некоторые симметрические многочлены от квадратов длин сторон многоугольника с целочисленными коэффициентами, зависящими только от n. Все мономы в многочлене (27) *имеют одинаковую размерность, считая размерность сторон многоугольника равной единице длины, а размерность переменной x равной* 4. *Степень N многочлена Q при нечётном $n = 2m+1$ равна*

$$\Delta_m = \sum_{k=0}^{m-1}(m-k)C_{2m+1}^k = \frac{1}{2}\left[(2m+1)C_{2m}^m - 2^{2m}\right], \tag{28}$$

а при чётном $n = 2m+2$ степень N равна $2\Delta_m$. Кроме того, можно утверждать, что существуют значения длин сторон, для которых каждый корень K^2 многочлена Q реализуется как площадь $S = K/4$ некоторого циклического многоугольника с соответствующими длинами сторон[9]*.*

В теореме есть три части, которые доказаны у разных авторов с разной степенью строгости и ясности изложения. Первая часть теоремы — существование такого многочлена, вторая часть — определение его порядка, третья часть относится к алгоритму нахождения этого многочлена.

Сначала приведём эвристические рассуждения самого Роббинса из [12] и [13] о значении степени многочлена. Речь идёт о построениях в общем положении, т. е. длины $l_1, \ldots, l_n$ можно считать не связанными никакими алгебраическими зависимостями. Посмотрим, как можно «прикинуть» количество циклических n-угольников, которые можно построить исходя из данных длин их сторон. Пусть рассматриваются многоугольники с нечётным числом вершин $n = 2m+1$ и с примерно равными длинами сторон. Как было объяснено в §2, для любого $n \geqslant 3$ и любого набора длин $l_1, \ldots, l_n$ можно построить выпуклый циклический n-многоугольник, последовательно откладывая хорды длиной l_i, скажем, против хода часовой стрелки на окружности подходящим образом подобранного радиуса R. В наших предположениях это будет примерно значение радиуса описанной окружности для правильного n-угольника со стороной длины l, равной среднему арифметическому заданных длин $l_1, \ldots, l_n$. После этого построения мы уменьшим радиус окружности, тогда при последовательном откладывании хорд последняя отложенная вершина на окружности окажется уже на втором витке окружности и поэтому мы уменьшим радиус ещё больше, чтобы эта вершина совпала с первой вершиной после двукратного обхода окружности. У этой окружности радиус будет примерно равен

[9] Это последнее утверждение означает, что степень многочлена не может быть понижена.

радиусу окружности, описанной вокруг правильного m- или $(m+1)$-угольника. Такую операцию мы можем повторить и дальше. Сколько раз это можно сделать? При нашем способе откладывания хорд все центральные углы φ_k положительны, а их сумма по формуле (6) кратна 2π. Каждый угол не больше π, следовательно, для натурального числа p кратности обхода имеем соотношение

$$2\pi p = \varphi_1 + \cdots + \varphi_n < n\pi \leqslant (2m+1)\pi,$$

откуда получаем $p \leqslant m + 1/2$, т. е. $p \leqslant m$. Следовательно, последний раз окружность будет обходиться m раз. Итак, пока получили m разных циклических n-угольников и им соответствует слагаемое при $k = 0$ в первом выражении для Δ_m в формуле (28).

В указанных построениях откладывание хорд проводилось все время в одном направлении, скажем, против часовой стрелки[10]. Теперь мы можем в процессе откладывания хорд, равных по длине данным сторонам, какую-либо одну хорду l_i отложить в обратном направлении, тогда следующая отложенная хорда вернёт нас приблизительно в положение, где была начальная точка хорды длины l_i, т. е. использование двух хорд нас оставляет приблизительно в том же положении, в котором мы были до их откладывания. Значит, при таком способе откладывания хорд результат будет такой же, как будто мы работаем с $2m - 1$ сторонами, следовательно, описанный в предыдущем абзаце процесс даст нам $m - 1$ циклических n-угольников. Так как в качестве окладываемой назад хорды l_i мы можем выбрать любую из $2m + 1$ сторон, в сумме мы получаем второе слагаемое (соответствующее значению $k = 1$) в первом выражении для Δ_m. Далее мы можем откладывать в обратном направлении 2, 3, и т. д., до $m-1$ хорд и получим, что в общем случае существует ровно Δ_m *комбинаторных* типов циклических $(2m+1)$-угольников, каждый из которых вписан в окружности с Δ_m *разными* радиусами $R_1, \ldots, R_{\Delta_m}$. Так как алгебраический смысл многочлена (27) точно такой же, как мы описали его в конце предыдущего параграфа для многочлена в случае циклического четырёхугольника, то в этом уравнении $Q = 0$ среди его корней должны встречаться площади *всех* циклических n-угольников с данными длинами сторон, поэтому степень многочлена Q при нечётных $n = 2m+1$ должна быть не меньше чем Δ_m (из соображений общего положения считается, что существуют наборы длин, для которых все построенные многоугольники имеют разные площади — это утверждение представляется очевидным при использовании формулы (5) для площади).

[10] В приведённом в §2 (и в [3] тоже) описании построения выпуклого циклического многоугольника предлагалось начать откладывание в разные стороны, но при приблизительно равных длинах сторон цели можно достичь откладыванием хорд в любую одну сторону.

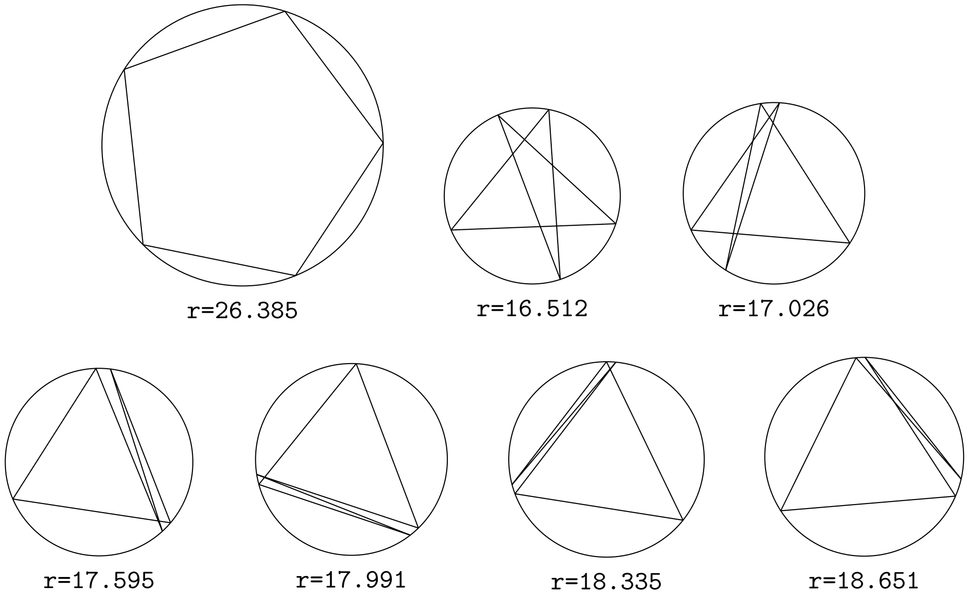

Рис. 7. Семь циклических пятиугольников со сторонами 29, 30, 31, 32, 33

На рис. 7, взятом из [13], изображены $\Delta_2 = 7$ циклических пятиугольников со сторонами 29, 30, 31, 32, 33.

При чётных $n = 2m+2$ предположим, что одна сторона очень маленькая. Тогда при откладывании этой стороны в положительном направлении мы получим приблизительно те же Δ_m многоугольники, что и в описанном выше построении для случая $n = 2m + 1$, а при откладывании этой стороны в обратном направлении получим ещё такое же количество Δ_m других циклических $(2m + 2)$-угольников. Следовательно, и в случае чётных $n = 2m + 2$ максимальное количество возможных описанных окружностей известно: существует ровно $2\Delta_m$ различных комбинаторных типов циклических $(2m+2)$-угольников, вписанных в окружности с различными радиусами.

Каждая реализация данного набора длин как циклического многоугольника даёт новое значение ориентированной площади многоугольника. Поэтому многочлен для площади должен иметь степень не меньше, чем число различных радиусов. При доказательстве теореме 2 указан общий способ построения полиномиального уравнения для R^2, но он не даёт никакой информации о степени этого многочлена. Однако указанный в [7] остроумный способ построения многочлена для R^2 приводит к многочлену точно нужной степени Δ_m или $2\Delta_m$ соответственно для $n = 2m + 1$ и $n = 2m + 2$.

Нетрудно показать, что при данном пронумерованном наборе длин для данного комбинаторного типа (т. е. когда известно, какие по номеру стороны отложены по, а какие — против часовой стрелки) и известного радиуса описанной окружности может существовать только один соответствующий циклический многоугольник (с точностью до вращения вдоль окружности), поэтому в общем случае количество значений квадрата ориентированной площади многоугольников равно количеству значений радиусов, причём это верно даже если мы будем рассматривать многоугольники с произвольным распределением длин из данного набора их значений по сторонам многоугольника[11)] (это свойство связано с симметричностью коэффициентов многочлена (27) относительно квадратов длин сторон многоугольника). Следовательно, степень многочлена для квадрата площади не меньше степени многочлена для R^2. Однако для получения точного значения степени этого многочлена есть два препятствия. Во-первых, этот многочлен может иметь бо́льшую степень, имея дополнительно к значениям площадей отрицательные или комплекснозначные корни S^2 или неотрицательные корни, не являющиеся значениями площади (впрочем, нам неизвестны примеры существования таких «корней-паразитов»). Во-вторых, как мы знаем из §2, бывают такие наборы длин и комбинаторные типы, для которых существует многоугольники с непрерывным семейством описанных окружностей. Значит, нужно убедиться, что многочлен для площади не может выродиться. Эта часть — существование для площади нормированного полиномиального уравнения — как мы уже говорили выше, доказана в [1] и [6]. А совпадение степени $\nu(n)$ этого многочлена с Δ_m или $2\Delta_m$ соответственно для $n = 2m+1$ и $2m+2$ доказано в [7] с привлечением довольно сложного для элементарного изложения алгебраического аппарата и, что самое интересное, с использованием связей изучаемого вопроса с многогранниками, называемыми подвесками. Напомним, что *подвески*, или *бипирамиды*, устроены следующим образом. В пространстве есть многоугольник (который может быть плоским или пространственным), называемый *экватором*, и две точки A и B, называемые *полюсами*, которые соединены со всеми вершинами экватора. Получаются боковые поверхности двух пирамид, склеенные вдоль экватора, что даёт гомеоморфный сфере многогранник. Диагональ, соединяющая два полюса, называется *главной*.

[11)] Это значит, что если мы поменяем порядок расположения произвольных двух сторон с данными длинами, но с сохранением направления их откладывания на той же окружности, тогда, хотя и получим новый многоугольник, но площадь его не изменится. Символически это можно записать так: пусть откладываемые против часовой стрелки стороны записаны в списке длин со знаком «+», а откладываемые по часовой стрелке стороны записаны в этом списке со знаком «−», и пусть, например, имеем запись «$+l_1, +l_2, -l_3, \dots$». Тогда список «$+l_1, -l_3, +l_2, \dots$» даст новый многоугольник, но с той же площадью.

Пусть рассматривается подвеска с экватором в виде плоского циклического многоугольника, с полюсами над центром описанной вокруг экватора окружности и с боковыми рёбрами равной длины. Устанавливается, что главная диагональ является алгебраической функцией от квадратов длин сторон экватора и квадрата длины бокового ребра. Затем, используя информацию о точном числе возможных значений радиуса окружности экватора, делается вывод, что при данных длинах рёбер подвеска в общем случае имеет ровно $\nu(n)$ реализаций. На основании этого делается вывод, что алгебраическая функция — ориентированная площадь экватора, принимающая $\nu(n)$ значений, должна быть корнем уравнения $\nu(n)$-й степени (вот для этого заключения нужно использовать тот алгебраический аппарат, о котором упоминалось выше). Нам кажется, что интересно было бы найти более простое доказательство равенства степени многочлена (27) числу $\nu(n)$.

Что касается третьей части теоремы — алгоритма нахождения многочленов из теорем 1, 2 и 3, то общая, но недостаточно эффективная, процедура их нахождения была объяснена при доказательстве теоремы 3. Есть несколько работ ([12], [13], [9]), в которых предлагается вводить различные вспомогательные функции и операции, через которые искомые полиномы пишутся в более компактном виде. В [9] таким образом некоторым единым методом получены многочлены для площади n-угольников при $n \leqslant 7$ и изучены некоторые их свойства. Отметим, что в работе [2] доказано, что полиномиальное уравнение для площади 5-угольника неразрешимо в радикалах.

§7. В заключение сформулируем ряд нерешённых задач этой теории.

1) Как было отмечено, есть наборы длин и комбинаторные типы, для которых радиусы описанной окружности допускают непрерывное семейство значений. Так как многочлен для площади нормированный (т. е. его старший коэффициент равен 1), он может иметь только конечное число корней, следовательно, при изменении радиуса окружности вписанный в неё многоугольник, изгибаясь нетривиально, с изменением диагоналей, сохраняет постоянную площадь. В связи с этим можно предполагать, что верна следующая

Гипотеза. *Произведение $16S^2R^2$ для циклического n-угольника является корнем некоторого нормированного многочлена, коэффициенты которого зависят только от квадратов длин сторон многоугольника.*

Для значений $n = 3$ и $n = 4$ это предположение верно: при $n = 3$ имеем соответственно уравнения $(4SR)^2 = a^2b^2c^2$, а для 4-угольника можно составить уравнение со старшим членом $(16S^2R^2)^2$ исходя из уравнений (11) и (16). Для 5-угольников это тоже верно, соответствующее уравнение найдено в [14] (оно 7-й степени для $16S^2R^2$, а в [15] есть уравнение 7-й степени для $4SR$, но только для выпуклых многоугольников); кстати, в [14] есть уравнение 7-й степени и для R^2. Если сформулированная гипотеза верна, тогда получим, что *в случае непрерывного изменения радиуса описанной окружности соответствующий многоугольник изгибается, имея* постоянную нулевую площадь.

2) Рассмотренную сейчас ситуацию можно обобщить как задачу нахождения изгибаний многоугольника, сохраняющих его площадь. Вариантов постановки задачи несколько: а) многоугольник циклический и изгибания происходят в классе циклических многоугольников; б) многоугольник циклический, но изгибания происходят не обязательно в классе циклических; в) наконец, общий случай — и изгибаемый многоугольник, и его изгибания происходят в классе общих многоугольников.

3) В работе [1] приводится много результатов о многочленах для квадрата малой диагонали, но нет утверждения о порядке этих уравнений, т. е. задача состоит в нахождении минимальной степени многочленов для квадратов длин малых диагоналей. Есть основания полагать, что эта степень такая же, как и уже известная степень для квадрата радиуса описанной окружности. К этому вопросу можно добавить вопрос о многочлене для произведения или отношения малой диагонали и радиуса.

4) Существуют наборы длин $l_1, \dots, l_n$, для которых можно построить $\nu(n)$ циклических многоугольников, однако есть наборы длин, когда таких многоугольников меньше. Как определить по набору длин, сколько многоугольников он определяет? В частности, бывают ли для любого $n > 4$ наборы, определяющие только один циклический многоугольник? Какие наборы определяют только локально выпуклые многоугольники (т. е. их внутренние углы при вершинах, остающиеся по определению по левую сторону при обходе, все или меньше, или больше π, в зависимости от направления обходя)? В алгебраическом плане получается следующее: в задаче о нахождении циклического n-угольника заданные длины сторон искомого многоугольника алгебраически независимы, так как по крайней мере один такой многоугольник существует при *любом* наборе длин, но существование двух или более таких многоугольников уже находится под вопросом. Их существование определяется выполнением некоторого алгебраического уравнения на длины или неравенства на них?

5) При любом наборе длин степень многочлена для S^2 (квадрата площади) одна и та же, а число многоугольников может быть меньше степени многочлена. Какой смысл имеют те корни многочлена, которые не соответствуют площадям реально существующих многоугольников? В частности, бывают ли положительные корни S^2, нереализуемые как площади? Какой смысл имеют отрицательные или комплексные корни многочлена?

6) Какой алгебраический или геометрический смысл имеют кратные корни какого-либо многочлена — для площади или для диагонали или для радиуса?

7) В устном разговоре с одним математиком автору была предложена идея рассмотреть вопрос о нахождении радиуса или площади циклического многоугольника через использование многочленов для объёмов многогранников с треугольными гранями, см. [5], построив для этого над многоугольником пирамиду с известной высотой h и равными боковыми рёбрами. В этой постановке на нахождение многочлена может оказать влияние наличие нового параметра — высоты h, но самая главная проблема заключается в том, что построенная пирамида ещё не является многогранником нужного класса, так как нет граней, составляющих её основание (например, даже в случае выпуклого циклического многоугольника для получения «дна» в виде совокупности треугольных граней многоугольник надо разбить на треугольники некоторой системой диагоналей, длины которых, однако, не даны). Поэтому лучше поступить, как у других авторов — рассмотреть регулярную подвеску, и попытаться, во-первых, получить для неё явное выражение для многочлена объёма, во-вторых, искать способ его применения к задаче о площади. Пока в вычислительной части есть работы противоположной направленности — искать объёмы подвесок, опираясь на знание площади полигональных экваторов, см., например, [15].

8) По-видимому, можно поставить более общую задачу о нахождении многочленов для площади или других характеристик многоугольника, вписанного в какую-нибудь данную алгебраическую кривую, для начала, скажем, в кривую второго порядка.

9) Изученную в работах [14] и [15] задачу определения площади многоугольника через площади прилегающих к его вершинам треугольников (обобщение формулы Гаусса, выражающей площадь 5-угольника через площади таких треугольников) можно переформулировать в терминах длин следующим образом: у многоугольника известны длины всех сторон и всех его малых диагоналей. Существует ли полиномиальное уравнение для его площади?

10) Известно, что теорема о существовании для многогранников нормированного многочлена для объёма верна в евклидовом пространстве и неверна в сферическом пространстве, а в пространстве Лобачевского этот вопрос остаётся открытым. Насколько нам известно, для циклических многоугольников вопрос о существовании полиномиального уравнения для их площади в случае неевклидовых пространств постоянной кривизны пока не исследовался.

11) Наконец, как этот круг вопросов может быть распространён на многоугольники в пространстве?

Список литературы

[1] Варфоломеев В.В. *Вписанные многоугольники и полиномы Герона* // Матем. сборник. Т. 194, №3, 2003. С. 3–24.

[2] Варфоломеев В.В. *Группы Галуа полиномов Герона – Сабитова для пятиугольников, вписанных в окружность* // Матем. сборник. Т. 195, №2, 2004. С. 149–162.

[3] Крыжановский Д.А. *Изопериметры*. М.: Физматгиз, 1959.

[4] Прасолов В.В. *Задачи по планиметрии*. М.: МЦНМО, 2007.

[5] Сабитов И.Х. *Объемы многогранников*. М.: МЦНМО, 2002. 2-е изд., 2009.

[6] Connelly R. *Comments on generalized Heron polynomials and Robbins' conjectures*. Preprint, Cornell University, 2004.

[7] Fedorchuk M., Pak I. *Rigidity and polynomial invariants of convex polytopes* // Duke Math. J. V. 129, 2005. P. 371–404.

[8] Landers P. *Dying Mathematician Spends Last Days on Area of Polygon* // WSJ. July 29, 2003. P. 1.

[9] Maley M.F., Robbins D.P., Roskies J. *On the area of cyclic and semicyclic polygons*. `arXiv:math.MG/040/300v1 16Jul2004`.

[10] Pak I. *The area of cyclic polygons*: *recent progress on Robbins' Conjecture* // Adv. Applied Math. V. 34, 2005. P. 690–696. Эл. версия `arXiv:math.MG/0408104`

[11] Pak I. *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry*. Cambridge University Press, 2009.

[12] Robbins D. *Areas of polygons inscribed in a circle* // Discrete and Comput. Geometry. V. 12, №2, 1994. P. 223–236.

[13] Robbins D. *Areas of polygons inscribed in a circle* // Amer. Math. Monthly. V. 102, №6, 1995. P. 523–530.

[14] Svrtan D., Veljan D., Volenec V. *Geometry of pentagons*: *from Gauss to Robbins*. `arXiv:math.MG/0403503 v1 29 Mar 2004`.

[15] Veljan D. *Geometry of pentagons and volumes of fullerenes*. Препринт, доступен по: `http://crosbi.znanstvenici.hr/index.html?lang=EN`

Сабитов Иджад Хакович, 119992 ГСП-2 Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет
E-mail: `isabitov@mail.ru`