Базисные вложения и 13-я проблема Гильберта*

А. Б. Скопенков

В этой статье рассказано, как при решении 13-й проблемы Гильберта о суперпозициях непрерывных функций появилось понятие базисного подмножества и базисного вложения. Приводятся красивые результаты об этих понятиях, большая часть которых доступна старшекласснику. Три части статьи можно читать независимо друг от друга (в небольшом количестве мест, в которых одна часть использует другую, приведены точные ссылки).

В первой части приводится элементарное изложение идеи решения 13-й проблемы Гильберта о суперпозициях А. Н. Колмогоровым и В. И. Арнольдом (по мотивам [1]). При этом показывается, как естественно появилось понятие базисного вложения, и остаётся без доказательства важнейшее место (лемма Колмогорова о деревьях).

Подмножество $K \subset \mathbb{R}^2$ называется *базисным*, если для любой непрерывной функции $f\colon K \to \mathbb{R}$ существуют такие непрерывные функции $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(x,y) = g(x) + h(y)$ для каждой точки $(x,y) \in K$.

Во второй части приводится характеризация графов, которые можно вложит в плоскость в качестве базисных подмножеств [17, 18] (решение проблемы Штернфельда), а также её обобщения [7, 8, 13, 17, 18].

Третья часть наиболее элементарна (см., например, задачи 1b и 4a). Приводится характеризация базисных подмножеств плоскости (решение проблемы Арнольда) [2, 14, 15, 18], а также её обобщения [4, 5, 16, 18].

В тексте много задач, к большинству которых приводятся решения (в конце соответствующего пункта). Если условие задачи является утверждением, то задача состоит в том, чтобы это утверждение доказать. Трудные задачи отмечены звёздочкой, а нерешённые — двумя.

*Обновляемая версия: `http://arxiv.org/abs/1001.4011`. Отдельные части работы представлялись на летних конференциях Турнира Городов 1997 и 2006 годов (В. А. Гориным, В. А. Курлиным, И. Н. Шнурниковым и автором), на семинарах мехмата МГУ и на семинаре по геометрии в МЦНМО. Некоторые задачи о гладкой базисности представлялись А. А. Бараном на международной конференции школьников Intel ISEF в 2003 году. Ссылки даются по возможности не на оригинальные работы, а на обзоры.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 14, 2010(143–174)

Если некоторое замечание в сноске или условие задачи вам непонятно, то его нужно просто игнорировать. Это не приведёт к непониманию дальнейшего материала.

Благодарю В. И. Арнольда, Ю. М. Бурмана, С. М. Воронина, М. Н. Вялого, А. Р. Сафина и И. Н. Шнурникова за полезные обсуждения, а также М. Н. Вялого за подготовку рисунков.

1. О решении 13-й проблемы Гильберта

13-я проблема Гильберта

Пусть дано некоторое множество функций $F = \{f_\alpha(x_1, \dots, x_{n_\alpha})\}_{\alpha \in A}$ (не обязательно конечное). Определим *суперпозицию* функций из F (или *формулу* над F) индуктивно:

(1) сами функции f_α и все переменные x_j являются суперпозициями функций из F.

(2) если функции $f(x_1, \dots, x_n)$, $g_1(\dots)$, $\dots$, $g_n(\dots)$ являются суперпозициями функций из F (не обязательно различными), то и функция $f(g_1(\dots), \dots, g_n(\dots))$ является суперпозицией функций из F.

Здесь в качестве аргументов функций g_i можно подставлять любые наборы переменных (эти переменные могут идти в любом порядке, а некоторые из переменных могут совпадать).[1)]

Например, полином $\sum a_{k_1 \dots k_n} x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$ есть суперпозиция функций $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = xy$ и констант. Причём если можно использовать функции одной переменной, то для $x, y > 0$ произведение можно и не использовать, так как $xy = 2^{\log_2 x + \log_2 y}$.

Рассмотрим следующие вопросы.

1. *Можно ли каждую функцию нескольких аргументов записать в виде суперпозиции функций не более чем двух аргументов*?

2. *Можно ли каждую функцию двух аргументов записать как суперпозицию функций одного аргумента и простейшей функции двух аргументов* (*например, сложения*)? [2)]

Поскольку плоскость и прямая равномощны, то любую функцию трёх и более переменных можно выразить в виде суперпозиции (вообще говоря, *разрывных*) функций двух переменных (см. детали в [1]). Поэтому указанные вопросы интересны только для *непрерывных* функций.

[1)] Определение суперпозиции можно также сформулировать графически, на языке схем.

[2)] Для функций алгебры логики ответы на оба вопроса положительны (поскольку любую функцию алгебры логики можно выразить через «и» и «не»). Аппроксимационная теорема Вейерштрасса показывает, что функция нескольких аргументов может быть *равномерно приближена* на компактном множестве полиномами, т. е. суперпозициями констант, сложения и умножения.

Через

$$|x, y| = |(x_1, \ldots, x_n),\ (y_1, \ldots, y_n)| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

обозначается обычное расстояние между точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть K — подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. Функция $f\colon K \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной*, если для любых точки $x_0 \in K$ и числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой точки $x \in K$ с условием $|x, x_0| < \delta$ выполнено $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Например, функция $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ является непрерывной на плоскости, а функция $f(x_1, x_2)$, равная целой части от $x_1 + x_2$, — нет. В дальнейшем все функции предполагаются непрерывными, если явно не оговорено противное.

Ясно, что любая элементарная функция представляется в виде суперпозиции функций двух переменных. Простейшие неэлементарные функции — корни алгебраических уравнений. К 1900 году было известно, что любое алгебраическое уравнение n-й степени сводится (при помощи радикалов, сложения, вычитания, умножения и деления) к такому, у которого коэффициенты при x^n и x^0 равны 1, а при x^{n-1}, x^{n-2} и x^{n-3} равны 0. Таким образом, остаётся $n - 4$ переменных коэффициента. Поэтому «простейшей» функцией, для которой не было известно выражение через функции двух переменных, была функция $x(a, b, c)$, выражающая решение уравнения $x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ седьмой степени. Поэтому Гильберт сформулировал свою 13-ю проблему так:

Доказать, что уравнение седьмой степени $x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ неразрешимо без использования функций трёх переменных.

Гильберту удалось показать, что некоторые *аналитические* функции трёх переменных не являются суперпозициями аналитических же функций двух переменных [1]. В 1954 г. Витушкин доказал, что некоторые r *раз непрерывно дифференцируемые* функции не являются суперпозициями r раз непрерывно дифференцируемых функций двух переменных [1,3]. Для *непрерывных* же функций гипотеза Гильберта была опровергнута в 1957 году Колмогоровым и Арнольдом.

Теорема Колмогорова – Арнольда. *Любая непрерывная функция представляется в виде суперпозиции непрерывных функций одного и двух аргументов.*

Теорема Колмогорова: к суперпозициям функций трёх переменных

Сначала в 1956 г. Колмогорову удалось доказать, что *произвольная непрерывная функция более чем трёх переменных является суперпозицией непрерывных функций трёх переменных.* Он использовал следующее

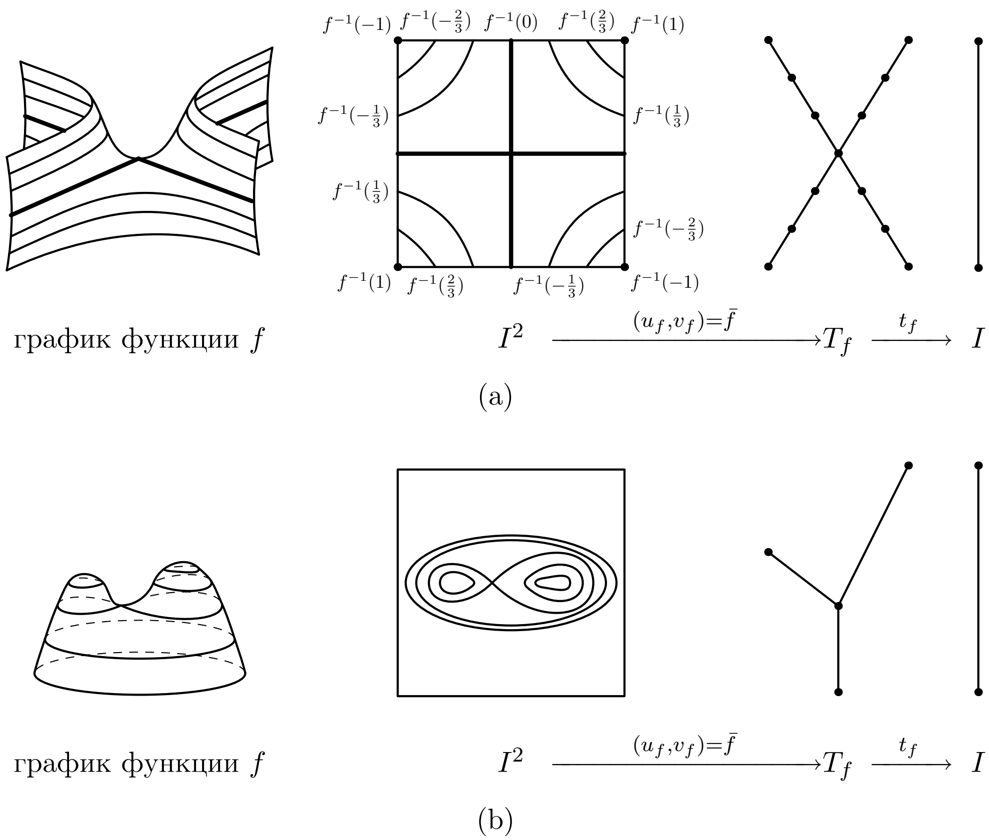


Рис. 1. Примеры деревьев компонент множеств уровня и разложений Кронрода

понятие. (Если это понятие или последующий текст до леммы Колмогорова об универсальных функциях покажутся вам сложными, вы можете сразу перейти к этой лемме. Другой вариант — прочитать этот текст для $n = 2$, а в этой лемме снова вернуться к произвольному n.)

Обозначим $I = [-1; 1]$. *Деревом* T_f *компонент множеств уровня* функции $f\colon I^n \to I$ называется метрическое пространство, точками которого являются компоненты связности множеств $f^{-1}(c)$, $c \in I$, а метрика определена в `http://en.wikipedia.org/wiki/Hausdorf_distance`.

Например, дерево компонент множеств уровня функции $f\colon I^2 \to I$, $f(x, y) = xy$, гомеоморфно букве X. Другие примеры приведены на рис. 1 (см. детали в [1]).

Очевидно, что любая функция $f\colon I^n \to I$ от n переменных представляется в виде композиции $I^n \xrightarrow{t_f} T_f \xrightarrow{\overline{f}} I$ для некоторых отображений $\overline{f}$

и t_f. Пространство T_f можно считать лежащим без самопересечений в квадрате I^2.[3)] Поэтому t_f можно считать парой функций $u_f, v_f\colon I^n \to I$. Функцию $\overline{f}$ можно продолжить на весь квадрат I^2 (по теореме Урысона о продолжении), т. е. считать функцией двух переменных. Итак, имеем (рис. 1) *разложение Кронрода*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}(u_f(x_1, \ldots, x_n), v_f(x_1, \ldots, x_n)).$$

Лемма Колмогорова об универсальных деревьях. *Для любого $n \geqslant 2$ существуют такие деревья $T_1, \ldots, T_{n+1}$ и функции $t_i\colon I^n \to T_i$, что для любой непрерывной функции $f\colon I^n \to I$ от n переменных существуют непрерывные функции $g_1, \ldots, g_{n+1}\colon I^n \to I$ от n переменных, для которых*

$$T_{g_i} = T_i, \quad t_{g_i} = t_i \quad \text{и} \quad f = g_1 + \cdots + g_{n+1}.$$

Важно, что деревья T_{g_i} компонент множеств уровня функций g_i (и соответствующие отображения t_{g_i}) не зависят от f, хотя сами функции g_i могут зависеть от f.

По-видимому, лемма верна и для $n = 1$ (но это нетривиально).

Доказательства мы не приводим. Хотя оно является важным шагом в доказательстве теоремы Колмогорова – Арнольда, но наша цель — осветить именно те шаги, в которых появилось понятие базисного вложения. Кроме того, проблему Гильберта можно решить намного проще: см. ниже суперпозиционную теорему Колмогорова и её доказательство в [1].

Из леммы Колмогорова об универсальных деревьях и разложения Кронрода вытекает следующий результат (докажите!).

Лемма Колмогорова об универсальных функциях. *Для любого $n \geqslant 3$ существует такой набор из $2n + 2$ непрерывных функций $u_i, v_i\colon I^n \to I$ $(i = 1, \ldots, n + 1)$ от n переменных, что для любой непрерывной функции $f\colon I^n \to I$ от n переменных существуют непрерывные функции $f_i\colon I^2 \to I$ $(i = 1, \ldots, n + 1)$ двух переменных, для которых*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(u_i(x_1, \ldots, x_n), v_i(x_1, \ldots, x_n)).$$

Важно, что функции u_i, v_i не зависят от f (при фиксированном n), хотя функции f_i могут зависеть от f.

Эта лемма тривиальна для $n = 1$ и $n = 2$ (подумайте, почему).

[3)] Для доказательства нужно показать, что T_f является *деревом*, т. е. одномерным стягиваемым локально связным компактом. Примеры деревьев находятся на рис 3, 4, 5 ниже. Любое дерево планарно [6].

Набросок доказательства теоремы Колмогорова о выразимости через функции трёх переменных. Для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ четырёх переменных имеем

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_{x_4}(x_1, x_2, x_3) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{4} f_{x_4,i}(u_i(x_1, x_2, x_3), v_i(x_1, x_2, x_3)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} F_i(u_i(x_1, x_2, x_3), v_i(x_1, x_2, x_3), x_4), \quad \text{где } F_i(a, b, c) = f_{c,i}(a, b).$$

Функция f_{x_4} непрерывно зависит от параметра x_4. Равенство $(*)$ получается применением леммы Колмогорова об универсальных функциях. Мы используем усиленный вариант этой леммы, утверждающий, что каждая из $n+1$ функций f_i непрерывно зависит от исходной функции f. Из этого варианта вытекает непрерывная зависимость функций $f_{x_4,i}$ от параметра x_4 $(i = 1, 2, 3, 4)$. А это влечёт непрерывность функций F_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Для функции большего количества переменных рассуждение аналогично. □

Задача 1. За одну копейку автомат выдаёт значение заданной вами непрерывной функции трёх переменных на заданной вами тройке чисел. За какую сумму вы заведомо сможете вычислить заданную непрерывную функцию n переменных (при условии наличия у вас неограниченной памяти)?

Теорема Арнольда: к суперпозициям функций двух переменных

Для доказательства теоремы Колмогорова – Арнольда осталось произвольную непрерывную функцию трёх переменных выразить через суперпозицию непрерывных функций двух переменных. Для этого полезно следующее понятие.

Подмножество $T \subset I^3$ назовём *базисным*, если любая непрерывная функция на T может быть разложена в сумму трёх функций, каждая из которых зависит только от одной координаты. Или, формально, если для любой непрерывной функции $f\colon T \to I$ существуют такие непрерывные функции $f_1, f_2, f_3\colon I \to I$, что

$$f(x, y, z) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) \quad \text{для } (x, y, z) \in T.$$

Лемма Арнольда о деревьях. *Любое дерево реализуется как базисное подмножество в I^3 (т. е. топологически эквивалентно некоторому базисному подмножеству в I^3).*[4)]

[4)]Доказательство леммы Арнольда использует теорему Менгера о существовании

Идея доказательства видна на примере доказательства либо базисной вложимости в плоскость конечного дерева, из каждой вершины которого выходит либо одно, либо три ребра [1], либо более сильного утверждения (c) в предпоследнем пункте второй части.

Лемма Арнольда об универсальных функциях. *Существует такой набор из девяти непрерывных функций $u_i\colon I^2 \to I$ $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ двух переменных, что для любой непрерывной функции $f\colon I^2 \to I$ двух переменных существуют непрерывные функции $f_i\colon I \to I$ $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ одной переменной, для которых $f(x, y) = f_1(u_1(x, y)) + \cdots + f_9(u_9(x, y))$.*

Важно, что функции u_i не зависят от f, хотя функции f_i могут зависеть от f.

Доказательство. Возьмём деревья T_1, T_2, T_3 из леммы Колмогорова об универсальных деревьях для $n = 2$. По лемме Арнольда о деревьях существуют базисные вложения $(u_{i1}, u_{i2}, u_{i3})\colon T_i \to I^3$. Положим $u_{3(i-1)+j} := u_{ij}$. Возьмём функции $g_1, g_2, g_3\colon I^2 \to I$ (зависящие от f) из леммы Колмогорова об универсальных деревьях для $n = 2$. Применяя аналог разложения Кронрода и определение базисности, получаем

$$\begin{aligned} g_i(x, y) = \overline{g_i}(u_{i1}(x, y), u_{i2}(x, y), u_{i3}(x, y)) = \\ = g_{i1}(u_{i1}(x, y)) + g_{i2}(u_{i2}(x, y)) + g_{i3}(u_{i3}(x, y)). \end{aligned}$$

Остаётся положить $f_{3(i-1)+j}\colon = g_{ij}$. □

Теперь теорема Колмогорова – Арнольда вытекает из

$$f(x, y, z) = f_z(x, y) = \sum_{i=1}^{9} f_{i,z}(u_i(x, y)) = \sum_{i=1}^{9} F_i(u_i(x, y), z),$$

где $F_i(t, z) := f_{i,z}(t)$. Непрерывность функций F_i доказывается аналогично предыдущему пункту (с использованием соответствующего усиления леммы Арнольда об универсальных функциях).

Задача 2. За одну копейку автомат выдаёт значение заданной вами непрерывной функции двух переменных на заданной Вами паре чисел. За какую сумму вы заведомо сможете вычислить заданную непрерывную функцию n переменных (при наличии неограниченной памяти)?

универсального дерева. На самом деле, Арнольд доказал эту лемму для деревьев с точками ветвления третьего порядка. Этого было достаточно для решения проблемы Гильберта. Общий случай леммы доказан Острандом в 1965 г. [18].

Теорема Колмогорова: к функциям одной переменной и сложению

В том же 1957 году Колмогоров доказал ещё более сильный результат, из которого также вытекает решение проблемы Гильберта.

Суперпозиционная теорема Колмогорова. *Любая непрерывная функция представляется в виде суперпозиции сложения и непрерывных функций одной переменной.*

Более точно, для каждого $n > 1$ существует набор $n(2n+1)$ таких непрерывных функций $u_{ij}\colon I \to I$ ($i = 1, \dots, 2n+1$, $j = 1, \dots, n$) одной переменной, что для любой непрерывной функции $f\colon I^n \to I$ от n переменных существуют непрерывные функции $f_1, \dots, f_{2n+1}\colon I \to I$ одной переменной, для которых

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} f_i\left(\sum_{j=1}^{n} u_{ij}(x_j)\right).$$

Здесь важно, что функции u_{ij} не зависят от f, хотя функции f_i могут зависеть от f. Элементарное изложение доказательства приведённой теоремы можно найти в [1].

Задача 3. За одну копейку автомат либо складывает два заданных вами числа, либо выдаёт значение заданной вами непрерывной функции одной переменной в заданной вами точке. За какую сумму вы заведомо сможете вычислить заданную непрерывную функцию n переменных (при наличии неограниченной памяти)?

Об аналитических проблемах, связанных с этим выдающимся результатом Колмогорова, см. [3, 18]. О топологических проблемах написано далее.

Базисные вложения в многомерные пространства[5)]

Подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *базисным*, если для любой непрерывной функции $f\colon K \to \mathbb{R}$ существуют такие непрерывные функции $f_1, \dots, f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \dots + f_n(x_n) \quad \text{для } (x_1, \dots, x_n) \in K.$$

Пространство K называется *базисно вложимым* в $\mathbb{R}^n$, если существует вложение $K \to \mathbb{R}^n$, образ которого базисный.

[5)] Этот пункт неэлементарен, формально не используется в дальнейшем и может быть опущен читателем. Однако мы приводим его, поскольку он даёт чёткую картину для разных размерностей.

Функции на произвольном n-мерном компакте уже нельзя представлять себе как функции n переменных. Однако понятие базисной вложимости доставляет аналог разложимости функций на компактах в суперпозицию фиксированных функций и сложения.

Из суперпозиционной теоремы Колмогорова следует, что *n-мерный куб базисно вложим в* $\mathbb{R}^{2n+1}$. Действительно, функции $u_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}$ $(i = 1, \ldots, 2n+1)$ из теоремы Колмогорова определяют базисное вложение $I^n \to I^{2n+1}$. Остранд заметил в 1965 г., что этот факт можно обобщить.

Теорема Остранда. *Любой n-мерный компакт базисно вложим в* $\mathbb{R}^{2n+1}$ [18].

Эта теорема усиливает теорему Неблинга – Менгера – Понтрягина о вложимости любого n-мерного компакта в $\mathbb{R}^{2n+1}$ [6].

На самом деле Остранд доказал следующий более сильный результат, обобщающий суперпозиционную теорему Колмогорова (а не только её следствие).

Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — конечномерные метрические пространства. Положим $n = \dim X_1 + \cdots + \dim X_m$ и $X = X_1 \times \cdots \times X_m$. Тогда существуют такие непрерывные функции $u_{ij}\colon X_j \to \mathbb{R}$, $(i = 1, \ldots, 2n+1$, $j = 1, \ldots, m)$, что для функций $u_i(x_1, \ldots, x_m) = u_{i1}(x_1) + \cdots + u_{im}(x_m)$ и любой непрерывной функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ существуют непрерывные функции $f_1, \ldots, f_{2n+1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых

$$f(x_1, \ldots, x_m) = f_1(u_1(x_1, \ldots x_m)) + \cdots + f_{2n+1}(u_{2n+1}(x_1, \ldots, x_m)).$$

Имеются n-мерные полиэдры, не вложимые в $\mathbb{R}^{2n}$ [9], [12].

Теорема Штернфельда. *Для любого $n \geqslant 2$ любой n-мерный компакт (например, n-мерный куб) не вложим базисно в* $\mathbb{R}^{2n}$ [18].

Интересно, что теорема Штернфельда редуцируется к комбинаторно-геометрическому утверждению при помощи многомерного аналога критерия базисности, приведённого в третьей части настоящей статьи.

Очевидно, что K базисно вложим в $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда K топологически вложим в $\mathbb{R}$. Из теорем Остранда и Штернфельда следует, что *для $m > 2$ компакт K базисно вложим в $\mathbb{R}^m$ тогда и только тогда, когда* $\dim K < m/2$. Таким образом, в 1989 г. оставалось неизвестным лишь описание компактов, базисно вложимых *в плоскость*.

2. Базисные вложения в плоскость

Базисная вложимость в плоскость

Граф (или компакт) K называется *базисно вложимым* в плоскость, если существует такое вложение $\varphi\colon K \to \mathbb{R}^2$, что для любой непрерывной функции $f\colon \varphi(K) \to \mathbb{R}$ существуют такие непрерывные функции $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для любой точки $(x, y) \in \varphi(K)$. (Определение непрерывной функции напомнено в начале части 1.)

Проблема описания графов (и компактов), базисно вложимых в плоскость, поставлена Штернфельдом [18]. Критерий базисной вложимости линейно-связных компактов в плоскость получен в [17]. Для конечных графов он формулируется особенно просто.

Критерий базисной вложимости графов ([17], ср. [11]). *Конечный граф K базисно вложим в плоскость тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих двух эквивалентных условий*:

(S) *K не содержит подграфов, гомеоморфных окружности S^1, пентоду $T_5 = C_1$ или кресту с разветвлёнными концами $C = C_2$* (рис. 2);

(U) *K содержится в одном из графов R_n* (рис. 3).

Определение графов F_n и R_n (рис. 3). Пусть F_1 — триод, и для любого n граф F_{n+1} получен из F_n разветвлением каждого висячего ребра графа F_n. Граф R_n получается из графа F_n добавлением висячего ребра к каждой точке ветвления графа F_n.

Доказательство приводится в следующем пункте.

Приведём без доказательства решение проблемы Штернфельда для более общего случая (его можно пропустить без ущерба для понимания дальнейшего). Неспециалисту покажется удивительным, что общий случай намного сложнее случая графов, а специалисту покажется удивительным, что в общем случае вообще хоть что-то удаётся доказать.

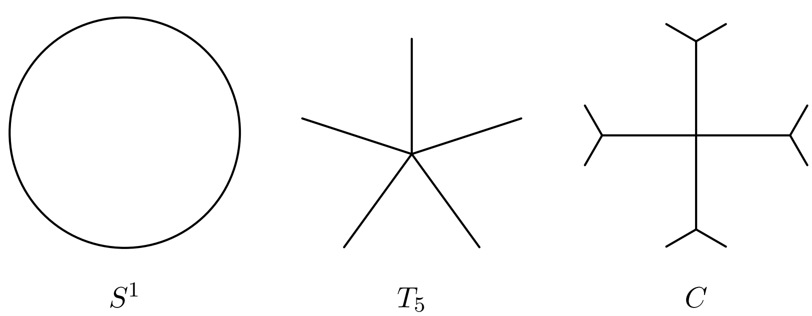


Рис. 2.

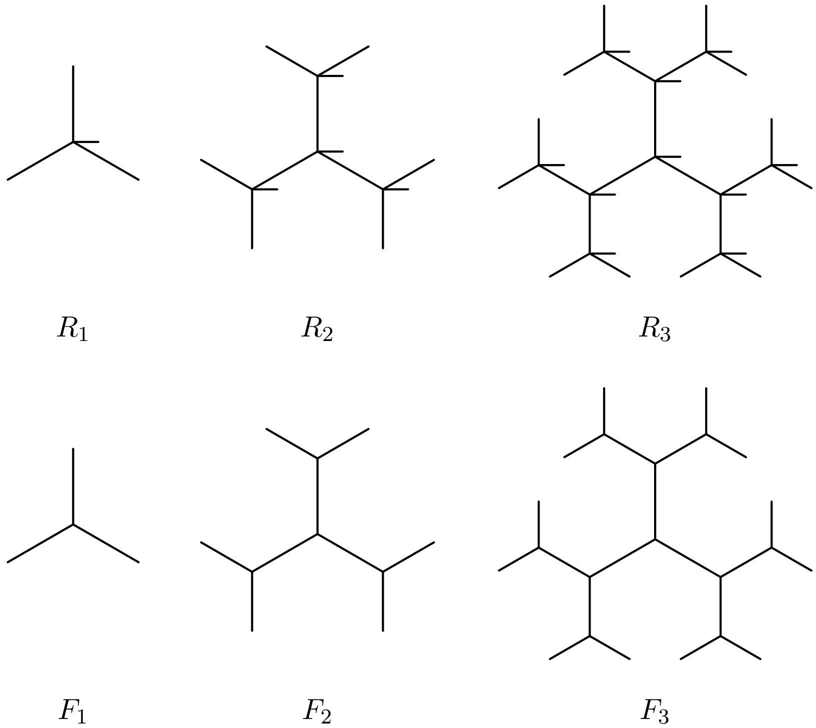


Рис. 3.

Критерий базисной вложимости линейно-связных компактов ([17], ср. [11]) *Линейно-связный компакт K базисно вложим в плоскость тогда и только тогда, когда он является локально связным (т. е. пеановским) и выполнено одно из следующих двух эквивалентных условий*:

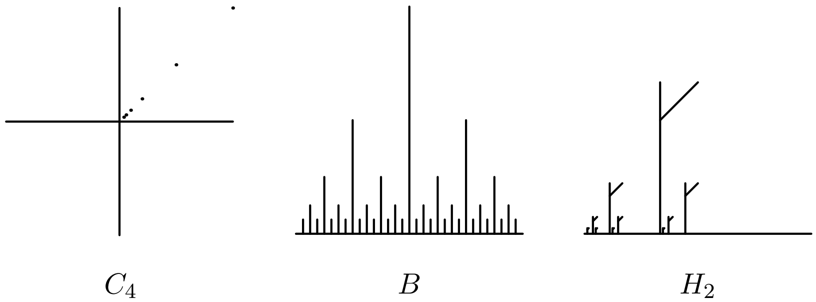
(1) *K не содержит подкомпактов S^1, C_2, C_4, B и, для некоторого n, подкомпактов F_n и H_n* (рис. 2, 3, 4);

(2) *K не содержит подконтинуумов S^1, C_1, C_2, C_3, B, F, H_+, H_-, h_+, h_-* (рис. 2, 4, 5).

Введём использованные обозначения (рис. 4, 5). *Нуль-последовательностью* множеств называется последовательность множеств, диаметры которых стремятся к нулю.

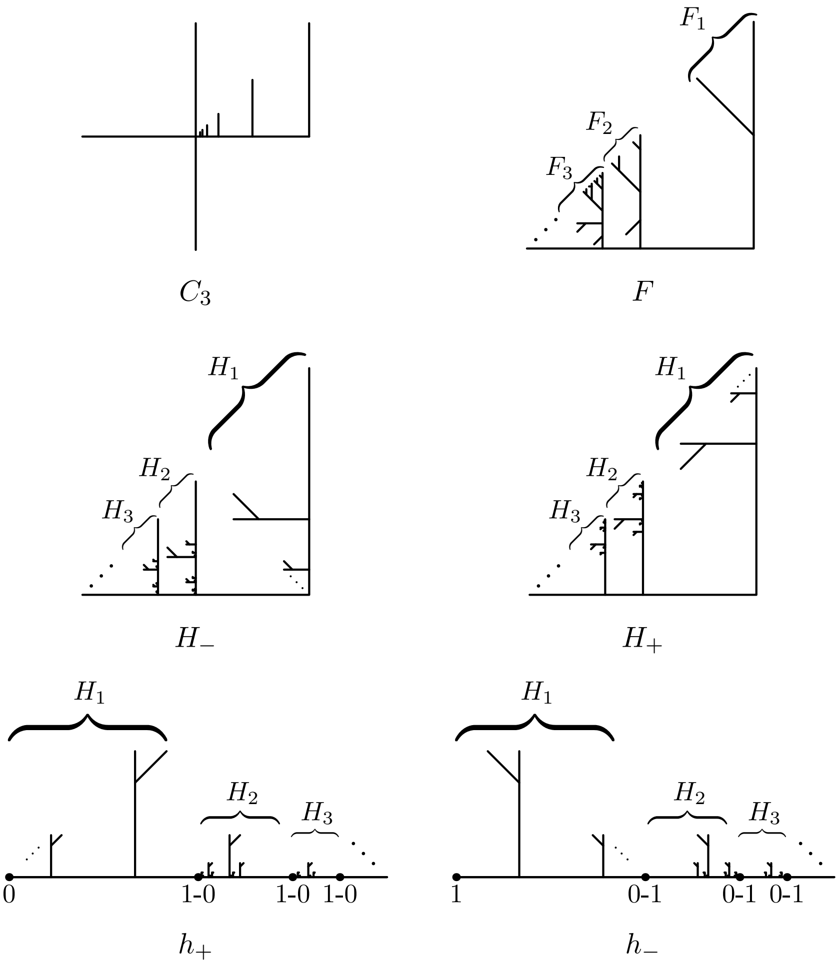
Обозначим через C_3 крест с нуль-последовательностью дуг, сходящихся к его «центру» и приклеенных к одной из его «ветвей».

Обозначим через C_4 крест с последовательностью точек, сходящихся к его «центру».



C_4
B
H_2

Рис. 4.



C_3
F_1
F_2
F_3
F
H_1
H_2
H_3
H_-
H_1
H_2
H_3
H_+
H_1
H_2
H_3
0
1-0
1-0
1-0
h_+
H_1
H_2
H_3
1
0-1
0-1
0-1
h_-

Рис. 5.

Каждый из континуумов B, H_n, F, H_+, H_- является объединением отрезка $I = [0;1]$ и нуль-последовательности

- дуг, приклеенных за один конец к $(0,1)$ в двоично-рациональных точках (для B; очевидно, что топологический тип пространства B не зависит от вариаций в этом построении);
- триодов, приклеенных к I за один конец в точках множества $\{3^{-l_1} + \dots + 3^{-l_s} : s \leqslant n,\ 0 < l_1 < \dots < l_s\ \text{— целые}\}$ (для H_n);
- графов F_n, приклеенных к точкам $1/n$ за одну из висячих вершин (для F);
- континуумов H_n, соединённых с точками $1/n$ дугами, пересекающими H_n в $1 \in I \subset H_n$ (для H_+) или в $0 \in I \subset H_n$ (для H_-).

Континуум h_+ (соответственно h_-) получен из нуль-последовательности континуумов H_n склеиванием точек $1 \in I \subset H_n$ и $0 \in I \subset H_{n-1}$ (соответственно точек $0 \in I \subset H_n$ и $1 \in I \subset H_{n-1}$).

Гипотеза о базисной вложимости (не обязательно линейно-связных) континуумов в плоскость ещё более громоздка. Она сформулирована в [10, 17].

Набросок доказательства критерия базисной вложимости графов

Достаточно доказать следующие три утверждения.

(a) Окружность S^1, пентод T_5 и крест с разветвлёнными концами C (рис. 2) не вложимы базисно в $\mathbb{R}^2$.

(b) Если конечный граф K не содержит ни одного из графов S^1, T_5 и C (рис. 2), то K содержится в R_n (рис. 3) для некоторого n.

(c) Каждый граф R_n (рис. 3) базисно вложим в $\mathbb{R}^2$.

Набросок доказательства утверждения (b). Докажем, что *дерево K с n невисячими вершинами, не содержащее графов T_5 и C, содержится в R_n*. Возьмём произвольную вершину $a \in K$. Поскольку K не содержит T_5 и C, то $\deg a \leqslant 4$, причём если $\deg a = 4$, то a имеет висячее ребро. Значит, окрестность точки a из K можно вложить в R_n так, что a попадёт в центр R_n, а эта окрестность перейдёт в окрестность T_4 центра R_n. С каждой вершиной, соседней с a, поступаем аналогично. Поскольку «глубина» графа R_n (т. е. количество невисячих вершин на самой длинной ветви от центра) равна n, а невисячих вершин в K ровно n, то, продолжая этот процесс дальше, мы сможем вложить в R_n весь граф K. $\square$

Набросок доказательства утверждения (c). Обозначим через R_0 отрезок. Базисные вложения $R_n \to \mathbb{R}^2$ строятся по индукции для $n \geqslant 0$. Вложим R_0 в $[-7;5]^2$ как диагональ, соединяющую точки $(-7,-7)$ и $(5,5)$.

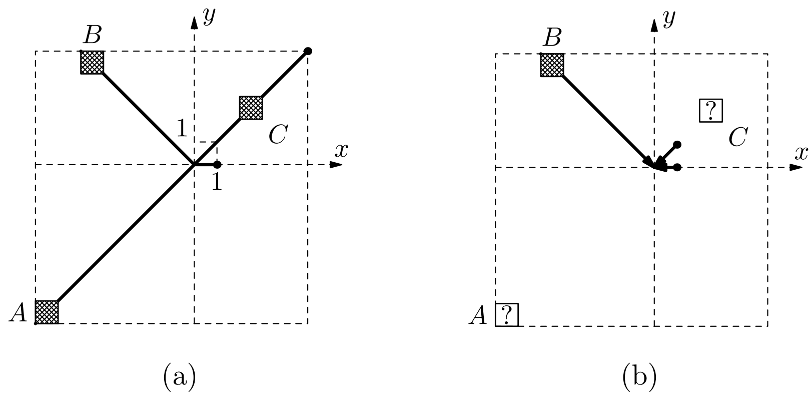


Рис. 6.

Вложение $R_n \to \mathbb{R}^2$ получается из вложения на рис. 6a добавлением трёх вложений графа R_{n-1} в квадратики A, B, C. Проекции A_x, B_x, C_x квадратиков на ось Ox не пересекаются друг с другом и с проекцией отрезка в R_n, параллельного горизонтальной оси. Аналогичное утверждение справедливо и для проекций A_y, B_y, C_y квадратиков на ось Oy.

Докажем, что построенные вложения базисные, при помощи индукции по n. База индукции $n = 0$ очевидна. Докажем шаг индукции.

Пусть $n \geqslant 1$ и $f\colon R_n \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Для $t \in [0;1]$ положим

$$\begin{aligned} g(t) &:= f(t,0), \\ h(t) &:= f(t,t) - g(t) = f(t,t) - f(t,0), \\ g(-t) &:= f(-t,t) - h(t) = f(-t,t) - f(t,t) + f(t,0). \end{aligned}$$

По предположению индукции существуют такие функции

$$\begin{gathered} g\colon A_x \cup B_x \cup C_x \to \mathbb{R} \text{ и } h\colon A_y \cup B_y \cup C_y \to \mathbb{R}, \text{ что} \\ f(x,y) = g(x) + h(y) \text{ для } (x,y) \in (A \cup B \cup C) \cap R_n. \end{gathered}$$

Положим

$$\begin{aligned} g(-t) &:= f(-t,t) - h(t) \quad \text{для } t \in C_y \text{ и} \\ h(t) &:= f(t,t) - g(t) \quad \text{для } t \in (-C_y) \cup B_x. \end{aligned}$$

Продолжим построенную функцию $g\colon A_x \cup B_x \cup (-C_y) \cup [-1;1] \cup C_x \to \mathbb{R}$ до непрерывной функции $g\colon [-7;1] \cup C_x \to \mathbb{R}$ (например, линейно). Положим

$$\begin{aligned} h(t) &:= f(-|t|,t) - g(t) \quad \text{для } t \in [-6;4] \text{ и} \\ g(t) &:= f(t,t) - h(t) \quad \text{для } t \in [1;2] \cup [3;5] \end{aligned}$$

(это определение совпадает с прежним для $t \in [-1;1]$). После этого продолжим g и h до непрерывных функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ясно, что полученные функции g и h — искомые. $\square$

При доказательстве утверждения (а) мы используем критерий базисности из части 3 (а также приведённое перед ним определение молнии и приведённое после него определение операции E).

Доказательство базисной невложимости окружности [18]. Пусть задано вложение окружности $S \subset \mathbb{R}^2$. На первом шаге применения E в S закрашивается в белый цвет не более четырёх точек (это точки, в которых существуют опорные прямые, параллельные координатным осям и пересекающие K ровно в одной точке). Если после n-го шага применения E закрашено белым цветом k точек, то на следующем шаге закрашивается не более $2k$ точек. В самом деле, если закрашивается точка $a \in E^n(S)$, то хотя бы на одной из двух прямых, проходящих через a и параллельных координатным осям, есть закрашенная ранее точка. В противном случае каждая из этих прямых высекает в $E^n(S)$ не менее двух точек, т. е. a не может быть закрашена на $(n+1)$-м шаге. Итак, после конечного числа шагов будет закрашено конечное число точек, т. е. $E^n(S) \neq \varnothing$ для любого n. $\square$

Доказательство базисной невложимости пентода. Предположим, что пентод T_5 базисно вложен в плоскость. Пусть d — вершина пентода. Так как $E^n(T_5) = \varnothing$ для некоторого n, то существует максимальное k такое, что $E^k(T_5)$ содержит проколотую окрестность U вершины d в T_5. Тогда на $(k+1)$-м шаге в *одном* из рёбер $A \subset T_5$ закрашивается в белый цвет некоторая последовательность точек a_n, сходящаяся к d. Значит (при необходимости переходя к подпоследовательности в a_n и меняя направление оси x), мы можем считать, что одна из прямых $x = x(a_i)$ или $y = y(a_i)$ не содержит других точек из $E^k(T_5)$, кроме a_i. Поскольку окрестность $(U - A) \cup d \cong T_4$ связна, она лежит по одну сторону от всех этих прямых, т. е. в полуплоскости $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. При этом $E^n(T_4) = \varnothing$, т. е.

некоторый крест $T_4 \subset T_5$ *базисно вложен в* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *так, что* $d = (0, 0)$.

Теперь аналогично доказывается, что

некоторый триод $T_3 \subset T_4$ *базисно вложен в* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ *или в* $0 \times \mathbb{R}$ *так, что* $d = (0, 0)$.

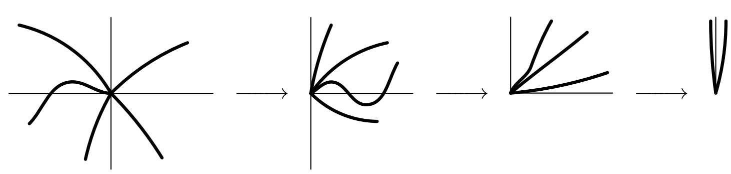


Рис. 7. Доказательство базисной невложимости пентода

Второй случай невозможен. Теперь аналогично доказывается, что

некоторый диод $T_2 \subset T_3$ *базисно вложен в луч* $\mathbb{R}_+ \times 0$ *так, что* $d = (0,0)$.

Получили противоречие. $\square$

Доказательство базисной невложимости креста с разветвлёнными концами. Предположим, что C базисно вложен в плоскость. Аналогично доказательству базисной невложимости пентода получаем, что *если крест* T_4 *базисно вложен в плоскость* $\mathbb{R}^2$, *то одна из его ветвей содержит прямолинейный отрезок с концом в вершине креста, параллельный одной из координатных осей.*

Теперь базисная невложимость графа C вытекает из следующей леммы. $\square$

Лемма о схлопывании. *Пусть* K *— конечный граф,* $K \subset_b \mathbb{R}^2$. *Определим отображение* $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *формулой*

$$q(x,y) = \begin{cases} (x,y), & x < a, \\ (a,y), & a \leqslant x \leqslant b, \\ (x-(b-a),y), & x > b. \end{cases}$$

Тогда

(a) $q|_{K-[a;b]\times c}$ *инъективно*;

(b) $q(K)$ *базисно вложено в плоскость* $\mathbb{R}^2$.

Доказательство. (a) Пусть, напротив, две точки из $K-[a;b]\times c$ склеиваются при схлопывании q. Тогда они лежат в полосе $[a;b]\times\mathbb{R}$ и имеют одинаковую ординату d. Тогда эти точки (x_1,d), (x_2,d) вместе с (x_1,c), (x_2,c) являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям. Это множество не базисно в $\mathbb{R}^2$. Противоречие.

(b) Достаточно доказать, что если $q(K)$ содержит молнию $A = \{a_1,\ldots,a_n\}$ длины n, то и K содержит молнию длины n. Если $q^{-1}(A)$ — молния в K, то нужное утверждение доказано. Иначе найдутся точки a_i, a_{i+1} — вершины вертикального звена — такие, что $p_x(a_i) = p_x(a_{i+1})$. Тогда добавим к $q^{-1}(A)$ точки $(x(q^{-1}(a_i)),c)$ и $(x(q^{-1}(a_{i+1})),c)$ (здесь полагаем $q^{-1}(a,c)=(a,c)$). Проделав такую операцию несколько раз, получим молнию в K длины больше n. $\square$

Базисная вложимость в произведение графов

Декартовым произведением $X \times Y$ двух множеств X и Y называется множество всех пар (a,b) таких, что $a \in X$ и $b \in Y$. Определение базисного вложения может быть очевидно обобщено на вложения в произвольное декартово произведение $X \times Y$. Если X и Y — графы, то мы можем представлять себе произведение $X \times Y$ как двумерный объект (в некоторых случаях можно считать, что этот объект расположен в трёхмерном пространстве). Обозначим через T_n звезду с n лучами. Например, для триода T_3 пространство $T_3 \times I$ является «книжкой с тремя страницами», $S^1 \times I$ — цилиндром и $S^1 \times S^1$ — тором. Произведение $T_n \times I$ назовём *книжкой с n страницами*.

Замечание. *Для любых конечных графов X и Y найдётся конечный граф, который нельзя базисно вложить в произведение $X \times Y$.*

Действительно, обозначим через k максимальную степень вершин графов X и Y. Докажем, что звезда T_{4k^2+1} не вложима базисно и *кусочно-линейно* в $X \times Y$. Предположим, противное. Малая окрестность центра v звезды в произведении $X \times Y$ состоит из не более чем k^2 прямоугольников $I \times J$, являющихся произведениями частей рёбер I и J графов X и Y. По принципу Дирихле среди $4k^2 + 1$ рёбер звезды найдётся по крайней мере пять, начала которых выходят в один прямоугольник. Поэтому существует подзвезда $T_5 \subset T_{4k^2+1}$, базисно вложенная в один из таких прямоугольников. Это противоречит критерию базисной вложимости графов. $\square$

Теорема универсальности ([7]). *Любой конечный граф базисно вложим в произведение $X \times I$ для некоторого букета X окружностей и отрезков.*

Число окружностей в букете можно взять равным $E - V + C$, где E, V, C — количества вершин, рёбер и компонент связности графа. В частности, любое дерево базисно вложимо в книжку с некоторым числом страниц.

Результаты этого пункта приводятся без доказательства.

Следующая гипотеза навеяна теоремой Робертсона – Симора о вложимости графов в поверхности [11].

Гипотеза. (a) *Существует лишь конечное число «запрещённых» подграфов для базисной вложимости конечного графа в данное произведение графов.*

(b) *Существует алгоритм проверки базисной вложимости конечного графа в данное произведение графов.*

Критерий базисной вложимости графов в книжку с n страницами ([13]). Дефектом *графа K называется сумма*

$$\delta(K) = (degA_1 - 2) + \cdots + (degA_k - 2),$$

где $A_1, \ldots, A_k$ — все вершины графа K, либо имеющие степень больше четырёх, либо степени 4, не имеющие висячих рёбер. Конечный граф K базисно вложим в $I \times T_n$ тогда и только тогда, когда он является деревом и

- *либо* $\delta(K) < n$,
- *либо* $\delta(K) = n$ *и* K *содержит вершину степени больше четырёх, имеющую висячее ребро.*

Из этого результата вытекает положительное решение гипотезы для произведения $I \times T_n$. В [7] доказаны также обобщения этого результата.

3. Базисность плоских множеств[6)]

Разрывная базисность

0. Представьте функцию $f\colon [(-1,-1),(1,1)] \cup [(0,0),(1,-1)] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$ в виде суммы $g(x) + h(y)$ двух функций, каждая из которых зависит только от одной координаты.

1. (a) Для любых ли четырёх чисел $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ существуют такие четыре числа g_1, g_2, h_1, h_2, что $f_{ij} = g_i + h_j$ при любых $i, j = 1, 2$?

(b) Андрей Николаевич и Владимир Игоревич играют в игру «А ну-ка, разложи!». На шахматной доске отмечено несколько клеток. А. Н. расставляет числа в отмеченных клетках, как хочет. В. И. смотрит на расставленные числа и берет 16 чисел $a_1, \ldots, a_8, b_1, \ldots, b_8$, т. е. «весов» столбцов и строк, как хочет. Если число в каждой отмеченной клетке оказалось равным сумме весов строки и столбца этой клетки, то выиграл В. И., а иначе (т. е. если число хотя бы в одной отмеченной клетке оказалось не равным сумме весов строки и столбца этой клетки) выиграл А. Н.

Докажите, что при правильной игре В. И. выигрывает тогда и только тогда, когда не существует замкнутого маршрута ладьи, начальная клетка и клетки поворота которого являются отмеченными (не обязательно все отмеченные клетки задействованы).

Определение молнии. Обозначим через $\mathbb{R}^2$ плоскость с фиксированной системой координат. Обозначим через $x(a)$ и $y(a)$ координаты точки $a \in \mathbb{R}^2$. Последовательность (конечная или бесконечная) точек плоскости $\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}^2$ называется *молнией*, если для каждого i выполнено $a_i \neq a_{i+1}$, и при этом $x(a_i) = x(a_{i+1})$ для чётных i и $y(a_i) = y(a_{i+1})$ для нечётных i. (Не обязательно все точки молнии различны.)

Конечная молния $\{a_1, \ldots, a_{2l+1}\}$ называется *замкнутой*, если $a_1 = a_{2l+1}$.

2. Рассмотрим замкнутую молнию $\{a_1, \ldots, a_n = a_1\}$. Назовём *разложением* расстановку чисел в проекциях точек этой молнии на ось Ox и в проекциях точек этой молнии на ось Oy. Можно ли так расставить в точках молнии числа $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{R}$ с $f_1 = f_n$, чтобы для любого разложения

[6)]Первый и остальные пункты этой части независимы друг от друга.

некоторое число f_i не было бы равно сумме двух чисел, стоящих в $x(a_i)$ и в $y(a_i)$?

Подмножество $K \subset \mathbb{R}^2$ плоскости называется *разрывно базисным*, если для любой функции $f\colon K \to \mathbb{R}$ существуют такие функции $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(x,y) = g(x) + h(y)$ для каждой точки $(x,y) \in K$.

3. (a) Отрезок $K = 0 \times [0;1] \subset \mathbb{R}^2$ является разрывно базисным.

(b) Крест $K = 0 \times [-1;1] \cup [-1;1] \times 0 \subset \mathbb{R}^2$ является разрывно базисным.

(c) *Критерий разрывной базисности.* Подмножество плоскости разрывно базисно тогда и только тогда, когда оно не содержит замкнутых молний.

4**. Андрей Николаевич и Владимир Игоревич играют в 3D-игру «А ну-ка, разложи!». В кубе $n \times n \times n$, разбитом на n^3 единичных кубиков, отмечено несколько кубиков. А. Н. расставляет числа в отмеченных кубиках, как хочет. В. И. смотрит на расставленные числа и берет $3n$ чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$ — «весов» колонок, продольных строк и поперечных строк (т. е. рядов, параллельных оси z, оси x и оси y) — как хочет. Если число в каждом отмеченном кубике (i,j,k) (поставленное А. Н.) оказалось равным сумме $a_i + b_j + c_k$ трёх весов колонки, продольной строки и поперечной строки этого кубика, то выиграл В. И., а иначе (т. е. если число хотя бы в одном отмеченном кубике оказалось не равным сумме трёх весов) выиграл А. Н.

Как по набору отмеченных кубиков узнать, кто выигрывает?

(Ясно, что *алгоритм* распознавания выигрышности данного набора отмеченных кубиков существует. Желательно найти простой критерий типа того, который имеется для плоского аналога этой игры. Интересны даже ответы для маленьких n.)

5**. (a) Определите разрывную базисность подмножеств трёхмерного пространства. Сформулируйте и докажите пространственный аналог приведённого критерия.

(b) То же для многомерного случая.

Решения задач

1. (a) Это неверно. Если $f_{ij} = g_i + h_j$ для $i,j = 1,2$, то $f_{11} + f_{22} = f_{12} + f_{21}$, но это соотношение не имеет места для некоторых наборов чисел f_{ij}.

(b) «Только тогда» следует из задачи 2. Докажем утверждение «тогда» индукцией по количеству отмеченных клеток. Если отмечена только одна клетка, утверждение задачи тривиально. Обозначим через K множество центров отмеченных клеток. Множество $E(K)$ определено в следующем пункте после задачи 9. По условию, K не содержит замкнутых молний, следовательно $\#E(K) < \#K$. Значит, по индуктивному предположению В. И. может выиграть на множестве $E(K)$. Все оставшиеся клетки являются единственными отмеченными в своей строке или в своем столбце. Следовательно, В. И. сможет выбрать и оставшиеся веса для K.

2. Да. Если каждое из чисел f_i представимо в виде суммы двух чисел, расположенных в точках $x(a_i)$ и $y(a_i)$, то $f_1 - f_2 + f_3 - \dots - f_{n-1} = 0$, но можно легко подобрать набор чисел f_i, для которого это неверно.

3. (a) Положим $h(y) = f(0, y)$ и $g(x) = 0$.

(b) Положим $g(x) = f(x, 0)$ и $h(y) = f(0, y) - f(0, 0)$.

(c) «Только тогда» следует из задачи 2. Докажем утверждение «тогда». Рассмотрим произвольную функцию $f\colon K \to \mathbb{R}$ и построим по ней функции g и h такие, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$. Назовём две точки $a, b \in K$ *эквивалентными*, если существует молния $\{a = a_1, \dots, a_n = b\} \subset K$. Возьмём один из классов эквивалентности $K_1 \subset K$ и определим функции $g\colon x(K_1) \to \mathbb{R}$ и $h\colon y(K_1) \to \mathbb{R}$ следующим образом. Зафиксируем произвольную точку $a_1 \in K_1$. Положим $g(x(a_1)) = f(a_1)$ и $h(y(a_1)) = 0$. Если $\{a_1, a_2, \dots, a_{2l}\}$ — молния из точек множества K, то положим

$$h(y(a_{2l})) := f(a_{2l}) - f(a_{2l-1}) + \dots - f(a_1) \text{ и}$$
$$g(x(a_{2l})) := f(a_{2l-1}) - f(a_{2l-2}) + \dots + f(a_1).$$

Если $\{a_1, a_2, \dots, a_{2l+1}\}$ — молния из точек множества K, то положим

$$g(x(a_{2l+1})) = f(a_{2l+1}) - f(a_{2l}) + \dots + f(a_1)$$

(значение $h(y(a_{2l+1}))$ уже определено). Сделаем это построение для всех классов эквивалентности одновременно. Для всех же прочих точек положим $g(x) = 0$ и $h(y) = 0$.

Непрерывная базисность

Подмножество $K \subset \mathbb{R}^2$ называется (*непрерывно*) *базисным*, если для любой непрерывной функции $f\colon K \to \mathbb{R}$ существуют такие непрерывные функции $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для каждой точки $(x, y) \in K$. (Определение непрерывной функции напомнено в начале части 1.) Слово «непрерывно» далее опускается.

Проблема Арнольда. *Какие подмножества плоскости являются базисными*?

Чтобы подойти к ответу, рассмотрим несколько примеров.

6. (a) Замкнутая молния не базисна.

(b) Отрезок $K = 0 \times [0; 1] \subset \mathbb{R}^2$ является базисным.

(c) Крест $K = 0 \times [-1; 1] \cup [-1; 1] \times 0 \subset \mathbb{R}^2$ является базисным.

7. (a) Если подмножество плоскости базисно, то оно разрывно базисно. (Определение и критерий разрывной базисности см. в предыдущем пункте.)

(b) *Пополненной молнией* называется объединение точки $a_0 \in \mathbb{R}^2$ с бесконечной молнией $\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}^2$ из различных точек, *сходящейся* к точке a_0 (т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное N, что для любого $i > N$ выполнено $|a_i, a_0| < \varepsilon$). Докажите, что никакая пополненная молния не является базисной. (Заметим, что она является разрывно базисной).

(c) Через $[a, b]$ обозначим отрезок, соединяющий точки a и b. Докажите, что крест $[(-1,-2),(1,2)] \cup [(-1,1),(1,-1)]$ не является базисным.

(d) Пусть $m_{i,j} = 2 - 3 \cdot 2^{-i} + j \cdot 2^{-2i}$. Рассмотрим множество, состоящее из точек $(m_{i,2l}, m_{i,2l})$ и точек $(m_{i,2l}, m_{i,2l-2})$, где $i = 1, 2, \ldots$ и $l = 1, 2, 3, \ldots, 2^{i-1}$. Докажите, что это подмножество плоскости не содержит бесконечной молнии, но содержит сколь угодно длинные молнии.

(e) Объединение множества из предыдущего пункта с точкой $(2, 2)$ не базисно.

Последовательность точек a_i плоскости называется *сходящейся к точке* a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое целое N, что для любого $i > N$ выполнено $|a, a_i| < \varepsilon$.

Подмножество $K \subset \mathbb{R}^2$ плоскости называется *замкнутым*, если для любой бесконечной последовательности точек $a_i \in K$, сходящейся к точке a, выполнено $a \in K$.

8. Подмножество $K \subset \mathbb{R}^2$ плоскости является замкнутым тогда и только тогда, когда для любой точки $a \notin K$ найдётся такое $\varepsilon > 0$, что любая точка плоскости с расстоянием менее ε до a не принадлежит K.

Критерий базисности. *Замкнутое ограниченное подмножество плоскости базисно тогда и только тогда, когда оно не содержит сколь угодно длинных молний* [18].

Приведём здесь замечания и переформулировку (используемую в доказательстве). Само доказательство приводится в следующем пункте.

9. (a) Условие замкнутости в критерии действительно необходимо (т. е. если в формулировке теоремы опустить это условие, то получится неверное утверждение).

(b) Условие ограниченности в критерии действительно необходимо (т. е. если в формулировке теоремы опустить это условие, то получится неверное утверждение).

(c)** Найдите критерий базисности для замкнутых (но неограниченных) подмножеств плоскости.

Пусть K — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$. Для каждой точки $v \in K$ нарисуем две прямые, проходящие через v параллельно координатным осям. Если хотя бы одна из этих двух прямых пересекает K только в точке v, то покрасим v в белый цвет. Обозначим через $E(K)$ множество всех точек K, не являющихся белыми:

$$E(K) = \{v \in K : |K \cap (x = x(v))| \geqslant 2 \text{ и } |K \cap (y = y(v))| \geqslant 2\}.$$

Например, рис. 6b получается из рис. 6a операцией E. Пусть $E^2(K) = E(E(K))$, $E^3(K) = E(E(E(K)))$ и т. д.

10. Подмножество $K \subset \mathbb{R}^2$ не содержит сколь угодно длинных молний тогда и только тогда, когда $E^n(K) = \varnothing$ для некоторого n.

11. Базисность подмножеств трёхмерного пространства определена выше перед леммой Арнольда о деревьях.

(a) Докажите, что ёж $0 \times 0 \times [-1;1] \cup 0 \times [-1;1] \times 0 \cup [-1;1] \times 0 \times 0 \subset \mathbb{R}^3$ является базисным.

(b) Подмножество пространства $\mathbb{R}^3$, состоящее из четырёх точек $(0,0,0)$; $(1,1,0)$; $(0,1,1)$; $(1,0,1)$, базисно. (Но $E^n(K) \neq \varnothing$ для любого n, см. ниже.)

(c) Для $K \subset \mathbb{R}^3$ аналогично определим $E(K)$, используя вместо прямых плоскости, перпендикулярные осям координат:

$$E(K) := \{v \in K : |K \cap (x = x(v))| \geqslant 2,\ |K \cap (y = y(v)) \geqslant 2| \text{ и } |K \cap (z = z(v))| \geqslant 2\}.$$

Докажите, что если K замкнуто, ограничено и $E^n(K) = \varnothing$ для некоторого n, то K базисно [18, Lemma 23.ii].

(d) Никакое подмножество пространства $\mathbb{R}^3$ (или даже $\mathbb{R}^4$), гомеоморфное двумерному диску, не является базисным. Указание: определение многомерной молнии см. в [18, 6.12, p. 39].

Решения задач

6. (a) Если бы молния $A = \{a_1, \ldots, a_{2l+1} = a_1\}$ была базисной, то $f(a_1) - f(a_2) + \cdots + f(a_{2l-1}) - f(a_{2l}) = 0$, но легко подобрать функцию f, для которой это не выполнено. Сравните с задачей 2.

(b),(c) Аналогично задачам 3a, 3b.

7. (a) Если множество не является разрывно базисным, то по критерию разрывной базисности из предыдущего пункта оно содержит замкнутую молнию. Тогда утверждение задачи следует из 6a, так как функция f может быть продолжена с замкнутой молнии на всё множество.

(b) Рассмотрим функцию f, для которой $f(a_i) = \dfrac{(-1)^i}{i}$. Предположим, что $f(x,y) = g(x) + h(y)$ для некоторых непрерывных g и h, тогда

$$f(a_1) - f(a_2) + f(a_3) - f(a_4) + \cdots - f(a_{2l}) = h(y(a_1)) - h(y(a_{2l})).$$

Так как $\lim_{l\to\infty} h(y_{2l})$ существует и равен $h(y(a_0))$, то ряд $\sum_{i=1}^{2l}(-1)^i f(a_i)$ сходится при $l \to \infty$. Но это противоречит расходимости гармонического ряда.

(c) Крест содержит замкнутую молнию

$$a_{4k+1} = \left(\frac{-1}{4^k}, \frac{1}{4^k}\right), \qquad a_{4k+2} = \left(\frac{1}{2\cdot 4^k}, \frac{1}{4^k}\right),$$
$$a_{4k+3} = \left(\frac{1}{2\cdot 4^k}, \frac{-1}{2\cdot 4^k}\right), \quad a_{4k+4} = \left(\frac{-1}{4^{k+1}}, \frac{-1}{2\cdot 4^k}\right).$$

Определим функцию f на этой молнии, используя задачу 7(b), и продолжим её кусочно-линейно на весь крест. Не существует таких функций g и f, что $f(x,y) = g(x) + h(y)$.

(d) Для любого i точки $(m_{i,2l}, m_{i,2l})_{l=1}^{2^{i-1}}$ и $(m_{i,2l}, m_{i,2l-2})_{l=1}^{2^{i-1}}$ образуют молнию из 2^i элементов.

(e) Определим функцию $f(x,y)$ соотношениями

$$f((m_{i,2l}, m_{i,2l})) := \frac{1}{2^i} \quad \text{и} \quad f((m_{i,2l}, m_{i,2l-2})) := -\frac{1}{2^i}\,.$$

Предположим, что $f(x,y) = g(x)+h(y)$ для некоторых непрерывных $g(x)$ и $h(y)$. Теперь для каждого i, используя молнии $(m_{i,2l}, m_{i,2l})$ и $(m_{i,2l}, m_{i,2l-2})$, где $l = 1, 2, 3, \ldots 2^{i-1}$, получаем $h(2-\frac{3}{2^i}) - h(2-\frac{2}{2^i}) = 1$. Это противоречит непрерывности h в точке $y = 2$.

8. Докажем утверждение «только тогда». Пусть K — замкнутое подмножество плоскости. Предположим, что для некоторой точки $a = (x,y) \notin K$ и для произвольного $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$ существует хотя бы одна точка $a_n \in K$, для которой $|a, a_n| \leqslant \frac{1}{n}$. Но тогда последовательность точек $a_n \in K$ сходится к точке a, поэтому $a \in K$. Противоречие.

Теперь докажем утверждение «тогда». Пусть некоторая последовательность a_n сходится к точке a, не лежащей в множестве K. По условию существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой точки $a_n \in K$ расстояние $|a, a_n| > \varepsilon$. Но это противоречит сходимости последовательности.

9. (a) Любая бесконечная молния A, не содержащая замкнутых молний и сходящаяся к точке $a \notin A$, является базисной. Это следует из того, что любая функция, определённая на A, непрерывна.

(b) Контрпримером является множество $\{(k,k)\}_{k=1}^{\infty} \cup \{(k,k-1)\}_{k=1}^{\infty}$ точек плоскости.

10. Докажем часть «только тогда». Предположим, что $E^n(K) \neq \varnothing$ для всех n. Для каждого n рассмотрим точку $a_0 \in E^n(K)$. Выберем точки $a_{-1}, a_1 \in E^{n-1}(K)$ такие, что $x(a_{-1}) = x(a_0)$ и $y(a_1) = y(a_0)$. Теперь можно выбрать точки $a_{-2}, a_2 \in E^{n-2}(K)$, для которых $\{a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2\}$ — молния. Аналогично можно сконструировать молнию из $2n+1$ точек, лежащую целиком в множестве K. Что и требовалось доказать.

Докажем часть «тогда». Пусть множество K содержит молнию из $2n+1$ точки $\{a_{-n}, \ldots, a_0, \ldots, a_n\}$. Тогда в множестве $E(K)$ содержится молния из $2n-1$

точки $\{a_{-n+1}, \dots, a_{n-1}\}$. Продолжая, получим, что $a_0 \in E^n(K)$. Следовательно, если $E^n(K) = \varnothing$, то K не содержит молнии из $2n+1$ точек.

11. (a) Для произвольной функции $f\colon K \to \mathbb{R}$ на еже K определим $g(x) := f(x,0,0)$, $h(y) := f(0,y,0) - f(0,0,0)$ и $l(z) := f(0,0,z) - f(0,0,0)$.

(b) Положим $g(0) = f(0,0,0)$, $h(0) = 0$, $l(0) = 0$,

$$2g(1) = f(0,0,0) + f(1,1,0) + f(1,0,1) - f(0,1,1),$$
$$2h(1) = -f(0,0,0) + f(1,1,0) - f(1,0,1) + f(0,1,1)) \text{ и}$$
$$2l(1) = -f(0,0,0) - f(1,1,0) + f(1,0,1) + f(0,1,1).$$

Доказательство критерия базисности

Пусть K — произвольное замкнутое ограниченное подмножество плоскости. Известно, что тогда любая непрерывная функция $f\colon K \to \mathbb{R}$ ограничена. Функция $f\colon K \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной*, если найдётся число M такое, что $|f(x)| < M$ для любой точки $x \in K$. Для ограниченной функции $G\colon K \to \mathbb{R}$ положим

$$|G| := \sup_{x \in K} |G(x)|.$$

Начало доказательства части «только тогда» критерия базисности. Предположим, напротив, что K содержит сколь угодно длинные молнии и базисно. Выбирая подпоследовательности, можно добиться того, чтобы в каждой молнии точки попарно различны. Поэтому будем считать, что это выполнено. Тогда для любого $n \geqslant 4$ существует молния $\{a_1^n, \dots, a_{2n+5}^n\}$ из $2n+5$ различных точек множества K.

Существует непрерывная функция $f_n\colon K \to \mathbb{R}$ такая, что

$$f_n(a_i^n) = (-1)^i \quad \text{и} \quad |f_n(x)| \leqslant 1 \text{ для любого } x \in K.$$

(Действительно, построим сначала непрерывную функцию $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую этим условиям. Обозначим $s = \min_{i<j} |a_i, a_j|$. Рассмотрим n дисков с центрами в точках a_i и радиусами $\dfrac{s}{3}$. Вне этих дисков положим $f = 0$. Внутри i-го диска сделаем f линейной функцией от радиуса, равной $(-1)^i$ в центре a_i и нулю на границе. Теперь ограничим построенную функцию на $K \subset \mathbb{R}^2$ и получим требуемую непрерывную функцию $K \to \mathbb{R}$.)

Определим по индукции последовательность чисел s_n и функций $F_n\colon K \to \mathbb{R}$. Положим $s_0 = 1$ и $F_0 = 0$. Предположим, что s_{n-1} и F_{n-1} уже определены. Возьмём функции $G_{n-1}, H_{n-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых $F_{n-1}(x,y) = G_{n-1}(x) + H_{n-1}(y)$ (если таких функций нет, то все доказано). Берём

$$s_n > s_{n-1}! \cdot (|G_{n-1}| + n) \quad \text{и} \quad F_n = F_{n-1} + \frac{f_{s_n}}{s_{n-1}!}\,.$$

Достаточно доказать, что функция

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{s_n}}{s_{n-1}!} = \lim_{n\to\infty} F_n$$

не представима в виде $G(x) + H(y)$.

Предположим, что, напротив $F(x,y) = G(x) + H(y)$ для некоторых G и H. Для получения противоречия достаточно доказать, что $|G| > n$ для каждого n. А для этого достаточно показать, что $s_{n-1}!|G - G_{n-1}| > s_n$: тогда будет

$$|G| + |G_{n-1}| \geqslant |G - G_{n-1}| > \frac{s_n}{s_{n-1}!} > |G_{n-1}| + n.$$

Лемма. *Пусть* $m \geqslant 4$,

- $K = \{a_1, \ldots, a_{2m+5}\}$ — *молния из* $2m+5$ *различных точек на плоскости,*
- $f(a_1), \ldots, f(a_{2m+5})$ — *числа, для которых* $|(-1)^i - f(a_i)| < 1/m$ *и*
- $g(x(a_i)), h(y(a_i))$, $i = 1, \ldots, 2m+5$, — *такие числа, что* $f(a_i) = g(x(a_i)) + h(y(a_i))$ *для любого* i *(при этом если* $x(a_i) = x(a_j)$, *то* $g(x(a_i)) = g(x(a_j))$, *и аналогично для* y *и* h*).*

Тогда $\max_i |g(x(a_i))| > m$.

Доказательство. Можно считать, что прямая a_1a_2 параллельна оси Ox (если это не так, то увеличим все индексы на 1 в последующих формулах). Имеем

$$|(f(a_1) - f(a_2) + f(a_3) - f(a_4) + \cdots - f(a_{2m+4}) - (2m+4)| \leqslant \frac{2m+4}{m} \leqslant 3.$$

Это означает, что $|g(x(a_1)) - g(x(a_{2m+4}))| \geqslant (2m+4) - 3 > 2m$. Отсюда следует требуемое неравенство. □

Окончание доказательства части «только тогда» критерия непрерывной базисности. Имеем:

$$F - F_n = F - F_{n-1} - \frac{f_{s_n}}{s_{n-1}!} = \frac{s_{n-1}!(F - F_{n-1}) - f_{s_n}}{s_{n-1}!}.$$

Применим лемму к

$$m = s_n, \quad a_i = a_i^{s_n}, \quad f = s_{n-1}!(F - F_{n-1}),$$
$$g = s_{n-1}!(G - G_{n-1}), \quad h = s_{n-1}!(H - H_{n-1}).$$

Это возможно, так как $f(x,y)=g(x)+h(y)$ и (так как $s_n-1>s_{n-1}$ при $n>2$)

$$|f-f_{s_n}|=s_{n-1}!|F-F_n|<\frac{1}{(s_n-1)\cdot s_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(s_n+1)\cdot\ldots\cdot s_{n+k}}<$$

$$<\frac{1}{(s_n-1)\cdot s_n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\frac{1}{s_n}.$$

По лемме получим $s_{n-1}!|G-G_{n-1}|>s_n$. □

12. (a)* Докажите элементарно (т. е. без использования описания пространства $C^*(K)$ в терминах мер, см. ниже), что если $K\subset\mathbb{R}^2$ замкнуто и ограничено, причём $E(K)=\varnothing$, то K базисно [14].

Указание. Получите сначала разложение $f(x,y)=g(x)+h(y)$ для *кусочно-линейных* функций f, причём $|g|+|h|<5|f|$.

(b)** Докажите элементарно часть «тогда» критерия базисности.

Указание. То же, $|g|+|h|<C_n|f|$, где C_n зависит только от того n, для которого $E^n(K)=\varnothing$.

Напомним, что двумя звёздочками обозначаются нерешённые задачи.

Доказательство критерия базисности [18, §2, Лемма 23.ii]. [7] Оно основано на переформулировке свойства базисности в терминах *ограниченных линейных операторов* в *банаховых пространствах функций*. Обозначим через $C(X)$ пространство непрерывных функций на X с нормой $|f|=\sup\{|f(x)|:x\in X\}$. В этом доказательстве обозначим через $pr_x(a)$ и $pr_y(a)$ проекции точки $a\in K$ на оси координат.

Для подмножества $K\subset I^2$ определим отображение (*линейный оператор суперпозиции*) $\varphi\colon C(I)\oplus C(I)\to C(K)$ формулой

$$\varphi(g,h)(x,y)=g(x)+h(y).$$

Норма на пространстве $C(I)\oplus C(I)$ вводится естественным способом. Ясно, что подмножество $K\subset I^2$ базисно тогда и только тогда, когда φ эпиморфно.

Обозначим через $C^*(X)$ пространство ограниченных линейных функций $C(X)\to\mathbb{R}$ с нормой $|\mu|=\sup\{|\mu(f)|:f\in C(X),\ |f|=1\}$. Для подмножества $K\subset I^2$ определим отображение (*двойственный линейный оператор суперпозиции*) $\varphi^*\colon C^*(K)\to C^*(I)\oplus C^*(I)$ как

$$\varphi^*\mu(g,h)=(\mu(g\circ pr_x),\mu(h\circ pr_y)).$$

[7] Это доказательство неэлементарно, формально не используется в дальнейшем и может быть опущено читателем. Однако мы приводим его, поскольку наше изложение короче и яснее данного в [18].

Норма на пространстве $C^*(I) \oplus C^*(I)$ вводится естественным способом. Так как $|\varphi^*\mu| \leqslant 2|\mu|$, то φ^* ограничен. По двойственности, φ эпиморфен тогда и только тогда, когда φ^* мономорфен. [8)]

Понятно, что φ^* мономорфен тогда и только тогда, когда

существует $\varepsilon > 0$ такое, что $|\varphi^*\mu| > \varepsilon|\mu|$ для каждого ненулевого $\mu \in C^*(K)$. $(*)$

Чтобы работать с условием $(*)$, используем следующий нетривиальный факт: $C^*(K)$ *совпадает с пространством σ-аддитивных регулярных вещественнозначных борелевских мер на K* (далее мы будем называть их просто «мерами»; используется также термин «заряды»). Имеем

$$\varphi^*\mu = (\mu_x, \mu_y), \quad \text{где } \mu_x(U) = \mu(pr_x^{-1}U) \text{ и } \mu_y(U) = \mu(pr_y^{-1}U).$$

Если $\mu = \mu^+ - \mu^-$ есть разложение меры μ на положительные и отрицательные части, то $|\mu| = \bar{\mu}(X)$, где $\bar{\mu} = \mu^+ + \mu^-$ есть абсолютное значение меры μ.

Доказательство того, что условие $(*)$ влечёт отсутствие сколь угодно длинных молний, оставляем в качестве упражнения. (Это доказывает часть «только тогда», для которой у нас уже есть элементарное доказательство.)

Остаётся доказать, что условие $(*)$ следует из $E^n(K) = \varnothing$. (Это доказывает часть «тогда».) Приведём доказательство для $n \in \{1, 2\}$ (для произвольного n оно аналогично).

Обозначим через D_x (и D_y) множество тех точек из K, которые не затеняются никакой другой точкой из K в x- (и y-) направлении. Возьмём любую меру μ на K с нормой 1.

Если $n = 1$, то

$$E(K) = \varnothing, \text{ поэтому } D_x \cup D_y = K, \text{ значит, } 1 = \bar{\mu}(K) \leqslant \bar{\mu}(D_x) + \bar{\mu}(D_y).$$

Тогда, не уменьшая общности, $\bar{\mu}(D_x) \geqslant 1/2$. Так как pr_x инъективна на D_x, то $|\mu_x| \geqslant 1/2$. Поэтому условие $(*)$ выполнено для $\varepsilon = 1/2$.

Если $n = 2$, то

$$E(E(K)) = \varnothing, \text{ поэтому } D_x \cup D_y = K - E(K) \text{ и } E(D_x \cup D_y) = \varnothing.$$

[8)] При этом φ^* может быть инъективным, но не мономорфным. Другими словами, не только линейные соотношения на $\operatorname{im}\varphi$ заставляют его быть строго меньше чем $C(K)$, как показывает пример небазисной пополненной молнии.
Заметим, что если $K \subset \mathbb{R}^2$ — базисное подмножество, то мы можем доказать без использования φ, что φ^* мономорфно. Определим линейный оператор $\Psi\colon C^*(I) \oplus C^*(I) \to C^*(K)$ формулой $\Psi(\mu_x, \mu_y)(f) = \mu_x(g) + \mu_y(h)$, где $g, h \in C(I)$ таковы, что $g(0) = 0$ и $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для $(x, y) \in K$. Ясно, что $\Psi\varphi^* = \mathrm{id}$ и Ψ ограничено, следовательно φ^* мономорфно.

При $\bar{\mu}(E(K)) < 3/4$ имеем $\bar{\mu}(D_x \cup D_y) > 1/4$ и, не уменьшая общности, $\bar{\mu}(D_x) > 1/8$, значит, как и в случае $n = 1$, имеем $|\mu_x| > 1/8$. Поэтому условие $(*)$ выполнено для $\varepsilon = 1/8$.

При $\bar{\mu}(E(K)) \geqslant 3/4$ имеем $\bar{\mu}(K - E(K)) \leqslant 1/4$. Как и в случае $n = 1$, не уменьшая общности, $\bar{\mu}_x(pr_x(E(K))) \geqslant \bar{\mu}(E(K))/2$. Следовательно $|\mu_x| \geqslant \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Поэтому условие $(*)$ выполнено для $\varepsilon = \frac{1}{8}$. □

Гладкая базисность

Пусть K — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$. Функция $f\colon K \to \mathbb{R}$ называется *дифференцируемой* (по Уитни), если для любой точки $z_0 \in K$ существуют такие вектор $a \in \mathbb{R}^2$ и бесконечно малая функция $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, что для любой точки $z \in K$ выполнено

$$f(z) = f(z_0) + a \cdot (z - z_0) + \alpha(z - z_0)|z, z_0|.$$

Здесь точка означает знак скалярного произведения векторов $a = =: (f_x, f_y)$ и $z - z_0 =: (x, y)$, т. е. $a \cdot (z - z_0) = xf_x + yf_y$. Функция $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно малой*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{если } \sqrt{x^2 + y^2} < \delta, \text{ то } |\alpha(x, y)| < \varepsilon.$$

Подмножество $K \subset \mathbb{R}^2$ плоскости называется *дифференцируемо базисным*, если для любой дифференцируемой функции $f\colon K \to \mathbb{R}$ существуют такие дифференцируемые функции $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для любой точки $(x, y) \in K$ выполняется $f(x, y) = g(x) + h(y)$.

13. (a) (b) (c) Решите аналоги задачи 6 для дифференцируемой базисности.

14. (a) График функции $|x|$ на отрезке $[-1; 1]$ является дифференцируемо базисным.

(b) Ломаная с последовательными вершинами $(-2, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ и $(2, 0)$ не является дифференцируемо базисной. (Заметим, что она базисна.)

(c) Пополненная молния $\left\{([\frac{n+1}{2}]^{-1/2}, [\frac{n}{2}]^{-1/2})\right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{(0, 0)\}$ не является дифференцируемо базисной. (Заметим, что она не является также базисной.)

(d) Пополненная молния $\left\{(2^{-[\frac{n+1}{2}]}, 2^{-[\frac{n}{2}]})\right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{(0, 0)\}$ является дифференцируемо базисной. (Заметим, что она не является базисной.)

(e)** Гипотеза И. Шнурникова. Пополненная молния $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{(0,0)\}$ дифференцируемо базисна тогда и только тогда, когда последовательность $\dfrac{\sum\limits_{n=k}^{\infty}|a_n|}{|a_k|}$ ограничена.

15. (a) Крест $K = [(-1,-2),(1,2)] \cup [(-1,1),(1,-1)]$ не является дифференцируемо базисным.

(b)** Гипотеза. Подмножество $\left\{(t^2, \dfrac{t^2}{(1+t)^2})\right\}_{t\in[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}]}$ плоскости не является дифференцируемо базисным. Указание: можно пытаться делать аналогично задаче 15(a).

(c)** Гипотеза. Кусочно-линейный граф на плоскости является дифференцируемо базисным тогда и только тогда, когда он не содержит сколь угодно длинных молний, и для любых двух *сингулярных* точек a и b выполнено $x(a) \neq x(b)$ и $y(a) \neq y(b)$. Точка $a \in K$ называется *сингулярной*, если пересечение K с любым диском с центром в a не является прямолинейным отрезком.

(d)** Найдите критерий дифференцируемой базисности для графов в плоскости.

16. Пусть K — подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$ и $r \geqslant 0$. Функция $f\colon K \to \mathbb{R}$ называется *r раз дифференцируемой*, если для любой точки $z_0 \in K$ существуют такие многочлен $\overline{f}(z) = \overline{f}(x,y)$ степени не выше r от двух переменных x и y и бесконечно малая функция $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, что $f(z) = \overline{f}(z-z_0) + \alpha(z-z_0)|z,z_0|^r$ для любой точки $z \in K$. (Это определение отличается от общепринятого.)

(a) Ноль раз дифференцируемые функции — это в точности непрерывные, а один раз дифференцируемые — это в точности дифференцируемые.

(b) Для любого целого положительного r определите r-дифференцируемую базисность подмножеств плоскости.

(c)* Для любого целого $k \geqslant 0$ найдётся подмножество плоскости, r-дифференцируемо базисное для любого $r = 0, 1, \ldots k$, но не r-дифференцируемо базисное ни для какого $r > k$ [16].

(d)** Найдите критерий r-дифференцируемой базисности для графов в плоскости.

Решения задач

13. (a), (b), (c) Аналогично задачам 6(a), 3(a) и 3(b).

14. (a) Пусть $f(x,y)$ — дифференцируемая функция. Тогда $f(x,|x|) - f(0,0) = ax + b|x| + \alpha(x,|x|)|(x,|x|)|$. Положим $h(y) = by$, $g(x) = f(x,|x|) - b|x|$. Подробнее см. [16].

(b) Предположим, что данная ломаная дифференцируемо базисна. Функция $f(x,y)=xy$ дифференцируема. Поэтому $f(x,y)=g(x)+h(y)$ для некоторых дифференцируемых функций g и h. Тогда

$$2-2d=f(1+d,1-d)+f(1-d,1-d)=$$
$$=g(1+d)+g(1-d)+2h(1-d)=2g(1)+2h(1)-2h'(1)d+o(d).$$

Значит, $h'(1)=1$. Аналогично

$$2d-2=f(-1+d,1-d)+f(-1-d,1-d)=$$
$$=g(-1+d)+g(-1-d)+2h(1-d)=2g(-1)+2h(1)-2h'(1)d+o(d).$$

Значит, $h'(1)=-1$. Противоречие.

(c) Предположим, что эта пополненная молния дифференцируемо базисна. Положим $a_n=([\frac{n+1}{2}]^{-1/2},[\frac{n}{2}]^{-1/2})$, $f(a_n):=\dfrac{(-1)^n}{n}$, $n=2,3,\ldots$. Если $f(x,y)=g(x)+h(y)$ для некоторых функций $g(x)$ и $h(y)$, тогда $f(a_2)-f(a_3)+f(a_4)-\ldots$ сходится к $g(1)-g(0)$ (аналогично задаче 7b). Но это противоречит расходимости ряда $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$.

(d) Не ограничивая общности можно считать, что $f(0,0)=0$, тогда возьмём $g(0)=0$ и $h(0)=0$. Положим

$$h(2^{-k})=f(2^{-(k+1)},2^{-k})-f(2^{-(k+1)},2^{-(k+1)})+f(2^{-(k+2)},2^{-(k+1)})-\ldots,$$
$$g(2^{-k})=f(2^{-k},2^{-k})-f(2^{-(k+1)},2^{-k})+f(2^{-(k+1)},2^{-(k+1)})-\ldots,$$

где правые части суть суммы знакопеременных рядов.

Теперь $g(x)$ и $h(y)$ могут быть продолжены до дифференцируемых функций $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

15. (a) Определим

$$w(0)=0,\quad w(4^{-i}+4^{-3i})=w(4^{-i})=0 \ \text{ и } \ w(4^{-i}+4^{-3i-1})=2^{3i} \text{ для } i=1,2,3,\ldots .$$

Продолжим теперь эту функцию кусочно-линейно до функции $w\colon[0;1]\to\mathbb{R}$. Для каждого $x\in[0;1]$ определим $f(x,-x)$ как площадь под графиком функции w на отрезке $[0;x]$. На остальном кресте положим $f(x,y)=0$.

Предположим, что $f(x,y)=g(x)+h(y)$ для некоторых дифференцируемых g и h. Не ограничивая общности, будем считать, что $g(0)=h(0)=0$. Для $x\in[0;1]$ определим $W(x)$ как площадь под графиком функции w на отрезке $[0;x]$. Определим $f(x,-x)=W(x)$ для $x\in[0;1]$ и $f(x,y)=0$ на остальных точках креста.

Ясно, что f дифференцируема вне $(0,0)$. Можно проверить, что f дифференцируема и в $(0,0)$.

Предположим, что $f(x,y)=g(x)+h(y)$ для некоторых дифференцируемых g и h. Не ограничивая общности, будем считать, что $g(0)=h(0)=0$. Функция g не дифференцируема в точке $x=1/4$, поскольку для $0<d<\frac{1}{4}$ выполнено

$$g\left(\frac{1}{4}+d\right)-g\left(\frac{1}{4}\right)=W\left(\frac{1}{4}+d\right)-W\left(\frac{1}{4}\right)+W\left(\frac{1}{4^2}+\frac{d}{4}\right)-W\left(\frac{1}{4^2}\right)+\dots>$$
$$>W\left(\frac{1}{4^{k+1}}+\frac{d}{4^k}\right)-W\left(\frac{1}{4^{k+1}}\right)=\frac{2^{3k}\cdot 4^{-3k}}{2}\geqslant\frac{(4d)^{3/4}}{2}.$$

Здесь

- первое равенство доказывается с использованием двух бесконечных молний из точек креста, начинающихся в точках $(\frac{1}{4}+d,-\frac{1}{4}-d)$ и $(\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$ и сходящихся к точке $(0,0)$;
- $k\geqslant 0$ таково, что $4^{-2k}\geqslant 4d>4^{-2(k+1)}$;
- первое неравенство выполнено, поскольку W невозрастающая функция;
- второе неравенство выполнено, поскольку $\dfrac{d}{4^k}>\dfrac{1}{4^{3(k+1)}}$;
- второе равенство выполнено по определению числа k.

(Аналогично доказывается, что g не дифференцируема ни в какой точке вида $x=4^{-i}$.)

Список литературы

[1] В. И. Арнольд. *О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных* // Математическое просвещение. Сер. 2, вып. 3, 1958. С. 41–61.

Эл. версия: `http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/mp2/mp2-3.djvu?djvuopts&page=43`

[2] В. И. Арнольд. *Проблема* 6 // Математическое просвещение. Сер. 2, вып. 3, 1958. С. 273–274.

Эл. версия: `http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/mp2/mp2-3.djvu?djvuopts&page=243`

[3] А. Г. Витушкин. *13-я проблема Гильберта и смежные вопросы* // УМН, т. 59, вып. 1(355), 2004. С. 11–24.

[4] С. М. Воронин. *Аналитическая классификация ростков конформных отображений* $(\mathbb{C},0)\to(\mathbb{C},0)$ *с тождественной линейной частью* // Функц. анализ и его прил. Т. 15, вып. 1, 1981. С. 1–17

[5] С. М. Воронин. *Аналитическая классификация пар инволюций и ее приложения* // Функц. анализ и его прил. Т. 16, вып. 2, 1982. С. 21–29.

[6] К. Куратовский. *Топология*. Тт. 1–2. Мир, Москва, 1969.

[7] В. А. Курлин. *Базисные вложения графов и метод трехстраничных вложений Дынникова* // УМН, т. 58, вып. 2(350), 2003. С. 163–164.

[8] В. А. Курлин. *Базисные вложения графов и метод трехстраничных вложений Дынникова*. Диссертация, 2003.
Эл. версия `http://maths.dur.ac.uk/~dma0vk/PhD.html`

[9] В. В. Прасолов. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*. М.: МЦНМО, 2004.
Эл. версия `http://www.mccme.ru/prasolov`

[10] Д. Реповш, А. Скопенков. *Новые результаты о вложениях полиэдров и многообразий в евклидовы пространства* // УМН, т. 54, вып. 6(330), 1999. С. 61–108.

[11] А. Скопенков. *Вокруг критерия Куратовского планарности графов* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 9, 2005, с. 116–128 и вып. 10, 2006, с. 276–277.
Эл. версия `http://www.mccme.ru/free-booksmatprosa.html/`
`http://arxiv.org/abs/0802.3820`

[12] А. Б. Скопенков. *Алгебраическая топология с элементарной точки зрения* М.: МЦНМО, в печати.
Эл. версия `http://arxiv.org/abs/0808.1395`

[13] V. Kurlin. *Basic embeddings into products of graphs* // Topol. Appl. Vol. 102, 2000. P. 113–137.

[14] E. Miliczka. *Constructive decomposition of a function of two variables as a sum of functions of one variable* // Proc. AMS. Vol. 137, no 2, 2009. P. 607–614.

[15] N. Mramor-Kosta, E. Trenklerova [Miliczka]. *On basic embeddings of compacta into the plane* // Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 68, 2003. P. 471–480.

[16] D. Repovš, M. Željko. *On basic embeddings into the plane* // Rocky Mountain J. Math. Vol. 36, no 5, 2006. P. 1665–1677.

[17] A. Skopenkov. *A description of continua basically embeddable in* $\mathbb{R}^2$ // Topol. Appl. Vol. 65, 1995. P. 29–48.

[18] Y. Sternfeld. *Hilbert's 13th problem and dimension* // Lect. Notes Math. Vol. 1376, 1989. P. 1–49.

А. Б. Скопенков: механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Независимый московский университет, Московский институт открытого образования
Инфо: `http://dfgm.math.msu.su/people/skopenkov/papersc.ps`
e-mail: `skopenko@mccme.ru`