Гиперболические треугольники максимальной площади с двумя заданными сторонами

Е. И. Алексеева

На плоскости Лобачевского рассматривается аналог очень простой задачи евклидовой геометрии: каким будет треугольник максимальной площади с двумя заданными сторонами и какой будет эта площадь.

1. Введение

Каким будет треугольник максимальной площади с двумя заданными сторонами, и какой будет эта площадь? Очевидно, что в геометрии Евклида искомый треугольник будет прямоугольным. В статье даётся ответ на вопрос, каким будет соответствующий треугольник (который мы в дальнейшем будем называть *треугольником максимальной площади*) в геометрии Лобачевского. При этом оказывается, что треугольник максимальной площади не является прямоугольным, но обладает многими свойствами, аналогичными свойствам евклидова прямоугольного треугольника (см. табл. 1).

Как видно из табл. 1, в каком-то смысле аналогом евклидова прямоугольного треугольника в геометрии Лобачевского можно считать и *треугольник максимальной площади*.

Благодарность. Автор благодарит П. В. Бибикова за постановку задачи и внимание к работе.

2. Модель Пуанкаре в круге

Существует несколько моделей геометрии Лобачевского, но нам будет удобнее рассматривать *модель Пуанкаре в круге* (см. [2, 6]). В этой модели *плоскостью Лобачевского* является внутренность единичного круга. Граница этого круга называется *абсолютом*. *Точками* являются обычные

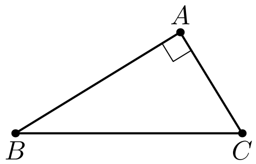
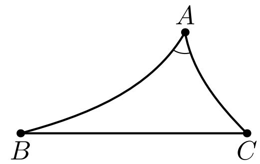
Геометрия Евклида	Геометрия Лобачевского
	
1) $\alpha = \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$;	1) $\alpha = \beta + \gamma < \dfrac{\pi}{2}$;
2) центр описанной окружности лежит в середине стороны BC;	2) центр описанной окружности лежит в середине стороны BC;
3) $\dfrac{S}{2} = \dfrac{b}{2} \cdot \dfrac{c}{2}$;	3) $\sin \dfrac{S}{2} = \operatorname{th} \dfrac{b}{2} \cdot \operatorname{th} \dfrac{c}{2}$;
4) $\cos \alpha = 0 = \mathrm{const}$;	4) $\cos \alpha = \operatorname{th} \dfrac{b}{2} \cdot \operatorname{th} \dfrac{c}{2} \neq \mathrm{const}$;
5) $a^2 = b^2 + c^2$.	5) $\operatorname{sh}^2 \dfrac{a}{2} = \operatorname{sh}^2 \dfrac{b}{2} + \operatorname{sh}^2 \dfrac{c}{2}$.

Табл. 1.

евклидовы точки круга, а *прямыми* — дуги евклидовых окружностей, ортогональных абсолюту, и диаметры абсолюта. *Углы* измеряются как обычные евклидовы углы между кривыми. *Площадь треугольника* в геометрии Лобачевского вычисляется по формуле

$$S(\triangle) = \pi - (\text{сумма углов}).$$

В этом состоит одно из существенных отличий геометрии Лобачевского от геометрии Евклида: в евклидовой геометрии нельзя выразить площадь треугольника через его углы.

3. Ключевая теорема

При решении различных задач геометрии Лобачевского, связанных с площадью треугольника, оказывается полезной следующая теорема (см. также [8]).

Ключевая теорема. *Пусть вершина A неевклидова треугольника ABC совпадает с центром модели Пуанкаре и точка B' симметрична B относительно абсолюта*[1)]*.*

Тогда $S(ABC) = 2\tau$, где $\tau = \angle AB'C$.

[1)] Т. е. точка B' является образом точки B при инверсии относительно абсолюта.

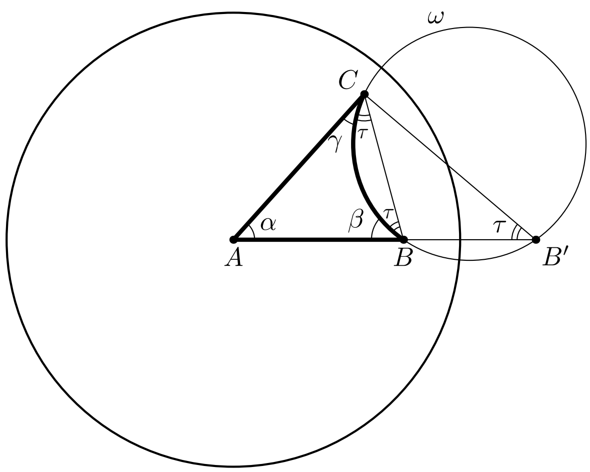


Рис. 1.

Доказательство. Рассмотрим евклидову окружность ω, содержащую неевклидову сторону BC треугольника ABC (рис. 1). Поскольку окружность ω ортогональна абсолюту, она переходит в себя при инверсии относительно абсолюта и, следовательно, проходит через точку B' (см. [3]). Угол между хордой BC и окружностью ω равен τ как угол между хордой и касательной. Поэтому сумма *евклидовых* углов *евклидова* треугольника ABC равна $\alpha+\beta+\gamma+2\tau=\pi$, откуда

$$S(ABC)=\pi-(\alpha+\beta+\gamma)=2\tau. \qquad \square$$

Упражнение 1. Используя ключевую теорему, решите следующие задачи (см. [1, 8]).

1) Постройте в неевклидовом треугольнике ABC отрезок AX, делящий площадь ABC пополам. Верно ли, что отрезок AX является медианой?

2) Постройте в неевклидовом треугольнике ABC точку T, такую, что площади треугольников ABT, BCT и CAT равны. Верно ли, что точка T является точкой пересечения медиан?

Упражнение 2. Рассмотрим на плоскости Лобачевского отрезок AB и прямую c. Найдите на прямой c точку C, такую, что площадь треугольника ABC минимальна.

Упражнение 3. Докажите аналог ключевой теоремы на сфере: *множеством точек, образующих с данным отрезком AB треугольники постоянной площади, является окружность, проходящая через точки A' и B', симметричные точкам A и B относительно центра сферы.*

4. Треугольники максимальной площади и их свойства

Теперь мы готовы решить основную задачу: *найти неевклидов треугольник ABC максимальной площади с двумя заданными сторонами AB и AC*.

Не умаляя общности рассуждений, будем считать, что вершина A совпадает с центром модели Пуанкаре. Зафиксируем сторону AB. Тогда вершина C лежит на неевклидовой окружности ψ с центром в точке A и фиксированным радиусом. Так как центр окружности ψ совпадает с центром модели Пуанкаре, эта окружность совпадает с евклидовой (но другого радиуса). По ключевой теореме треугольник ABC имеет площадь, равную $2\angle AB'C$, где точка B' симметрична точке B относительно абсолюта. Площадь треугольника ABC будет максимальна тогда, когда угол $\angle AB'C$ максимален, т.е. когда отрезок $B'C$ *касается* окружности ψ (рис. 2).

Итак, для построения треугольника ABC максимальной площади достаточно построить касательную $B'C$ к окружности ψ.

Треугольник максимальной площади может быть охарактеризован рядом эквивалентных свойств, которые аналогичны свойствам евклидова прямоугольного треугольника (см. табл. 1).

Теорема 1. *Пусть ABC — неевклидов треугольник с заданными сторонами $AC = b$ и $AB = c$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(0) *ABC имеет максимальную площадь*;

(1) $\alpha = \beta + \gamma < \dfrac{\pi}{2}$;

(2) *центр описанной окружности совпадает с серединой стороны BC*;

(3) $\sin \dfrac{S}{2} = \operatorname{th} \dfrac{b}{2} \cdot \operatorname{th} \dfrac{c}{2}$;

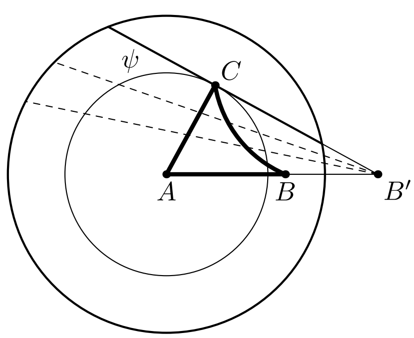


Рис. 2.

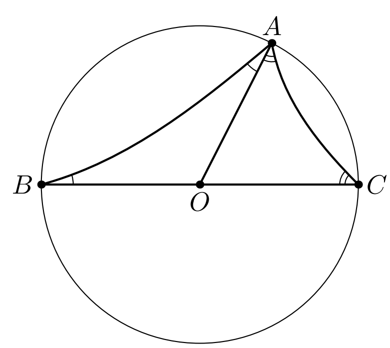


Рис. 3.

(4) $\cos\alpha = \operatorname{th}\frac{b}{2}\cdot\operatorname{th}\frac{c}{2} \neq \mathrm{const}$;

(5) $\operatorname{sh}^2\frac{a}{2} = \operatorname{sh}^2\frac{b}{2} + \operatorname{sh}^2\frac{c}{2}$.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим описанную выше конструкцию. По ключевой теореме $\tau = \angle AB'C = \frac{S}{2}$, где S — площадь треугольника ABC.

(0) $\Leftrightarrow$ (1) Если треугольник ABC имеет максимальную площадь, то $\angle ACB' = \frac{\pi}{2}$, т. е. имеет место равенство $\tau + \alpha = \frac{\pi}{2}$, которое равносильно $(\pi - \alpha - \beta - \gamma) + 2\alpha = \pi$. Отсюда следует, что $\alpha = \beta + \gamma$. Обратно, если выполнено равенство $\alpha = \beta + \gamma$, то $\angle ACB' = \tau + \alpha = \frac{\pi}{2}$ и площадь треугольника ABC максимальна.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) См. рис. 3.

(0) $\Leftrightarrow$ (3) Применим *евклидову* теорему синусов к *евклидовому* треугольнику $AB'C$. Имеем $\frac{AB'_E}{\sin\angle ACB'} = \frac{AC_E}{\sin\tau}$, где через AB'_E и AC_E обозначены *евклидовы* длины *евклидовых* отрезков AB' и AC соответственно. Известно (см. [6]), что евклидова длина l и неевклидова длина ρ отрезка, один из концов которого совпадает с центром модели Пуанкаре, связаны формулой $l = \operatorname{th}\frac{\rho}{2}$, поэтому $AC_E = \operatorname{th}\frac{b}{2}$ и $AB'_E = \frac{1}{AB_E} = \frac{1}{\operatorname{th}\frac{c}{2}}$. Подставляя эти значения в предыдущее равенство, получаем $\sin\angle ACB' = \frac{\sin\frac{S}{2}}{\operatorname{th}\frac{b}{2}\operatorname{th}\frac{c}{2}}$. Поэтому треугольник ABC имеет максимальную площадь тогда и только тогда, когда $\sin\frac{S}{2} = \operatorname{th}\frac{b}{2}\operatorname{th}\frac{c}{2}$.

(0) $\Leftrightarrow$ (4) Рассмотрим *евклидов* треугольник $AB'C$. Если гиперболический треугольник ABC имеет максимальную площадь, то $\cos\alpha = \frac{AC_E}{AB'_E} = \operatorname{th}\frac{b}{2}\operatorname{th}\frac{c}{2}$. Обратно, если выполнено равенство $\cos\alpha = \operatorname{th}\frac{b}{2}\operatorname{th}\frac{c}{2}$, то *евклидов* угол $\angle ACB'$ прямой и площадь неевклидова треугольника ABC максимальна.

(4) $\Leftrightarrow$ (5) Для доказательства воспользуемся *неевклидовой теоремой косинусов*: $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha$. Подставляя значение $\cos\alpha$ из (4), после упрощений получаем (5). Аналогично доказывается и обратная импликация. □

Упражнение 4. Используя аналог ключевой теоремы для сферы (см. упражнение 3), постройте *сферический треугольник максимальной площади* (см. также [9]). Попробуйте также найти аналоги свойств (1)–(5) для этого треугольника.

Упражнение 5. Рассмотрим *евклидов* остроугольный треугольник APQ и проведём в нем высоты PB и QC. Докажите, что *неевклидов* треугольник ABC имеет максимальную площадь

а) в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости относительно прямой PQ (рис. 4);

б) в модели Пуанкаре внутри окружности с центром в точке A, ортогональной описанной окружности четырёхугольника $PCBQ$ (рис. 5).

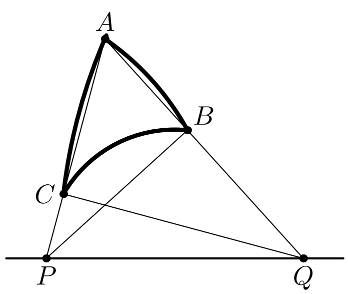


Рис. 4.

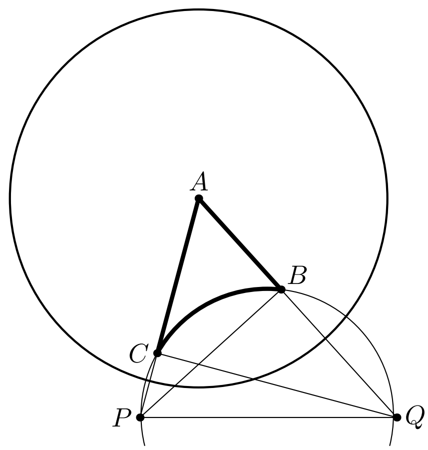


Рис. 5.

Замечания. 1. Когда $b, c \to 0$, свойства (1)–(5) из теоремы 1 переходят в соответствующие евклидовы свойства (см. табл. 1), что ещё раз демонстрирует аналогию между треугольником максимальной площади и прямоугольным треугольником.

2. Если $b, c \to \infty$, то из свойства (4) следует, что угол α стремится к 0 (рис. 7), в то время как в евклидовом прямоугольном треугольнике $\alpha = \dfrac{\pi}{2} = \mathrm{const}$ (рис. 6). Этот факт наиболее ярко отражает разницу между прямоугольным треугольником и треугольником максимальной площади.

3. Формулу (5) можно назвать *неевклидовой теоремой Пифагора*, так как она имеет тот же вид, что и в геометрии Евклида, с той оговоркой, что в ней присутствуют не стороны, а гиперболические синусы от их половин.

Ключевая теорема и формула $AB_E = \operatorname{th}\dfrac{c}{2}$ объясняют, почему во многих формулах, связанных с площадью треугольника, встречаются именно половина площади и половины сторон.

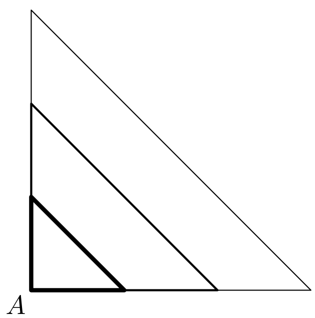


Рис. 6.

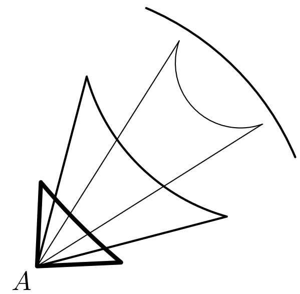


Рис. 7.

Упражнение 6. Используя доказательство равносильности свойств (0) и (3), докажите формулу

$$\operatorname{ctg}\frac{S}{2} = \frac{\operatorname{cth}\frac{b}{2}\operatorname{cth}\frac{c}{2} - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

для вычисления площади *произвольного* неевклидова треугольника через две стороны и угол между ними. Используя ключевую теорему, попробуйте также доказать другие неевклидовы формулы, связанные с площадью треугольника (см. [1, 6]).

5. Применение: изопериметрическая задача

Пользуясь свойствами треугольника максимальной площади, можно решить аналог так называемой изопериметрической задачи: *какой будет фигура максимальной площади при заданном периметре*? В геометрии Евклида ответ хорошо известен: эта фигура является кругом (см. [4, 7]). Оказывается, что в геометрии Лобачевского решением этой задачи также является круг (см. также [10]).

Теорема 2. *В геометрии Лобачевского фигурой максимальной площади с заданным периметром является круг.*

Доказательство. Мы построим доказательство аналогично евклидовому доказательству, предложенному Штейнером (см. [4,7]). Пусть F — искомая фигура с площадью S и периметром L (доказательство существования такой фигуры в геометрии Лобачевского аналогично доказательству для евклидовой геометрии; см. [7]).

Так же, как в евклидовой геометрии (см. [7]) доказывается, что фигура F выпукла, и отрезок BC, который делит периметр фигуры F пополам, делит и её площадь пополам. Назовём такой отрезок *диаметром*.

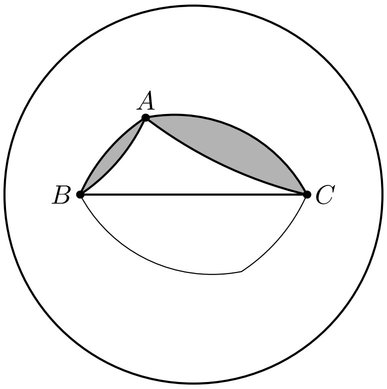


Рис. 8.

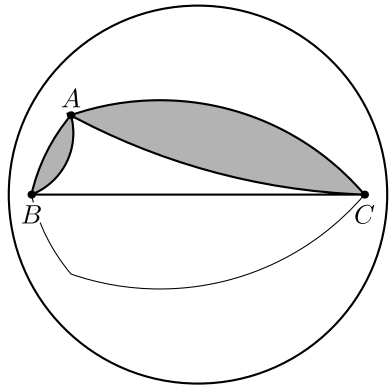


Рис. 9.

Пусть теперь A — произвольная точка границы фигуры F и BC — диаметр фигуры F (рис. 8). Докажем, что треугольник ABC имеет максимальную площадь. Предположим противное. Рассмотрим половину фигуры F, отсекаемую диаметром BC и содержащую точку A. Её площадь будет состоять из площади треугольника ABC и площадей двух оставшихся сегментов, прикреплённых к сторонам AB и AC. Если двигать стороны AB и AC, меняя угол между ними, то половина площади F будет меняться, причём сегменты будут двигаться вместе со сторонами, тем самым сохраняя периметр $L/2$. Таким образом можно добиться, чтобы площадь треугольника ABC стала максимальной (рис. 9). Тогда отразим полученную фигуру относительно диаметра BC и получим новую фигуру F' периметра L и с площадью большей S — противоречие.

Итак, для любой точки A границы фигуры F площадь треугольника ABC максимальна. По свойству (2) теоремы 1 имеем $OA = OB = OC = \text{const}$, а значит, фигура F является кругом с диаметром BC.

Список литературы

[1] Бибиков П. В., Ткаченко И. В. *О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского* // Мат. Просвещение. Сер. 3, вып. 11, 2007. С. 113–126.

[2] Ефимов Н. В. *Высшая геометрия*. М.: Физматлит, 2003.

[3] Заславский А. А. *Геометрические преобразования*. М.: МЦНМО, 2003.

[4] Крыжановский Д. А. *Изопериметры*. М.: Физматгиз, 1959.

[5] Норден А. П. *Элементарное введение в геометрию Лобачевского*. М.: ГИИТЛ, 1953.

[6] Прасолов В. В. *Геометрия Лобачевского*. 3-е изд. М.: МЦНМО, 2004.

[7] Протасов В. Ю. *Максимумы и минимумы в геометрии*. М.: МЦНМО, 2005.

[8] Шварцман О. В. *Комментарий к статье П. В. Бибикова и И. В. Ткаченко «О трисекции и бисекции треугольника на плоскости Лобачевского»* // Мат. Просвещение. Сер. 3, вып. 11, 2007. С. 127–130.

[9] Maehara H. *The problem of thirteen spheres — a proof for undergraduates* // European Journal of Combinatorics **28**, 2007. P. 1770–1778.

[10] Schmidt E. *Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im hyperbolischen und sphrärischen Raum jeder Dimensionenzahl* // Math. Z. V. 49, 1943. P. 1–109.

Е. И. Алексеева, лицей «Вторая школа», г. Москва
Email: `matmail@bk.ru`