О реализации расстояний

Ф. В. Петров С. Е. Рукшин

Если подмножество A некоторой абелевой группы достаточно большое, то часто можно утверждать, что разностное множество $A-A$ «ещё больше» — в том смысле, что удовлетворяет куда более сильным требованиям, чем A. Известное утверждение такого рода — теорема Штейнгауза: если множество $A \subset \mathbb{R}^d$ имеет положительную меру Лебега, то $A-A$ имеет 0 внутренней точкой. Мы поговорим об обобщениях этой теоремы в различных направлениях.

Начнём со следующего определения (ничуть не канонического).

Определение. Будем говорить, что множество $M \subset \mathbb{R}^d$ является *штейнгаузовским*, если $D(M) := M-M = \{x-y \mid x, y \in M\}$ имеет 0 внутренней точкой. Если K — некоторое ограниченное выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$, то множество M называется *K-штейнгаузовским*, если для некоторого множества K_1, гомотетичного или равного K, $D(M \cap K_1) = D(K_1)$.

Иными словами, любой вектор, соединяющий две точки множества K_1, реализуется как вектор, соединяющий две точки из $M \cap K_1$. В одномерном случае можно говорить не о векторах, а просто о расстояниях между точками множества.

Следующие факты известны:

Теорема 1. i) (*Г. Штейнгауз*, 1920 [6]). *Множество положительной внутренней лебеговой меры в $\mathbb{R}^d$ является штейнгаузовским.*

ii) (*Х. Миллер*, 1990 [5]). *Множество положительной меры на прямой является I-штейнгаузовским, если I — интервал, полуинтервал или отрезок.*

Строго говоря, Штейнгауз рассматривал измеримые множества положительной меры, но очевидно, что тем самым была доказана и теорема для всех их надмножеств, то есть для всех множеств положительной внутренней меры.

Мы поговорим о возможных обобщениях теоремы Штейнгауза на случай множеств, больших в других возможных смыслах этого слова; и теоремы Миллера на случай меры Лебега в большей размерности.

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 14, 2010(184–191)

Один из способов сказать, что множество является большим, не прибегая к понятию меры, таков: если все пространство разбито на конечное количество множеств, то одно из них в каком-то смысле большое. Тут трудно не вспомнить знаменитую теорему Ван дер Вардена: если натуральные числа разбиты на конечное количество частей, то одна из них содержит сколь угодно длинную арифметическую прогрессию. Аналог этого утверждения для «меры» называется теоремой Семереди и оказывается гораздо более сложным фактом, чем теорема Ван дер Вардена: множество натуральных чисел положительной нижней плотности (то есть такое, которое содержит хотя бы $\mathrm{const} \cdot N$ чисел из первых N) также обязано содержать сколь угодно длинную арифметическую прогрессию. Казалось бы, утверждение Штейнгауза для разбиения прямой на части тоже должно быть только проще, чем для меры. И ясно, что если части разбиения измеримы, то оно является непосредственным следствием. Однако оказывается, что все наоборот: для разбиений не то что не проще, а прямо таки неверно! Аксиома выбора, позволяющая строить неизмеримые множества, делает неверными *для всех множеств* и многие теоремы, верные *для измеримых множеств*. Эта не исключение.

Теорема 2. *Прямую можно представить в виде дизъюнктного объединения двух (равных) множеств A и $B = \mathbb{R} \setminus A$, ни одно из которых не является штейнгаузовским.*

Доказательство. Построим сходящуюся к нулю последовательность $e_1 > e_2 > e_3 > \ldots$ положительных чисел такую, что $\sum_{i=1}^{n} r_i e_i \neq 0$ при не равных одновременно нулю рациональных r_i (иными словами, выберем e_i рационально независимыми над $\mathbb{Q}$). Это можно сделать из соображений мощности (если выбраны элементы e_1, e_2, $\ldots$, e_k, то можно взять любой $e_{k+1} \in (0, e_k/2)$, кроме счётного количества запрещённых элементов). Можно предъявить такую последовательность и явно: $e_k := 1/\sqrt{p_k}$, где p_k — k-е простое число. Доказательство в этом случае не просто, см. [2, задача 6.20].

Так или иначе, конструктивная часть на этом всё равно заканчивается, а начинается аксиома выбора. Назовём два вещественных числа эквивалентными, если их разность представима как линейная комбинация чисел e_i с целыми коэффициентами. Очевидно, это отношение эквивалентности, так что прямая представляется как объединение классов эквивалентности $\mathbb{R} = \bigsqcup R_\alpha$. Пользуясь аксиомой выбора, выберем в каждом классе эквивалентности R_α элемент $r_\alpha \in R_\alpha$. Теперь определим A как множество тех $x \in \mathbb{R}$, которые представимы в виде

$$r_\alpha + \sum_{i=1}^{n} m_i e_i, \quad m_i \in \mathbb{Z},\ 2 \Bigm| \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Легко видеть, что множество $B := \mathbb{R}\setminus A$ задаётся аналогичным образом, но с нечётной суммой коэффициентов $\sum m_i$. Так же ясно, что $B = A + e_1$, то есть множества A и B совмещаются параллельным переносом, и что множество $A - A$ не содержит ни одного из чисел $e_1, e_2, \ldots$. Следовательно, 0 не является для $A - A$ внутренней точкой. □

Совершенно аналогично можно построить разбиение прямой на два равных множества, для каждого из которых разность $A - A$ не имеет внутренних точек, надо лишь выбрать последовательность e_i не сходящейся к нулю, а всюду плотной.

Дело меняется, если вместо разностей рассматривать чуть более хитрые комбинации вида $x + y - z$.

Теорема 3. *Если $\mathbb{R} = A \cup B$, то одно из множеств $A + A - A$, $B + B - B$ совпадает с $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Предположим противное, пусть $r \notin A + A - A$, $s \notin B + B - B$. Тогда $r \notin A$, $s \notin B$, следовательно $r \in B$, $s \in A$. Если например $(r + s)/2 \in A$, то $r = (r + s)/2 + (r + s)/2 - s \in A + A - A$ — противоречие. □

Интересно было бы разобраться, что происходит при разбиении прямой на большее, чем 2, количество частей. Мы не знаем полного или хотя бы удовлетворительного ответа.

Отметим следующие следствия из теоремы 2.

Следствие 1. *Существует множество $A \subset \mathbb{R}$ полной внешней лебеговой меры (то есть дополнение которого имеет нулевую внутреннюю лебеговую меру), не являющееся штейнгаузовским.*

Следствие 2. *Существует множество $A \subset \mathbb{R}$ второй категории Бэра (то есть не представимое в виде счётного объединения нигде не плотных), не являющееся штейнгаузовским.*

Однако более сильное категорное требование влечёт свойство Штейнгауза.

Теорема 4. *Если $A \subset \mathbb{R}$ и $\mathbb{R} \setminus A$ — первой категории (счётное объединение нигде не плотных), то $A - A = \mathbb{R}$.*

Доказательство. Для произвольного $a > 0$ множество $A \cap (A - a)$ — второй категории, а потому не пусто, откуда получаем, что $a \in A - A$. □

Аналогично доказывается, что если $A = \Delta \setminus E$, где Δ — некоторый интервал, а E первой категории, то $D(A) = D(\Delta)$.

Вернёмся к мере Лебега.

Напомним важный классический результат.

Теорема 5 (Лебега о точках плотности). *Пусть* $A \subset \mathbb{R}$ — *измеримое множество положительной меры Лебега* $|A| > 0$. *Обозначим для измеримого множества положительной меры* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *через*

$$f_A(\Delta) = |A \cap \Delta|/|\Delta|$$

долю, которую A *занимает в* Δ. *Для почти всех* $x \in A$ *нижняя плотность*

$$\mathrm{ld}_A(x) := \varliminf_{t\to+0} f_A((x-t, x+t))$$

равна 1.

Доказательство см. напр. в [1]. Ясно, что для точки плотности x имеет место $\lim f_A(P) = 1$ для всех промежутков P, содержащих x, размеры которых стремятся к нулю.

Следующая теорема усиливает результат Миллера, показывая, во-первых, что в достаточном большом по мере множестве интервал реализации расстояний можно выбрать достаточно большим, а во-вторых, что центром штейнгаузовского интервала реализации расстояний можно выбрать любую точку, в которой нижняя плотность множества A больше половины.

Теорема 6 (Малинникова, Рукшин [3]). (i) *Пусть* $\Delta \subset \mathbb{R}$ — *интервал,* $A \subset \mathbb{R}$ — *измеримое множество,* $|A \cap \Delta| = |\Delta|/2 + c$, $c > 0$. *Тогда найдётся такой подинтервал* $\Delta_1 \subset \Delta$, *что* $|\Delta_1| \geqslant 2c$ *и* $D(A \cap \Delta_1) = D(\Delta_1)$.

(ii) *Пусть* $A \subset \mathbb{R}$, $\mathrm{ld}_A(x_0) > 1/2$. *Тогда для некоторого интервала* Δ *с центром в точке* x_0 *выполнено* $D(A \cap \Delta) = D(\Delta)$.

Доказательство. (i) Назовём хорошим интервал $I \subset \Delta$, если $|I \cap A| \geqslant |I|/2 + c$. Из всех хороших интервалов выберем интервал наименьшей длины. Заметим, что он существует, так как множество хороших интервалов в фазовом пространстве замкнуто (иными словами, если интервалы (x_n, y_n) таковы, $x_n \to x$, $y_n \to y$, то интервал (x, y) тоже подходит). Обозначим наименьший хороший интервал Δ_1. Очевидно, он не пуст и более того, $|\Delta_1| \geqslant 2c$. Докажем, что $D(A \cap \Delta_1) = D(\Delta_1)$. Пусть, не умаляя общности, $\Delta_1 = (-a, a)$. Выберем $p \in (0, 2a)$ и докажем, что $p \in D(A \cap (-a, a))$. Предположим противное. Тогда $f_A((-a, a-p)) + f_A((p-a, a)) \leqslant 1/2$, иначе по принципу Дирихле при сдвиге на p некоторая точка из множества $A \cap (-a, a-p)$ перейдёт в точку из $A \cap (p-a, a)$ и получится, что $p \in D(A \cap (-a, a))$ — противоречие. Теперь разберем два случая.

1) $p > a$. Тогда

$$2a - p \geqslant |A \cap (-a, a-p)| + |A \cap (p-a, a)|,$$

откуда

$$|A \cap (a-p, p-a))| = |A \cap (a,a)| - |A \cap (-a, a-p)| - |A \cap (p-a, a)| \geqslant \\ \geqslant a + c - (2a-p) = (p-a) + c,$$

то есть интервал $(a-p, p-a)$ тоже хороший — противоречие.

2) $p \leqslant a$. Тогда

$$|A \cap (-a, p-a)| + |A \cap (a-p, a)| = \\ = 2|A \cap (-a, a)| - |A \cap (-a, a-p)| - |A \cap (p-a, a)| \geqslant \\ \geqslant 2(a+c) - (2a-p) = p + 2c,$$

так что один из интервалов $(-a, p-a)$, $(a-p, a)$ является хорошим. Опять противоречие.

(ii) Не умаляя общности, $x_0 = 0$. Пользуясь тем, что $\mathrm{ld}_A(0) > 1/2$, выберем $b > 0$ такое, что $f_A((-t,t)) > 1/2$ для $0 < t \leqslant b$. Рассмотрим множество B тех $t \in (0,b)$, для которых $f_A((-b,-t) \cup (t,b)) \leqslant 1/2$. Для удобства будем также считать, что $b \in B$. Тогда ясно, что B замкнуто. Кроме того, ясно, что достаточно маленькие t не лежат в B, так как $\lim_{t\to 0} f_A((-b,-t) \cup (t,b)) = f_A((-b,b)) > 1/2$. Положим $a = \inf B$. Докажем, что интервал $\Delta = (-a,a)$ искомый. Это вполне аналогично доказательству пункта (i). Выберем $p \in (0, 2a)$ и докажем, что $p \in D(A \cap (-a,a))$. Как и в (i), рассмотрим два случая.

1) $p \geqslant a$. Тогда

$$2a - p \geqslant |A \cap (-a, a-p)| + |A \cap (p-a, a)|.$$

По выбору точки a имеем также

$$b - a \geqslant |A \cap (-b, -a)| + |A \cap (a, b)|.$$

Складывая, получаем

$$a + b - p \geqslant |A \cap (-b, a-p)| + |A \cap (p-a, b)|.$$

Значит, точка $p - a < a = \inf B$ лежит в множестве B — противоречие.

2) $p \leqslant a$. Тогда

$$2a - p \geqslant |A \cap (-a, a-p)| + |A \cap (p-a, a)| = \\ = |A \cap (-a, a)| + |A \cap (p-a, a-p)| > 2a - p,$$

так как $|A \cap (-t,t)| > t$ для $t < b$. Противоречие. □

Важной для изучения бóльшей размерности будет следующая теорема, обобщающая теорему Лебега о точках плотности.

Теорема 7. *Если $A \subset \mathbb{R}^d$ — измеримое множество положительной меры, то для почти всех точек $x \in A$ имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{P} \frac{|A \cap P|}{|P|} = 1,$$

где $|\cdot|$ обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^d$, P — параллелепипеды с рёбрами, параллельными осям координат, содержащие x, размеры P стремятся к нулю.

Различие с обычной теоремой Лебега, в которой в качестве P берутся квадраты (или круги — это не важно), в том, что отношение длин рёбер P может быть сколь угодно большим. В одномерном случае никаких отличий нет.

Теорема 7 несложно следует из одномерного варианта. Приведём набросок доказательства в размерности 2. Сначала замечаем, что почти все точки являются точками «вертикальной» плотности, и для таких точек вертикальной плотности почти все точки являются точками «горизонтальной» плотности. Интегрируя это обстоятельство, получаем требуемое. Тут надо ещё разобраться с измеримостью, но мы этим заниматься не будем, а отошлём читателя к [4].

Пусть B — замкнутый, C — открытый круг на плоскости. Существует множество полной лебеговой меры, не являющееся B-штейнгаузовским (достаточно рассмотреть множество M_r точек, у которых первая координата иррациональна). Однако, если M — множество полной лебеговой меры, то $D(A \cap M) = D(A)$ для любого открытого множества A (рассмотрим произвольный вектор $x \in D(A)$, маленькие круги $C_1, C_2 \subset A$ такие, что $C_2 = x + C_1$. Тогда $C_1 \cap M$ и $(C_2 \cap M) - x$ — два множества полной меры в C_1, они должны пересечься).

Если J — открытый круг, то существует множество положительной лебеговой меры, не являющееся J-штейнгаузовым. Достаточно взять замкнутое подмножество положительной меры из множества M_r.

В предыдущих двумерных рассуждениях можно заменить круг на треугольник, произвольное выпуклое множество без прямых участков на границе или на многоугольник, стороны которого не разбиваются на пары параллельных.

Рассмотрим в этой связи самый естественный из оставшихся объектов — параллелограмм. Аффинным преобразованием сведём дело к случаю квадрата.

Теорема 8. *Пусть Q — квадрат (замкнутый или открытый) на плоскости. Тогда любое множество A положительной лебеговой меры на плоскости является Q-штейнгаузовским.*

Доказательство. Не умаляя общности, A замкнуто (можно заменить A на замкнутое подмножество положительной меры), а Q — открытый квадрат. В самом деле, для замкнутого квадрата Q_1 множество $D(A \cap Q_1)$ замкнуто, так что если $D(A \cap Q_1) \supset D(\mathrm{IntQ_1})$, то $D(A \cap Q_1) = D(Q_1)$. Введём декартовы координаты так, чтобы стороны Q были параллельны осям.

Для каждого натурального n рассмотрим множество A_n тех $x \in A$, для которых

$$|A \cap P| > 0{,}99 \cdot |P|$$

для всех прямоугольников P, стороны которых параллельны осям, диаметра меньше $1/n$.

Легко видеть, что множества A_n замкнуты и по теореме 7 $|\cup A_n| = |A| > 0$. Так что можно выбрать такое N, что $|A_N| > 0$. Известно, что тогда для некоторого квадрата Q_1, гомотетичного Q, $|A_N \cap Q_1| > 0{,}99 \cdot |Q_1|$. (Так как множество A_N аппроксимируется сверху по мере открытым, а открытое снизу — дизъюнктным объединением ячеек, гомотетичных Q. В одной из этих ячеек наше множество A_N и должно занимать хотя бы 99 процентов меры.) Разобьём Q_1 на много равных квадратиков диаметра меньше, чем $1/N$, один из них обладает тем же свойством, что хотя бы 99 процентов его точек лежат в A_N. Обозначим его Q_2, пусть сторона Q_2 равна $2a$, и разобьём Q_2 на четыре равных квадратика Q_3, $Q_4 = Q_3 + (a, 0)$, $Q_5 = Q_3 + (0, a)$, $Q_6 = Q_3 + (a, a)$. Выберем в Q_3 случайную (согласно мере Лебега) точку x и рассмотрим точки x, $x + (a, 0) \in Q_4$, $x + (0, a) \in Q_5$, $x + (a, a) \in Q_6$. Каждая из них лежит в A_N с вероятностью хотя бы 96 процентов. Поэтому с положительной вероятностью все они лежат в A_N.

Итак, мы нашли квадрат Q_7 с левым нижним углом x и стороной $a < 1/2N$, все углы которого лежат в A_N. Докажем, что $D(A \cap Q_7) = D(Q_7) = (-a, a)^2$. Рассмотрим произвольный вектор $(p, q) \in (-a, a)^2$. Не умаляя общности, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$. Тогда рассмотрим прямоугольники $\Delta_1 = x + (0, a-p) \times (0, a-q)$ (с левым нижним углом x) и $\Delta_2 = x + (p, a) \times (q, a)$ (с левым верхним углом $x + (a, a)$). По определению множества A_N каждый из них состоит хотя бы на 99 процентов из точек множества A. Значит, при параллельном переносе на вектор (p, q) некоторая точка $\Delta_1 \cap A$ переедет в точку $\Delta_2 \cap A$. Следовательно, $(p, q) \in D(A \cap Q_7)$. $\square$

Назовём множество $S \subset \mathbb{R}^d$ удобным, если любое множество положительной меры Лебега является S-штейнгаузовским. Аналогично доказывается, что куб является является удобным множеством в $\mathbb{R}^d$. Было бы любопытно получить ясную характеризацию удобных множеств (хотя бы в предположении выпуклости и компактности).

Также было бы интересно получить аналоги теоремы 4 в старшей размерности, хотя бы для квадратов на плоскости.

Список литературы

[1] И. П. Натансон. *Теория функций вещественной переменной*. Любое издание.

[2] В. В. Прасолов. *Задачи по алгебре, арифметике и анализу*. М.: МЦНМО, 2007.

[3] Е. В. Малинникова, С. Е. Рукшин. *О реализации расстояний точками измеримых множеств* // Ученые записки ЛГОУ, серия «Математика и информатика». Т. 1, 1998. С. 63–65.

[4] B. Jessen, J. Marcinkiewicz, A. Zygmund. *Note on the differentiability of multiple integrals* // Fund. Math. Vol. 25, 1935. P. 217–234.

[5] H. Miller. *Two results in classical measure theory* // Jour. of Math. Anal. and App. Vol. 151, iss. 1, 1990. P. 203–207.

[6] H. Steinhaus. *Sur les distances des points des ensembles de mesure positive* // Fund. Math. Vol. 1, 1920. P. 93–104.

Ф. В. Петров, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

С. Е. Рукшин, Российский Государственный Педагогический Университет им. Герцена