Строго равнобедренные множества

Ю. И. Ионин

§1. Вступление

На рис. 1 изображены шесть точек — вершины и центр правильного пятиугольника. Любые три из них образуют равнобедренный треугольник. В 1947 году знаменитый венгерский математик Пол Эрдёш задал следующие два вопроса.

1. Существует ли множество из семи точек на плоскости, любые три из которых являются вершинами равнобедренного треугольника?

2. Каково максимальное число точек в пространстве, любые три из которых являются вершинами равнобедренного треугольника?

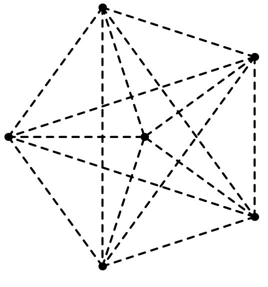

Рис. 1.

Отрицательный ответ на первый вопрос был получен Келли [7] в 1948 году. Келли также привел следующий пример множества из восьми точек в трехмерном пространстве: пять вершин и центр правильного пятиугольника и две точки на прямой, перпендикулярной плоскости пятиугольника и проходящей через его центр; расстояние от обеих точек до центра пятиугольника должно быть равно радиусу описанной окружности пятиугольника. Для любых трех точек из этого множества среди трех попарных расстояний между ними есть два равных. В 1962 году Крофт [4] доказал, что никакое множество из девяти точек в трехмерном пространстве не обладает этим свойством, а в 2006 году Кидо [8] доказал, что любое множество из восьми точек в трехмерном пространстве с двумя различными расстояниями между ними подобно примеру Келли (короткое доказательство утверждений Крофта и Кидо дано в [6]). С тех пор пример Келли считается решением задачи Эрдёша для трехмерного евклидова пространства. Однако, в примере Келли среди восьми точек есть три, лежащие на одной прямой, и потому не образующие треугольник, так что, строго говоря, семь точек в $\mathbb{E}^3$ — ответ задачи Эрдёша. В настоящей статье мы рассмотрим задачу Эрдёша в строгом смысле для евклидова пространства $\mathbb{E}^n$. Кроме определения максимального числа точек, любые три из которых образуют равнобедренный треугольник, мы попытаемся, где возможно, найти все конфигурации с максимальным числом точек.

Мы рассматриваем $\mathbb{E}^n$ как множество всех точек (векторов) $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, где u_i — вещественные числа. Если X — непустое подмножество пространства $\mathbb{E}^n$, то аффинное подпространство $\langle X\rangle$, порожденное множеством X, — это множество всех точек вида $\sum_{\mathbf{u}\in X} a_{\mathbf{u}}\mathbf{u}$, где среди коэффициентов $a_{\mathbf{u}}$ все, кроме конечного числа, равны 0 и сумма всех ненулевых коэффициентов равна 1. Если аффинное подпространство $\langle X\rangle$ порождается каким-нибудь множеством из $m+1$ точек и не порождается никаким множеством из m точек, то мы называем $m = \dim X$ размерностью множества X. В частности, $\dim X = 0$ означает, что X состоит из одной точки; $\dim X = 1$ означает, что $|X| \geqslant 2$ и все точки множества X лежат на одной прямой.

Мы используем обозначение $\|\cdot\|$ для евклидовой нормы и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ для стандартного скалярного произведения, так что $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}$.

Определение. Непустое множество S в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ называется *равнобедренным множеством*, если для любых трех точек множества S среди трех попарных расстояний между ними есть хотя бы два равных. Если, кроме того, никакие три точки множества S не лежат на одной прямой, то множество S называется *строго равнобедренным*.

После подготовительной работы в §§2, 3 мы приведем доказательство теоремы Блокхауса [2], устанавливающей верхнюю границу $(n+1)(n+2)/2$ для числа точек равнобедренного множества в $\mathbb{E}^n$. Эта граница достигается в размерностях 1, 2, 6 и 8, а для строго равнобедренных множеств — в размерностях 2, 6 и 8.

В §4 мы найдем точную верхнюю границу для числа точек строго равнобедренного множества в $\mathbb{E}^n$ для всех $n \leqslant 8$, а для $n \leqslant 6$ мы найдем все строго равнобедренные множества, реализующие эти границы. Аналогичные результаты для равнобедренных множеств (при $n \leqslant 8$ и $n \leqslant 7$ соответственно) получены автором в работе [6], свободно доступной в интернете. В §5 мы рассмотрим обобщения задачи Эрдёша на другие метрические пространства.

§2. Множества с двумя расстояниями

Для любого множества S в евклидовом пространстве обозначим через $\operatorname{dist}(S)$ число различных ненулевых расстояний между точками множества S.

Упражнение 1. Доказать: если множество $S \subset \mathbb{E}^n$ таково, что $\operatorname{dist}(S) = 1$, то $|S| \leqslant n+1$; если при этом $|S| = n+1$, то множество S — правильный n-мерный симплекс — определено однозначно с точностью до подобия.

Упражнение 2. Пусть $n \geqslant 3$ и пусть множество Λ_n образовано всеми точками пространства $\mathbb{E}^{n+1}$, у которых две координаты равны 1, а остальные $n-1$ координат равны 0. Доказать: множество Λ_n образовано серединами ребер правильного n-мерного симплекса, $\operatorname{dist}(\Lambda_n) = 2$, $\dim \Lambda_n = n$.

Упражнение 3. Доказать: если множество $S \subset \mathbb{E}^2$ таково, что $\operatorname{dist}(S) = 2$, то $|S| \leqslant 5$; если $|S| = 5$, то S — множество вершин правильного пятиугольника. Доказать, что существует ровно шесть (с точностью до подобия) различных четырехточечных множеств на плоскости с двумя ненулевыми расстояниями.

Очевидно, если $\operatorname{dist}(S) \leqslant 2$, то S — равнобедренное множество. Следующий результат, полученный в работе [9], показывает, что любое достаточно большое множество с двумя расстояниями является на самом деле строго равнобедренным.

Теорема 1. Пусть $S \subset \mathbb{E}^n$ и пусть $\operatorname{dist}(S) = 2$. Пусть $d_1 < d_2$ — ненулевые расстояния между точками множества S. Если $S > 2n+3$, то существует натуральное число $t \leqslant (-1+\sqrt{2n})/2$ такое, что

$$\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = \frac{t+1}{t}\,.$$

Следствие 1. Пусть $S \subset \mathbb{E}^n$ и пусть $\operatorname{dist}(S) = 2$. Если $|S| > 2n+3$, то S — строго равнобедренное множество.

Доказательство. Так как $(t+1)/t < 4$, то $d_2 < 2d_1$, и потому никакие три точки множества S не лежат на одной прямой.

Следствие 2. Пусть $S \subset \mathbb{E}^n$ и пусть $\operatorname{dist}(S) = 2$. Если $n \leqslant 4$, то $|S| \leqslant 2n+3$.

Доказательство. Если $n \leqslant 4$, то $(-1+\sqrt{2n})/2 < 1$, в то время как $(t+1)/t > 1$.

Следствие 3. Пусть $S \subset \mathbb{E}^n$ и пусть $\operatorname{dist}(S) = 2$. Пусть $d_1 < d_2$ — ненулевые расстояния между точками множества S. Если $5 \leqslant n \leqslant 12$ и $|S| > 2n+3$, то $d_2 = d_1\sqrt{2}$.

Доказательство. Если $n \leqslant 12$, то $(-1+\sqrt{2n})/2 < 2$, так что $t = 1$, $(t+1)/t = 2$.

В 1966 году Эйнгорн и Шёнберг [5] доказали, что множество $S \subset \mathbb{E}^3$ такое, что $\operatorname{dist}(S) = 2$, состоит не более чем из шести точек. При этом имеется ровно шесть (с точностью до подобия) конфигураций из шести точек с двумя различными ненулевыми расстояниями между точками. Две из них образованы вершинами правильного октаэдра и вершинами правильной треугольной призмы с квадратными боковыми гранями. Шестерки вершин правильного икосаэдра, не содержащие противоположных вершин, дают еще четыре конфигурации. Пусть A — вершина правильного икосаэдра. Соседи вершины A образуют правильный пятиугольник $BCDEF$. Оставшиеся шесть вершин — A', B', C', D', E', F' — диаметрально противоположны (по отношению к описанной сфере) вершинам A, B, C, D, E, F, соответственно. Если две вершины не противоположны, то расстояние между ними равно либо стороне, либо диагонали правильного пятиугольника $BCDEF$. Поэтому, если S — любое множество вершин правильного икосаэдра, не содержащее противоположных вершин, то $\operatorname{dist}(S) < 2$. Следующие четыре множества из шести вершин попарно не подобны:

$$\begin{aligned} &\{A, B, C, D, E, F\}, \quad \{A, B', C', D', E', F'\}, \\ &\{A, B, C, D, E, F'\}, \quad \{A, B', C, D', E, F\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Первые два множества состоят из вершин правильных пятиугольных пирамид, у которых боковые рёбра равны либо стороне, либо диагонали основания. Последнее множество образовано вершинами усеченной правильной треугольной пирамиды, у которой боковое ребро равно стороне меньшего основания, а острые углы боковых граней равны 72°.

Упражнение 4. Доказать: любое множество из шести вершин правильного икосаэдра, никакие две из которых не противоположны, конгруэнтно одному из множеств (1).

Упражнение 5. Доказать: в пространстве $\mathbb{E}^n$ существует множество из $2n$ точек с двумя ненулевыми расстояниями d_1 и d_2, такими, что $(d_1/d_2)^2$ иррационально. (*Указание*: найдите n-мерный аналог последнего из множеств (1).)

В работах [1] и [2] доказано, что если множество $S \subset \mathbb{E}^n$ таково, что $\operatorname{dist}(S) = s$, то $|S| \leqslant C^s_{n+s}$. Мы приведем доказательство этой теоремы только для интересующего нас случая $s = 2$.

Теорема 2. Если множество $S \subset \mathbb{E}^n$ таково, что $\operatorname{dist}(S) = s$, то $|S| \leqslant C^2_{n+2}$. Если, кроме того, все точки множества S лежат на сфере, то $|S| \leqslant C^2_{n+2} - 1 = n(n+3)/2$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{dist}(S) = 2$. Если теорема справедлива для конечных множеств, то S не может быть бесконечным. Поэтому мы можем предположить, что S — конечное множество в $\mathbb{E}^n$. Пусть d_1, d_2 — различные ненулевые расстояния между точками множества S. Для каждой точки $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in S$ рассмотрим следующий многочлен $F_{\mathbf{u}}$ от n переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$: $F_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = (\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^2 - d_1^2)(\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^2 - d_2^2)$. Если $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, то $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = d_1$ или d_2, и потому $F_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = 0$. Кроме того, $F_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = (d_1 d_2)^2 \neq 0$. Эти свойства многочленов $F_{\mathbf{u}}$ гарантируют их линейную независимость над полем вещественных чисел. В самом деле, если $\sum_{\mathbf{u} \in S} a_{\mathbf{u}} F_{\mathbf{u}} = 0$, где $a_{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}$, то, для любой точки $\mathbf{v} \in S$, $\sum_{\mathbf{u} \in S} a_{\mathbf{u}} F_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = a_{\mathbf{v}}(d_1 d_2)^2 = 0$, откуда следует, что $a_{\mathbf{v}} = 0$.

Раскроем скобки в выражении для $F_{\mathbf{u}}$:

$$F_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = (\|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle + \|u\|^2 - d_1^2)(\|\mathbf{x}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle + \|u\|^2 - d_2^2) =$$
$$= \|\mathbf{x}\|^4 - 4\sum_{i=1}^{n} u_i(\|\mathbf{x}\|^2 x_i) + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i + \gamma,$$

где α_{ij}, β_i, γ — вещественные числа, конкретные значения которых нас не интересуют.

Таким образом, каждый из линейно независимых многочленов $F_{\mathbf{u}}$, $u \in S$, является линейной комбинацией одних и тех же $(n+1)(n+4)/2$ многочленов:

$$\|\mathbf{x}\|^4, \quad \|\mathbf{x}\|^2 x_i \ (1 \leqslant i \leqslant n), \quad x_i x_j \ (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n), \quad x_i \ (1 \leqslant i \leqslant n), \quad 1. \tag{2}$$

Мы предоставляем читателю проверить, что многочлены (2) линейно независимы.

Мы теперь покажем, что никакая линейная функция, кроме тождественного нуля, не является линейной комбинацией многочленов $F_{\mathbf{u}}$. Отсюда будет следовать, что многочлены $F_{\mathbf{u}}$ ($\mathbf{u} \in S$), x_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) и константа 1 линейно независимы. Поскольку каждый из них является линейной комбинацией $(n+1)(n+4)/2$ многочленов (2), мы получим, что $|S| + n + 1 \leqslant (n+1)(n+4)/2$, откуда $|S| \leqslant C_{n+2}^2$.

Итак, предположим, что

$$\sum_{\mathbf{u} \in S} a_{\mathbf{u}} F_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = c + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i,$$

где $a_{\mathbf{u}}$, c и b_i — вещественные числа. Положим $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Тогда

$$\sum_{\mathbf{u} \in S} a_{\mathbf{u}} F_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = c + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle.$$

Положив $\mathbf{x} = \mathbf{v}$, где $\mathbf{v} \in S$, мы получим $a_{\mathbf{v}}(d_1 d_2)^2 = c + \langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle$. Следовательно,

$$\sum_{\mathbf{u} \in S} (c + \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle) F_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = (d_1 d_2)^2 (c + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle). \tag{3}$$

Обе части этого равенства являются линейными комбинациями линейно независимых многочленов (2), и потому многочлены (2) должны входить в эти линейные комбинации с одним и тем же коэффициентом. Равенство коэффициентов при $\|x\|^4$ означает, что $c|S| + \sum_{\mathbf{u} \in S} \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle = 0$, откуда

$$\frac{1}{|S|} \sum_{\mathbf{u} \in S} \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle = -c. \tag{4}$$

Для $i = 1, 2, \ldots, n$ равенство коэффициентов при $\|x\| 2x_i$ означает, что

$$\sum_{\mathbf{u} \in S} (c + \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle) u_i = 0$$

откуда

$$\sum_{\mathbf{u} \in S} (c + \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle) b_i u_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\mathbf{u} \in S} (c + \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle) b_i u_i = 0,$$

$$\sum_{\mathbf{u} \in S} \sum_{i=1}^{n} (c + \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle) b_i u_i = 0,$$

$$\sum_{\mathbf{u} \in S} (c + \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle) \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle = 0.$$

Используя (4), мы получаем

$$\frac{1}{|S|} \sum_{\mathbf{u} \in S} \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle^2 = c^2. \tag{5}$$

Равенства (4) и (5) означают, что квадрат среднего арифметического чисел $\langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle$, $\mathbf{u} \in S$, равен среднему арифметическому их квадратов. Поэтому все числа $\langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle$ равны друг другу и, следовательно, равны $-c$. Но тогда равенство (3) означает, что многочлен $c + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle = c + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ является тождественным нулем, и первая часть теоремы доказана.

Пусть множество S лежит на некоторой сфере. Не теряя общности, мы предположим, что это сфера радиуса 1 с центром в начале координат. Будем рассматривать многочлены $F_{\mathbf{u}}$ и многочлены (2) не на всём пространстве $\mathbb{E}^n$, а только на этой сфере. Тогда $x_n^2 = 1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_{n-1}^2$, и потому мы можем исключить многочлен x_n^2 из списка (2). Список (2) теперь состоит из $(n+1)(n+4)/2-1$ многочленов. Сохраняя оставшуюся часть проведенного выше доказательства неизменной, мы получим неравенство $|S| \leqslant C_{n+2}^2 - 1$. $\square$

В работе [10] Лисонек разработал алгоритм для нахождения множеств с двумя расстояниями. Не вдаваясь в детали, отметим, что математической основой алгоритма служат теорема 1 и следующая теорема, доказанная Шёнбергом в 1935 году. Доказательство этой теоремы приведено в классической книге Л. Блюменталя [3].

Теорема 3. *Пусть все диагональные элементы симметрической матрицы $D = [d_{ij}]$ порядка $m \geqslant 2$ равны 0, а все внедиагональные элементы положительны. Зададим симметрическую матрицу $C = [c_{ij}]$ порядка $m-1$ равенствами $c_{ij} = d_{im}^2 + d_{jm}^2 - d_{ij}^2$. Пусть n — число положительных собственных чисел матрицы C с учетом кратностей. Следующие утверждения эквивалентны:*

(а) все собственные числа матрицы C неотрицательны;

(б) n — минимальная размерность евклидова пространства, содержащего такие m точек $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$, что $\|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j\| = d_{ij}$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, m$.

В заключение этого параграфа мы приведем три таблицы (см. с. 161). В первой строке каждой таблицы указана размерность евклидова пространства. Во второй строке для пространства данной размерности дается точная верхняя граница для числа точек в множестве с двумя ненулевыми расстояниями, в равнобедренном множестве и в строго равнобедренном множестве, соответственно. В третьей строке дается число множеств, реализующих эту границу (с точностью до подобия).

Для $n \geqslant 4$ таблица 1 получена в [10], таблица 2 получена автором этой статьи в [6]. Обоснование таблицы 3 дано в §4 настоящей статьи.

§3. Как раскрасить рёбра графа

Напомним, что *полный граф* K_n — это граф с n вершинами, в котором каждая пара вершин соединена одним ребром. Раскраска ребер полного графа — это присвоение каждому ребру некоторого цвета. Раскраска ребер графа в цвета $c_1, c_2, \ldots, c_k$ называется *связной*, если для каждого цвета c_i можно пройти по ребрам этого цвета из любой вершины графа в любую другую вершину. Будем говорить, что вершины u, v, w образуют разноцветный треугольник, если рёбра uv, uw, vw окрашены в три разных цвета. Следующая лемма была доказана в [7]. Мы следуем доказательству, приведенному в [8].

Табл. 1. Множества с двумя ненулевыми расстояниями в $\mathbb{E}^n$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
Максимальное число точек в множестве	3	5	6	10	16	27	29	45
Число множеств с максимальным числом точек	1	1	6	1	1	1	1	$\geqslant 1$

Табл. 2. Равнобедренные множества в $\mathbb{E}^n$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
Максимальное число точек в множестве	3	6	8	11	17	28	30	45
Число множеств с максимальным числом точек	1	1	1	2	1	1	1	$\geqslant 1$

Табл. 3. Строго равнобедренные множества в $\mathbb{E}^n$

n	1	2	3	4	5	6	7	8
Максимальное число точек в множестве	2	6	7	11	17	28	29	45
Число множеств с максимальным числом точек	1	1	∞	2	1	1	∞	$\geqslant 1$

Лемма 1. Пусть рёбра графа K_n раскрашены в k цветов без разноцветных треугольников. Тогда справедливы следующие два утверждения.

(1) Пусть красный — один из данных k цветов и пусть Γ — граф с теми же вершинами, что и K_n, ребрами которого являются в точности все красные рёбра графа K_n. Пусть C_1 и C_2 — различные связные компоненты графа Γ. Тогда все рёбра графа K_n, соединяющие вершины из C_1 с вершинами из C_2, окрашены в один и тот же цвет.

(2) Если $k \geqslant 3$, то данная раскраска в k цветов не является связной.

Доказательство. (1) Пусть z — вершина из C_1 и пусть u, v — две вершины из C_2. В C_2 есть путь, ведущий из u в v, состоящий из красных ребер v_0v_1, v_1v_2, $\ldots$, $v_{m-1}v_m$, где $v_0 = u$, $v_m = v$. Так как вершина z не лежит в C_2, рёбра zv_0, zv_1, $\ldots$, zv_m не могут быть красными. Рассмотрим последовательно треугольники zv_0v_1, zv_1v_2, $\ldots$, $zv_{m-1}v_m$. Так как ни один из них не является разноцветным, мы получим, что рёбра zv_0, zv_1, $\ldots$, zv_m должны быть одного и того же цвета, так что zu и zv — рёбра одного и того же цвета.

(2) При $n \leqslant 3$ это утверждение верно, поскольку K_n либо нельзя раскрасить в $k \geqslant 3$ цветов, либо такая раскраска содержит разноцветный треугольник. Мы продолжим доказательство индукцией по n.

Предположим, что $n \geqslant 4$ и что любая раскраска ребер графа K_{n-1} в $k \geqslant 3$ цветов либо допускает разноцветный треугольник, либо не является связной. Пусть дана связная раскраска ребер графа K_n в $k \geqslant 3$ цветов. Мы докажем, что в графе K_n найдется разноцветный треугольник. Пусть красный, желтый и зеленый — три данных цвета. Перекрасим все рёбра других цветов в зеленый цвет. Мы получим связную раскраску в три цвета, и любой разноцветный треугольник при этой раскраске был разноцветным до перекраски.

Выберем вершину x и рассмотрим граф K_{n-1}, полученный удалением из K_n вершины x и всех выходящих из нее ребер. Если бы в графе K_{n-1} не было ребер какого-нибудь цвета, скажем, красного, то поскольку в K_n можно пройти из x в любую другую вершину по красным ребрам, все рёбра, выходящие из x, были бы красными. Но тогда из x нельзя никуда пройти по желтым (как и по зеленым) ребрам. Следовательно, в раскраске графа K_{n-1} встречаются все три цвета. Любой разноцветный треугольник в графе K_{n-1} является таковым и в K_n. Поэтому предположим, что в графе K_{n-1} нет разноцветных треугольников. В силу индукционного предположения имеющаяся раскраска графа K_{n-1} не является связной.

Пусть, для определенности, не из всякой вершины графа K_{n-1} можно пройти в любую другую вершину по красным ребрам. Обозначим через Γ граф с теми же вершинами, что и K_{n-1}, и с теми и только теми ребрами, которые принадлежат графу K_{n-1} и окрашены в красный цвет. Граф Γ не является связным, так что пусть $C_1, C_2, \ldots, C_\ell$ — его связные компоненты, $\ell \geqslant 2$. В силу утверждения (1) при $i \neq j$ все рёбра, соединяющие вершины компоненты C_i с вершинами компоненты c_j, окрашены в один и тот же (не красный) цвет. Поскольку в графе K_n можно пройти из x в любую другую вершину по красным ребрам, в каждой компоненте C_i есть вершина y_i, соединенная с x красным ребром. Кроме того, в графе K_n есть желтое ребро xu и зеленое ребро xv.

Случай 1. Вершины u и v принадлежат одной и той же компоненте, скажем, C_1.

Так как рёбра uy_2 и vy_2 одного и того же (не красного) цвета, то один из треугольников xuy_2, xvy_2 — разноцветный.

Случай 2. Вершина u принадлежит C_1, вершина v принадлежит C_2.

Если все рёбра между C_1 и C_2 — желтые, то xy_1v — разноцветный треугольник; если все рёбра между C_1 и C_2 — зеленые, то xy_2u — разноцветный треугольник. Лемма доказана. $\square$

В работе [2] Блокхаус применил лемму 1 и получил результат, позволяющий в значительной степени свести поиск максимальных равнобедренных множеств к поиску максимальных множеств с двумя ненулевыми расстояниями.

Теорема 4. Пусть S — конечное равнобедренное множество в $\mathbb{E}^n$ и пусть $\operatorname{dist}(S) \geqslant 3$. Тогда S можно представить в виде объединения непустых непересекающихся подмножеств X и Y таких, что $\dim X \geqslant 1$, $\operatorname{dist}(X) \leqslant 2$ и каждая точка множества Y является центром сферы, содержащей множество X. Более того, аффинные подпространства $\langle X\rangle$ и $\langle Y\rangle$ ортогональны, и потому $\dim X + \dim Y \leqslant \dim S$.

Доказательство. Рассмотрим полный граф $K_{|S|}$, множество вершин которого совпадает с множеством S. Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_k$ — все различные ненулевые расстояния между точками множества S. Выберем k различных цветов $c_1, c_2, \ldots, c_k$ и окрасим ребро uv графа $K_{|S|}$ в цвет c_i в том и только в том случае, если расстояние между точками u и v множества S равно d_i. Так как S — равнобедренное множество, полученная раскраска ребер графа $K_{|S|}$ не содержит разноцветных треугольников. В силу леммы 1 граф Γ, образованный всеми вершинами графа $K_{|S|}$ и всеми ребрами какого-то одного цвета, скажем, красного, не является связным. Так как в графе $K_{|S|}$ есть хотя бы одно красное ребро, в графе Γ есть связная компонента C_1, содержащая не менее двух вершин. Пусть X — подмножество множества S, образованное всеми вершинами компоненты C_1 и пусть $Y = S\setminus X$. Пусть $\mathbf{y} \in Y$. Тогда вершина y принадлежит некоторой связной компоненте $C_2 \neq C_1$ графа Γ, так что в силу леммы 1 все рёбра $\mathbf{xy}$, где $\mathbf{x} \in X$, окрашены в один и тот же цвет. Это означает, что все точки $\mathbf{x} \in X$ находятся на одном и том же расстоянии от точки y, т. е. y — центр сферы, содержащей множество X.

Если $\operatorname{dist}(X) \geqslant 3$, то мы применим к X доказанную часть теоремы и представим X в виде $X = X_1 \cup Y_1$, где $X_i \cap Y_1 = \varnothing$, $|X_1| \geqslant 2$, $Y_1 \neq \varnothing$ и каждая точка $\mathbf{y} \in Y_1$ — центр сферы, содержащей X_1. Тогда $S = X_1 \cup (Y \cup Y_1)$ и каждая точка $\mathbf{y} \in Y \cup Y_1$ — центр сферы, содержащей X_1. При этом $|X_1| < |X|$, так что если с самого начала подмножество X было выбрано с минимальным возможным числом элементов, то $\operatorname{dist}(X) \leqslant 2$.

Так как каждая точка $\mathbf{y} \in Y$ равноудалена от всех точек множества X, то и ортогональная проекция $\mathbf{z}$ точки $\mathbf{y}$ на аффинное подпространство $\langle X\rangle$ равноудалена от всех точек множества X. Так как множество X порождает подпространство $\langle X\rangle$, то в $\langle X\rangle$ есть единственная сфера, содержащая X, и точка $\mathbf{z}$ — центр этой сферы. Так как множество Y порождает подпространство $\langle Y\rangle$, то ортогональная проекция всего подпространства $\langle Y\rangle$ на подпространство $\langle X\rangle$ состоит из единственной точки $\mathbf{z}$, т. е., подпространства $\langle X\rangle$ и $\langle Y\rangle$ ортогональны. $\square$

Применив теоремы 2 и 4, Блокхаус [2] получил оценку числа точек равнобедренного множества, лежащего в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$.

Теорема 5. Пусть $S \subset \mathbb{E}^n$ — равнобедренное множество. Тогда S конечно и $|S| \leqslant C_{n+2}^2$. Более того, если $|S| = C_{n+2}^2$, то либо $\operatorname{dist}(S) \leqslant 2$, либо $S = X \cup \{\mathbf{y}\}$, где $\operatorname{dist}(X) \leqslant 2$ и $\mathbf{y}$ — центр сферы, содержащей X.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2, мы можем с самого начала предположить, что S — конечное множество. Если $|S| \leqslant$ $\leqslant C_{n+2}^2$, то $|S| \leqslant C_{n+2}^2$ в силу теоремы 2. Предположим, $\operatorname{dist}(S) \geqslant 3$, и пусть X и Y — подмножества множества S, удовлетворяющие теореме 4. Мы продолжим доказательство индукцией по n. Теорема выполняется для $n = 1$, так что пусть $n \geqslant 2$ и пусть теорема выполняется для евклидовых пространств размерности меньше n.

Пусть $\dim X = r$, $\dim Y = s$. Тогда $r + s \leqslant \dim S \leqslant n$. Так как $r \geqslant 1$, то $s < n$. Применяя теорему 2 к множеству X, лежащему на сфере (с центром в любой точке множества Y), мы получаем неравенство $|X| \leqslant C_{r+2}^2 - 1$. Если $s = 0$, то пусть $Y = \{\mathbf{y}\}$. Тогда $|S| \leqslant C_{n+2}^2$ и X лежит на сфере с центром $\mathbf{y}$. Если $s \geqslant 1$, мы применим индукционное предположение к множеству Y:

$$|S| = |X| + |Y| \leqslant C_{r+2}^2 + C_{s+2}^2 - 1 < C_{n+2}^2.$$

Действительно, так как $(r+1) + s \leqslant n + 1$, то

$$\begin{aligned} C_{n+2}^2 = (1 + 2 + \cdots + (n+1)) &\geqslant \\ \geqslant (1 + 2 + \cdots + (r+1)) + s(r+1) + (1 + 2 + \cdots + s) &\geqslant \\ \geqslant (1 + 2 + \cdots + (r+1)) + (1 + 2 + \cdots + (s+1)) &= \\ = C_{r+2}^2 + C_{s+2}^2 > C_{r+2}^2 + C_{s+2}^2 - 1&. \end{aligned}$$

□

§4. Максимальные строго равнобедренные множества

В этом параграфе мы найдем точную верхнюю границу для числа точек в строго равнобедренном подмножестве пространства $\mathbb{E}^n$ при $n \leqslant 8$ и найдем все строго равнобедренные множества, реализующие эту границу, при $n \leqslant 6$. Изложение следует, в основном, схеме, развитой в статье [9]. Но прежде нам понадобится еще одно понятие, связанное с раскраской полного графа — на этот раз в два цвета.

Определение. Раскраска полного графа в два цвета, скажем, красный и зеленый, называется *сильно регулярной с параметрами* (v, k, λ, μ), если (1) граф имеет v вершин, (2) из каждой вершины выходит ровно k красных ребер, (3) если вершины x и y соединены красным ребром, то в графе есть ровно λ вершин z таких, что xz и yz — красные рёбра, (4) если вершины x и y соединены зеленым ребром, то в графе есть ровно μ вершин z таких, что xz и yz — красные рёбра. При этом граф Γ, образованный всеми вершинами и всеми красными ребрами полного графа, называют *сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ).

Разумеется, граф Γ', образованный всеми вершинами и всеми зелеными ребрами полного графа, тоже сильно регулярен. Его параметры — $(v, v-k-1, v-2k+\lambda, v-2k+\mu-2)$. Граф Γ' называется *дополнением графа* Γ.

Пример. Граф, образованный вершинами и сторонами правильного пятиугольника, — сильно регулярный с параметрами $(5, 2, 0, 1)$.

Упражнение 6. Проверьте, что каждый из следующих графов сильно регулярен и найдите его параметры.

(а) Граф Петерсена, изображенный на рис. 2.

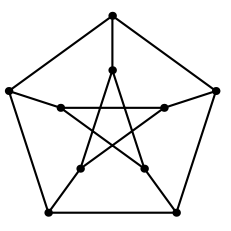

Рис. 2.

(б) Дано натуральное число n. Вершины графа — все точки координатной плоскости с целыми координатами (x, y) такими, что $1 \leqslant x \leqslant n$, $1 \leqslant y \leqslant n$. Две вершины, (x, y) и (u, v), соединены ребром в том и только в том случае, если $x = u$ или $y = v$.

(в) Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Вершины *треугольного графа* $T(n)$ — все двухэлементные подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Две вершины соединены ребром в том и только в том случае, если соответствующие подмножества имеют общий элемент.

(г) Вершины *графа Клебша* — все подмножества множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ с четным числом элементов. Две вершины соединены ребром в том и только в том случае, если симметрическая разность соответствующих подмножеств состоит из четырех элементов.

Следующая лемма будет применяться при решении задачи Эрдёша в пространствах $\mathbb{E}^3$, $\mathbb{E}^4$ и $\mathbb{E}^7$.

Лемма 2. Пусть множество $S \subset \mathbb{E}^n$ таково, что $\operatorname{dist}(S) = 2$ и пусть d — одно из ненулевых расстояний между точками множества S. Образуем полный граф, вершинами которого являются все точки множества S.

Пусть две вершины соединены красным ребром, если расстояние между ними (как точками множества S) равно d, и зеленым ребром в противном случае. Предположим, что полученная раскраска сильно регулярна с параметрами (v, k, λ, n), причем $v \geqslant 2k + 1$. Предположим также, что $\dim S = n - 1$, $\dim(S \setminus \{\mathbf{x}\}) = n - 1$ для любой точки $\mathbf{x} \in S$ и, кроме того, выполняется по крайней мере одно из следующих трех условий:

(1) $v \leqslant 3k - 2\lambda$ и $v \leqslant 3k - 2\mu + 2$;
(2) $v \leqslant 3k - 2\lambda$ и $2k \geqslant 2\mu + n - 1$;
(3) $v \leqslant 3k - 2\mu + 2$ и $2k \geqslant 2\lambda + n + 1$.

Пусть точка $\mathbf{p} \in \mathbb{E}^n$ такова, что $S \cup \{\mathbf{p}\}$ — равнобедренное множество размерности n. Тогда либо $\operatorname{dist}(S \cup \{\mathbf{p}\}) = 2$, либо $\mathbf{p}$ — центр сферы, содержащей множество S.

Доказательство. Неравенство $v \geqslant 2k + 1$ означает, что число зеленых ребер, выходящих из любой вершины данного графа, не меньше числа красных ребер.

Предположим, что $\operatorname{dist}(S \cup \{\mathbf{p}\}) \geqslant 3$. Тогда $S \cup \{\mathbf{p}\} = X \cup Y$, где X и Y удовлетворяют теореме 2. Если $Y = \{\mathbf{p}\}$, то $\mathbf{p}$ — центр сферы, содержащей множество S, так что предположим, что $Y \neq \{\mathbf{p}\}$, т. е., $S \cap Y \neq \varnothing$. Пусть $\mathbf{y} \in S \cap Y$. Определение множества Y означает, что все рёбра, соединяющие $\mathbf{y}$ с точками множества $S \cap X$, — одного цвета, и потому $|S \cap X|$ не превосходит числа зеленых ребер, выходящих из любой вершины графа: $|S \cap X| \leqslant v - k - 1$.

Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in S \cap X$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$. Предположим сначала, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соединены красным ребром. Тогда имеется λ вершин, соединенных как с $\mathbf{a}$, так и с $\mathbf{b}$ красными ребрами, и $v - 2k + \lambda$ вершин, соединенных с $\mathbf{a}$ и с $\mathbf{b}$ зелеными ребрами. Так как каждая вершина $\mathbf{y} \in S \cap Y$ соединена с $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ребрами одного цвета, мы получаем, что $|S \cap Y| \leqslant v - 2k + 2\lambda$. Следовательно, в этом случае $v = |S| = |S \cap X| + |S \cap Y| \leqslant 2v - 3k + 2\lambda - 1$, т. е., $v > 3k - 2\lambda + 1$. Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соединены зеленым ребром, мы получаем аналогично, что $|S \cap Y| \leqslant v - 2k + 2\mu - 2$, $v = |S| \leqslant 2v - 3k + 2\mu - 3$, так что $v \geqslant 3k - 2\mu + 3$. Поэтому, если выполняется условие (1), то между точками множества $S \cap X$ нет ни красных, ни зеленых ребер. Так как $|X| \geqslant 2$, то $|S \cap X| = 1$.

Кроме того, полученные неравенства показывают, что если выполняется условие (2), то никакие две точки множества $S \cap X$ не соединены зеленым ребром, а если выполняется условие (3), то никакие две точки множества $S \cap X$ не соединены красным ребром. В обоих случаях все рёбра между точками множества $S \cap X$ одного и того же цвета, т. е., $\operatorname{dist}(S \cap X) = 1$. Отсюда $|S \cap X| \leqslant \dim(S \cap X) + 1 \leqslant n$ и $|S \cap Y| = v - |S \cap X| \geqslant v - n$. Однако, если точки множества $S \cap X$ соединены красными ребрами, то $v - n \leqslant |S \cap Y| \leqslant v - 2k + 2\lambda$, откуда $2k \leqslant 2\lambda + n$, что противоречит условию (3). Если же точки множества $S \cap X$ соединены зелеными ребрами, то $v - n \leqslant |S \cap Y| \leqslant v - 2k + 2\mu - 2$, и мы получаем противоречие с условием (2).

Итак, множество $S \cap X$ состоит из единственной точки $\mathbf{a}$, т. е., $X = \{\mathbf{a}, \mathbf{p}\}$. Так как каждая точка множества Y равноудалена от $\mathbf{a}$ и $\mathbf{p}$, то множество Y лежит в гиперплоскости π, проходящей через середину отрезка $\mathbf{ap}$ перпендикулярно к этому отрезку. Так как $\dim Y = \dim(S \setminus \{\mathbf{a}\}) = n - 1$, то множество Y порождает π. Так как $\mathbf{a} \notin \pi$, мы получаем $\dim S = n$, что противоречит условию леммы. $\square$

Следствие. Если основание пирамиды — правильный пятиугольник и любые три вершины пирамиды образуют равнобедренный треугольник, то пирамида — правильная.

Доказательство. Пусть S — множество всех вершин основания пирамиды и пусть $\mathbf{p}$ — вершина пирамиды. Тогда $\operatorname{dist}(S) = 2$. Пусть стороны основания окрашены в красный цвет, а диагонали — в зеленый. Полученная раскраска сильно регулярна с параметрами $(5, 2, 0, 1)$, так что мы можем применить лемму 2. Если $\mathbf{p}$ — центр сферы, содержащей основание пирамиды, то ортогональная проекция вершины пирамиды на плоскость основания — центр основания. Если $\operatorname{dist}(S \cup \{\mathbf{p}\} = 2$, то среди пяти боковых ребер пирамиды есть по крайней мере три равных, и мы приходим к тому же заключению.

Упражнение 7. Найдите доказательство этого следствия, не опирающееся на лемму 2 и понятие сильно регулярного графа. Верно ли аналогичное утверждение для треугольной, четырехугольной, шестиугольной пирамиды?

Пусть S — строго равнобедренное множество с максимально возможным числом точек в пространстве $\mathbb{E}^n$, $n \leqslant 7$. Если $\operatorname{dist}(S) = 2$, то S найдено в [10] и число точек множества S указано в таблице 1. Если $\operatorname{dist}(S) \geqslant 3$, то пусть X и Y — подмножества множества S, удовлетворяющие теореме 3.

$$n = 2$$

Множество, состоящее из вершин и центра правильного пятиугольника, — строго равнобедренное, так что $|S| \geqslant 6$. Тогда $\operatorname{dist}(S) \geqslant 3$ (упражнение 3). Если $\dim X = 2$, то $\dim Y = 0$ и $|X| \leqslant 5$. Следовательно, $|X| = 5$, т. е., X — множество всех вершин правильного пятиугольника, а $Y = \{by\}$, где $\mathbf{y}$ — центр пятиугольника. Если $\dim X = 1$, то $\dim Y \leqslant 1$, так что $|X| = 2$, $|Y| \leqslant 2$, $|S| \leqslant 4$.

$n = 3$

Присоединив центр сферы, описанной около правильного икосаэдра, к любой из фигур (1), мы получим четыре строго равнобедренных множества из 7 точек в $\mathbb{E}^3$, так что $|S| \geqslant 7$. Тогда $\operatorname{dist}(S) \geqslant 3$ (см. абзац после следствия 3) и, так как $\operatorname{dist}(X) \leqslant 2$, то $|X| \leqslant 6$. Если $Y = \{\mathbf{y}\}$, то $|X| = 6$, а $\mathbf{y}$ — центр сферы, содержащей X. Если X — множество вершин правильного октаэдра или правильной треугольной призмы с квадратными гранями, то S не является строго равнобедренным, так что S одно из упомянутых выше четырех множеств.

Пусть $\dim Y \neq 0$. Предположим, $\dim X = 2$. Тогда $\dim Y = 1$, $|X| \leqslant 5$, $|Y| = 2$. Следовательно, $|X| = 5$, т. е., X — множество всех вершин правильного пятиугольника. Так как каждая точка множества $Y = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ равноудалена от вершин пятиугольника, то прямая ℓ, содержащая Y, перпендикулярна плоскости пятиугольника и проходит через его центр $\mathbf{c}$. Пусть $\mathbf{w}$ — середина отрезка $\mathbf{uv}$. Пусть $\mathbf{x} \in X$. Если $\mathbf{w} = \mathbf{c}$, то S — строго равнобедренное множество. Если $\mathbf{w} \neq \mathbf{c}$, то $\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| \neq \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|$, так что расстояние между $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ должно быть равно либо расстоянию от $\mathbf{u}$ до точек множества X, либо расстоянию от $\mathbf{v}$ до точек множества X. Таким образом, мы получаем бесконечно много семиточечных строго равнобедренных множеств, выбрав произвольную точку $\mathbf{u}$ на прямой ℓ, произвольную точку $\mathbf{x} \in X$ и затем определив возможные положения точки $\mathbf{v} \in \ell$ так, чтобы $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|$ или $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|$ (рис. 3).

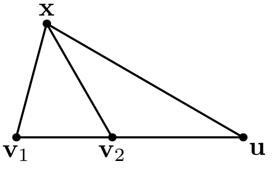

Рис. 3.

Предположим, что $\dim X = 1$. Тогда $|X| = 2$ и $\dim Y \leqslant 2$, так что $|Y| \leqslant 6$. Если $|Y| = 6$, то Y состоит из вершин и центра правильного пятиугольника, а X лежит на прямой, перпендикулярной плоскости пятиугольника. Точка множества X, не лежащая в плоскости пятиугольника, и вершины пятиугольника образуют пирамиду, удовлетворяющую следствию леммы 2. Следовательно, обе точки множества X и центр пятиугольника лежат на одной пряной, т. е., множество S не является строго равнобедренным. Пусть $|Y| = 5$. Если $\operatorname{dist}(Y) = 2$, то Y — множество вершин правильного пятиугольника, так что мы опять применяем следствие леммы 2, откуда S — ранее полученное множество из семи точек. Если $\operatorname{dist}(Y) \geqslant 3$, то мы применяем теорему 3 к множеству Y. Однако, если

$Y = X_1 \cup Y_1$ и $\dim X_1 + \dim Y_1 \leqslant 2$, то $|Y| \leqslant 4$. Таким образом, мы нашли все строго равнобедренные множества из семи точек в $\mathbb{E}^3$.

$n = 4$

Как установлено в работе [10], если $S \subset \mathbb{E}^4$ и $\operatorname{dist}(S) = 2$, то $|S| \leqslant 10$, и множество Λ_4 (см. упражнение 2) — это единственное (с точностью до подобия) множество из 10 точек с двумя ненулевыми расстояниями в $\mathbb{E}^4$. Присоединив к этому множеству центр описанной сферы $(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5})$, мы получим строго равнобедренное множество из 11 точек.

Пусть S — произвольное строго равнобедренное множество в $\mathbb{E}^4$ и пусть $|S| \geqslant 11$. Тогда $\operatorname{dist}(S) \geqslant 3$ и мы применяем теорему 2. Если $\dim X = 4$, то $\dim Y = 0$. Следовательно, $|X| = 10$ и $|Y| = 1$. Так как $\operatorname{dist}(X) = 2$, то S — множество из 11 точек, которое мы только что описали.

Если $\dim X = 3$, то $\dim Y \leqslant 1$, так что $|X| \leqslant 5$, $|Y| \leqslant 2$, $|S| \leqslant 7$.

Если $\dim X = 1$, то $\dim Y \leqslant 3$, $|X| = 2$, $|Y| \leqslant 7$, $|S| \leqslant 9$.

Пусть $\dim X = 2$. Тогда $\dim Y \leqslant 2$, $|X| \leqslant 5$, $|Y| \leqslant 6$. Так как $|S| \geqslant 11$, мы получаем, что X состоит из вершин правильного пятиугольника, а Y состоит из вершин и центра другого правильного пятиугольника, причем плоскости пятиугольников ортогональны. Применяя следствие леммы 2 к произвольной вершине первого пятиугольника и к множеству всех вершин второго пятиугольника, мы получаем, что ортогональная проекция всех вершин и, следовательно, плоскости первого пятиугольника на плоскость второго пятиугольника — центр второго пятиугольника. Отсюда следует, что пятиугольники имеют общий центр. Так как треугольник, образованный вершиной первого пятиугольника, вершиной второго пятиугольника и их общим центром, должен быть равнобедренным, то пятиугольники конгруэнтны. Таким образом, мы получили второй пример строго равнобедренного множества из 11 точек в $\mathbb{E}^4$ — вершины и общий центр двух конгруэнтных правильных пятиугольников, лежащих в ортогональных плоскостях.

$n = 5$

В работе [10] установлено, что если $S \subset \mathbb{E}^5$ и $\operatorname{dist}(S) = 2$, то $|S| \leqslant 16$; при этом $|S| = 16$ в том и только в том случае, если S — множество из 16 вершин пятимерного куба, никакие две из которых не являются концами одного ребра куба. С точностью до подобия множество S может быть представлено как множество всех точек, у которых каждая координата равна 0 или 1 и сумма всех координат четна. Присоединив к множеству S точку $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ — центр куба, мы получим строго равнобедренное множество из 17 точек. Заметим, что граф Γ, вершинами которого являются точки множества S и две вершины соединены ребром в том и только в том случае, если расстояние между ними (как точками множества S) равно 2, — это сильно регулярный граф Клебша (см. упражнение 6(г)).

Если $S \subset \mathbb{E}^5$ — строго равнобедренное множество и $\operatorname{dist}(S) \geqslant 3$, мы применяем теорему 2. Если $\dim X = 5$, мы получаем описанную выше конфигурацию. Если $\dim X = 4, 3, 2, 1$, то $|S|$ не превосходит $10+2$, $6+6$, $5+7$, $2+11$, соответственно, так что $|S| \leqslant 17$.

$$n = 6$$

Согласно [10], наибольшее множество с двумя расстояниями в $\mathbb{E}^6$ состоит из 27 точек и единственно. Это множество может быть представлено как следующее подмножество пространства $\mathbb{E}^8$:

$$T = \{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i : 1 \leqslant i \leqslant 6\} \cup \{\mathbf{c}_{ij} : 1 \leqslant i < j \leqslant 6\},$$

где у точки $\mathbf{a}_i$ i-тая и седьмая координаты равны 2, а остальные шесть координат равны 0, у точки $\mathbf{b}_i$ i-тая и восьмая координаты равны 2, а остальные шесть координат равны 0, у точки c_{ij} i-тая и j-тая координаты равны -1, а остальные шесть координат равны 1. Поскольку все 27 точек лежат в гиперплоскостях $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 2$ и $x_7 + x_8 = 2$, множество T лежит в шестимерном евклидовом пространстве.

Упражнение 8. (а) Проверьте, что расстояние между любыми двумя точками множества T равно 4 или $\sqrt{8}$.

(б) Проверьте, что T лежит на сфере радиуса $4/\sqrt{3}$ с центром $\mathbf{q} = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 1)$ и что $\mathbf{q} \in \langle T \rangle$.

(в) Пусть вершинами полного графа являются точки множества T, причем две вершины соединены красным ребром, если расстояние между ними равно 4, и зеленым ребром, если расстояние между ними равно $\sqrt{8}$. Проверьте, что эта раскраска — сильно регулярная с параметрами $(27, 10, 1, 5)$. Соответствующий сильно регулярный граф называется *графом Шлефли.*

Нетрудно проверить, что множество $T \cup \{\mathbf{q}\}$ является строго равнобедренным. Если S — произвольное строго равнобедренное множество в $\mathbb{E}^6$ и $|S| \geqslant 28$, то $\operatorname{dist}(S) \geqslant 3$, и мы применяем теорему 2. Если $\dim X = 6$, мы получаем описанное множество из 28 точек. Если $\dim X = 5, 4, 3, 2, 1$, то $|S|$ не превосходит $16+2$, $10+6$, $6+7$, $5+11$, $2+17$, соответственно, так что $|S| \leqslant 28$.

$$n = 7$$

Наибольшее (и единственное с точностью до подобия) множество с двумя расстояниями в $\mathbb{E}^7$, состоит, согласно [10], из следующих 29 точек пространства $\mathbb{E}^8$:

семь точек, у которых восьмая и еще какая-нибудь координата равны -1, а остальные шесть координат равны 1; 21 точка, у которых две из первых семи координат равны 2, а остальные шесть координат равны 0; точка $(1,1,1,1,1,1,1,-3)$.

Все эти точки лежат в гиперплоскости $x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 4$, т. е., в семимерном евклидовом пространстве.

Упражнение 9. Проверьте, что расстояние между любыми двумя из указанных 29 точек равно 4 или $2\sqrt{2}$. Докажите, что данные 29 точек не лежат на одной сфере.

Данное множество из 29 точек является строго равнобедренным, но оно не пригодно для получения большего равнобедренного множества. Если мы присоединим к множеству Λ_7 (см. упражнение 2) центр описанной сферы, мы получим другое строго равнобедренное множество из 29 точек. Кроме того, если мы выберем в какой-нибудь гиперплоскости π единственное множество T из 27 точек с двумя расстояниями (см. случай $n = 6$), то это множество лежит на сфере с центром в точке $\mathbf{q} \in \pi$, и потому, присоединив к $\mathbf{q}$ одну из точек пересечения этой сферы и прямой ℓ, проходящей через $\mathbf{q}$ и ортогональной гиперплоскости π, мы снова получим строго равнобедренное множество из 29 точек в $\mathbb{E}^7$. Более того, мы можем получить бесконечно много строго равнобедренных множеств из 29 точек вида $S \cup \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, где $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \ell$ выбраны так, что расстояние между $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ равно расстоянию между одной из этих точек и любой точкой множества T (рис. 3). Мы теперь докажем, что в $\mathbb{E}^7$ не существует строго равнобедренного множества из 30 точек.

Пусть $S \subset \mathbb{E}^7$ — строго равнобедренное множество и пусть $|S| = 30$. Тогда $\operatorname{dist}(S) \geqslant 3$, и мы, как всегда, применяем теорему 2. Если $\dim X = 7$, то $|Y| = 1$, так что $|X| = 29$. Однако, единственное множество с двумя расстояниями из 29 точек в $\mathbb{E}^7$ не лежит на сфере. Если $\dim X = 6, 5, 4, 3, 2$, то $\dim Y \leqslant 1, 2, 3, 4, 5$, соответственно, и тогда $|S| \leqslant 27 + 2$, $16 + 6$, $10 + 8$, $6 + 11$, $5 + 17$, так что $|S| < 30$.

Пусть $\dim X = 1$, $\dim Y = 6$, так что $|X| = 2$, $|Y| = 28$. Мы можем предположить, что множество S лежит в $\mathbb{E}^8$ и при этом $Y = T \cup \{\mathbf{q}\}$, где множество T и точка $\mathbf{q}$ те же, что и в случае $n = 6$. Пусть $\pi = \langle T \rangle = \langle Y \rangle$. Тогда $\dim \pi = 6$. Так как множество с двумя расстояниями в пятимерном евклидовом пространстве состоит не более чем из 16 точек, любые 17 точек множества T порождают π. Рассмотрим полный граф, вершины которого — точки множества T, а рёбра раскрашены, как указано в упражнении 8(в). Мы можем применить лемму 2, где $\mathbf{p}$ — точка множества X, не лежащая в π.

Если $\mathbf{p}$ — центр сферы, содержащий множество T, то ортогональная проекция точки $\mathbf{p}$ на подпространство π — точка $\mathbf{q}$, и тогда две точки множества X и точка $\mathbf{q}$ лежат на одной прямой.

Предположим теперь, что $\operatorname{dist}(T \cup \mathbf{p}) = 2$. Если мы покажем, что точка $\mathbf{p}$ равноудалена от 17 точек множества S, то ортогональная проекция $\mathbf{p}$ на подпространство π — точка $\mathbf{q}$, и мы опять получим что три точки множества T лежат на одной прямой.

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_8)$. Применяя описание точек $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{c}_{ij}$, данное в случае $n = 6$, мы получим, что для любых четырех различных индексов $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}-\mathbf{a}_i\| = \|\mathbf{p}-\mathbf{a}_j\| \quad &\Leftrightarrow \quad \|\mathbf{p}-\mathbf{b}_i\| = \|\mathbf{p}=\mathbf{b}_j\| \quad \Leftrightarrow \quad p_i = p_j, \\ \|\mathbf{p}-\mathbf{a}_i\| < \|\mathbf{p}-\mathbf{a}_j\| \quad &\Leftrightarrow \quad \|\mathbf{p}-\mathbf{b}_i\| < \|\mathbf{p}=\mathbf{b}_j\| \quad \Leftrightarrow \quad p_i = p_j + 2; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}-\mathbf{a}_i\| = \|\mathbf{p}-\mathbf{a}_i\| \quad &\Leftrightarrow \quad p_7 = p_8, \\ \|\mathbf{p}-\mathbf{a}_i\| < \|\mathbf{p}-\mathbf{a}_i\| \quad &\Leftrightarrow \quad p_7 = p_8 + 2, \\ \|\mathbf{p}-\mathbf{a}_i\| > \|\mathbf{p}-\mathbf{a}_i\| \quad &\Leftrightarrow \quad p_7 = p_8 - 2; \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}-\mathbf{c}_{ij}\| = \|\mathbf{p}-\mathbf{c}_{ik}\| \quad &\Leftrightarrow \quad p_j = p_k, \\ \|\mathbf{p}-\mathbf{c}_{ij}\| > \|\mathbf{p}-\mathbf{c}_{ik}\| \quad &\Leftrightarrow \quad p_j = p_k + 2; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}-\mathbf{c}_{ij}\| = \|\mathbf{p}-\mathbf{c}_{kl}\| \quad &\Leftrightarrow \quad p_i + p_j = p_k + p_l, \\ \|\mathbf{p}-\mathbf{c}_{ij}\| > \|\mathbf{p}-\mathbf{c}_{kl}\| \quad &\Leftrightarrow \quad p_i + p_j = p_k + p_l + 2. \end{aligned} \tag{9}$$

Так как среди расстояний $\|\mathbf{p}-\mathbf{a}_i\|$ есть не более двух различных, из (6) следует, что среди первых шести координат точки $\mathbf{p}$ есть не более двух различных. Если первые шесть координат точки $\mathbf{p}$ равны друг другу, то из (6) и (8) следует, что точка $\mathbf{p}$ равноудалена от по крайней мере 21 точки множества S. Поэтому предположим, что среди первых шести координат точки $\mathbf{p}$ встречаются ровно два разных значения. Тогда из (9) следует, что одно из этих значений встречается только один раз, а из (6) следует, что $p_7 = p_8$. Пусть $p_2 = p_3 = p_4 = P_5 = p_6$. Тогда точка $\mathbf{p}$ равноудалена от 10 точек $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$, $2 \leqslant i \leqslant 6$. Нетрудно проверить, что подпространство $\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6 \rangle$ является пересечением гиперплоскостей $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$, $x_7 + x_8 = 2$ и $x_1 = 0$. Так как ни одна из точек $\mathbf{c}_{ij}$ не лежит в гиперплоскости $x_1 = 0$, то 10 точек $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$, $2 \leqslant i \leqslant 6$, и любая из точек $\mathbf{c}_{ij}$ порождают π.

Таким образом, $\mathbb{E}^7$ не содержит строго равнобедренных множеств из 30 точек.

$$n = 8$$

В работе [10] найдено множество $S \subset \mathbb{E}^9$, состоящее из 9 точек, у которых восемь координат равны $\frac{1}{3}$ и одна координата равна $-\frac{2}{3}$, и 36 точек с двумя координатами, равными 1, и семью координатами, равными 0. Расстояние между любыми двумя из этих 45 точек равно 2 или $\sqrt{2}$, и все они лежат в гиперплоскости $x_1 + x_2 + \cdots + x_9 = 2$, т. е. в восьмимерном евклидовом пространстве. Поскольку $|S| = C_{10}^2$, это наибольшее возможное равнобедренное и строго равнобедренное множество в $\mathbb{E}^8$.

§5. Задача Эрдёша в других пространствах

Определение равнобедренного множества имеет смысл в любом метрическом пространстве. Теорема 4 (в части, не касающейся ортогональности и размерности) тоже справедлива в любом метрическом пространстве. Мы рассмотрим три примера. В первом примере задача Эрдёша рассматривается во всей полноте, в двух других примерах получена оценка числа точек в множестве с двумя расстояниями, что открывает возможности для исследования равнобедренных множеств в этих пространствах.

1. Бинарное пространство Хэмминга

Бинарное пространство Хэмминга размерности n — это множество H_n всех последовательностей $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_i \in \{0, 1\}$. Расстояние $h(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ между точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n$ пространства H_n определяется как число индексов i, для которых $a_i \neq b_i$. Пространство H_n естественно интерпретировать как множество вершин единичного куба в $\mathbb{E}^n$. Поскольку расстояние между двумя точками пространства H_n равно квадрату евклидова расстояния между этими точками как вершинами куба, равнобедренное множество в H_n является строго равнобедренным множеством в $\mathbb{E}^n$ (никакие три вершины куба не лежат на одной прямой). Перечислим кратко основные результаты, касающиеся задачи Эрдёша в пространстве H_n. Доказательства и ссылки даны в работе [6].

Пусть S — равнобедренное множество в H_n.

(a) Если $\operatorname{dist}(S) = 1$, то $|S| \leqslant n+1$. При этом равенство возможно в том и только в том случае, если существует матрица Адамара порядка $n+1$. Матрица Адамара — это квадратная матрица с попарно ортогональными строками, все элементы которой равны ± 1. Легко доказать, что порядок матрицы Адамара делится на 4 (или равен 1 или 2). В 1893 году Жак Адамар предположил, что для любого натурального n существует матрица Адамара порядка $4n$. Предположение Адамара до сих пор не доказано и не опровергнуто. Наименьшее значение n, для которого существование матрицы Адамара порядка n остается открытым — 668.

(б) Если $\mathrm{dist}(S) = 2$, то $|S| \leqslant 1 + C^2_{n+1}$. При этом равенство имеет место в том и только в том случае, если (1) $n = 2$ и $S = H_2$ или (2) $n = 5$ и S — множество из 16 вершин пятимерного куба, никакие две из которых не принадлежат одному ребру.

(в) Если $\mathrm{dist}(S) = 2$ и множество S, рассматриваемое как подмножество пространства $\mathbb{E}^n$, лежит в какой-нибудь гиперплоскости, то $|S| \leqslant C^2_n$. Пусть $S = \{\mathbf{x} \in H_n : h(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = 2\}$. Тогда $\mathrm{dist}(S) \leqslant 2$, $|S| = C^2_n$ и S лежит в гиперплоскости $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 2$.

(г) Если $\mathrm{dist}(S) \geqslant 3$, то $|S| \leqslant 1 + C^2_n$. Пусть $\mathbf{u} = (1, 1, \ldots, 1)$ и пусть $S = \{\mathbf{u}\} \cup \{\mathbf{x} \in H_n : h(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = 2\}$. Тогда S — равнобедренное множество и $|S| = 1 + C^2_n$; если $n \geqslant 5$ и $n \neq 6$, то $\mathrm{dist}(S) \geqslant 3$.

(д) Если $n = 6$ и $\mathrm{dist}(S) \geqslant 3$, то $|S| \leqslant 12$; если $n \leqslant 4$, то $\mathrm{dist}(S) \leqslant 2$.

2. Сферическое пространство

Сферическое пространство $\mathbb{S}^n$ — это множество всех точек $\mathbf{u} \in \mathbb{E}^{n+1}$ таких, что $\|\mathbf{u}\| = 1$. Расстояние между точками $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}^n$ определяется как $\arccos(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)$.

Пусть S — множество в $\mathbb{S}^n$ с двумя ненулевыми расстояниями, α и β. Мусин [11] доказал, что если $\cos\alpha + \cos\beta \geqslant 0$, то $|S| \leqslant C^2_{n+1}$. Если $n \geqslant 7$ и $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\Lambda_n$ (см. упражнение 2), то $\cos\alpha + \cos\beta \geqslant 0$ и $|S| = C^2_{n+1}$. Если $\cos\alpha + \cos\beta < 0$ то, как показано в [11], $|S| < C^2_{n+1}$ при $7 \leqslant n \leqslant 39$, исключая $n = 22$ и $n = 23$.

3. Гиперболическое пространство

Гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$ — это множество всех точек $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{E}^{n+1}$ таких, что $u_0^2 - u_1^2 - \cdots - u_n^2 = 1$. Расстояние между точками $\mathbf{u}$ и $v = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ определяется как $\mathrm{arcch}(u_0v_0 - u_1v_1 - \ldots - u_nv_n)$. Как показано в [2], если $S \subset \mathbb{H}^n$, $\mathrm{dist}(S) = s$, то $|S| \leqslant C^s_{n+s}$. Для каждого $n \geqslant 10$ Лисонек [10] приводит пример множества $s \subset \mathbb{H}^n$, такого, что $\mathrm{dist}(S) = 2$ и $|S| = C^2_{n+2}$.

Список литературы

[1] Bannai Ei., Bannai Et., Stanton D. *An upper bound for the cardinality of an s-distance set in real Euclidean space*, II // Combinatorica. Vol. 3, 1983. P. 147–152.

[2] Blokhuis A. *Few-distance sets.* CWI Tract. 7, 1984. P. 1–70.

[3] Blumenthal L. M. *Theory and Applications of Distance Geometry.* Oxford, 1953.

[4] Croft H. T. 9-*point and* 7-*point configurations in* 3-*space* // Proc. London Math. Soc. Vol. s3–12, issue 1, 1962. P. 400–424.

[5] Einhorn S. J., Schoenberg I. J. *On Euclidean sets having only two distances between points* // Indagationes Mathematicae. Vol. 28, 1966. P. 479–504.

[6] Ionin Y. J. *Isosceles sets* // The Electronic Journal of Combinatorics. Vol. 16, 2009, R 141. `www.combinatorics.org`.

[7] Kelly L. M. *E 735* // The American Mathematical Monthly. Vol. 54, 1947. P. 227–229.

[8] Kido H. *Classification of isosceles eight-point sets in three-dimensional Euclidean space* // Europ. J. Combin. Vol. 27, 2006. P. 329–341.

[9] Larman D. G., Rogers C. A., Seidel J. J. *On two-distance sets in Euclidean space* // Bull. London Math. Soc. Vol. 9, 1977. P. 261–267.

[10] Lisonek P. *New maximal two-distance sets* // J. Combin. Theory Ser. A. Vol. 77, 1997. P. 318–338.

[11] Musin O. R. *Spherical two-distance sets* // J. Combin. Theory Ser. A. Vol. 116, 2009. P. 988–995.

Ю. И. Ионин, Central Michigan University, USA