Одна геометрическая задача, приводящая к биллиардному закону отражения

Г. А. Гальперин А. Ю. Плахов

Следующее геометрическое утверждение играет важную роль в задачах ньютоновской аэродинамики [2, 3]. Оно позволяет строить «невидимые объекты» типа криволинейного треугольника ABC, изображенного на рис. 4 в конце настоящей статьи. Цель настоящей заметки — доказательство этого утверждения.

Теорема. *Пусть F_1F_2C — прямоугольный треугольник с вершиной прямого угла в F_2, $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ — софокусные, с фокусами в точках F_1 и F_2, эллипс и гипербола, проходящие через точку C. (Мы рассматриваем только ту ветвь гиперболы $\mathcal{H}$, которая содержит C.) Рассмотрим луч с вершиной в точке F_1, пересекающий эллипс $\mathcal{E}$ и ветвь гиперболы $\mathcal{H}$ в некоторых точках A и B. Тогда отрезок F_2C образует равные углы с отрезками F_2A и F_2B: $\alpha = \beta$ (см. рис. 1).*

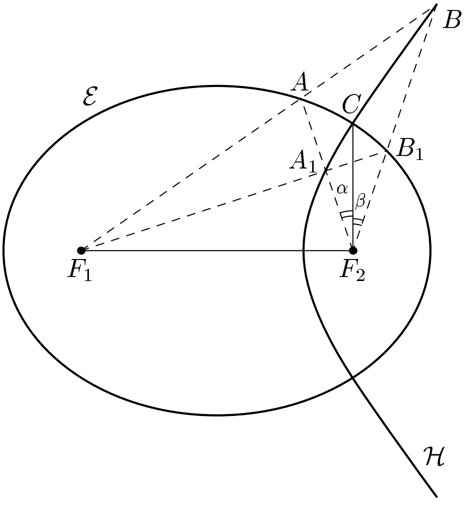

Рис. 1. $\alpha = \beta$

Отметим следующее свойство, вытекающее непосредственно из нашей теоремы.

Следствие. *Пусть A_1 — точка пересечения луча F_2A с ветвью гиперболы $\mathcal{H}$ и пусть луч F_1A_1 пересекает эллипс в точке B_1 (рис. 1). Тогда, согласно теореме, точки B, B_1 и F_2 лежат на одной прямой. Иными словами, тройки точек F_1AB, $F_1A_1B_1$, F_2A_1A и F_2B_1B коллинеарны.*

Доказательство теоремы использует следующее характеристическое свойство биссектрисы треугольника.

Лемма. *Рассмотрим треугольник ABC и отрезок BD, соединяющий вершину B с точкой D, лежащей на противолежащей стороне AC. Обозначим $a_1 = AB$, $a_2 = BC$, $b_1 = AD$, $b_2 = DC$ и $f = BD$ (см. рис. 2). Отрезок BD является биссектрисой угла B тогда и только тогда, когда $(a_1 + b_1)(a_2 - b_2) = f^2$.*

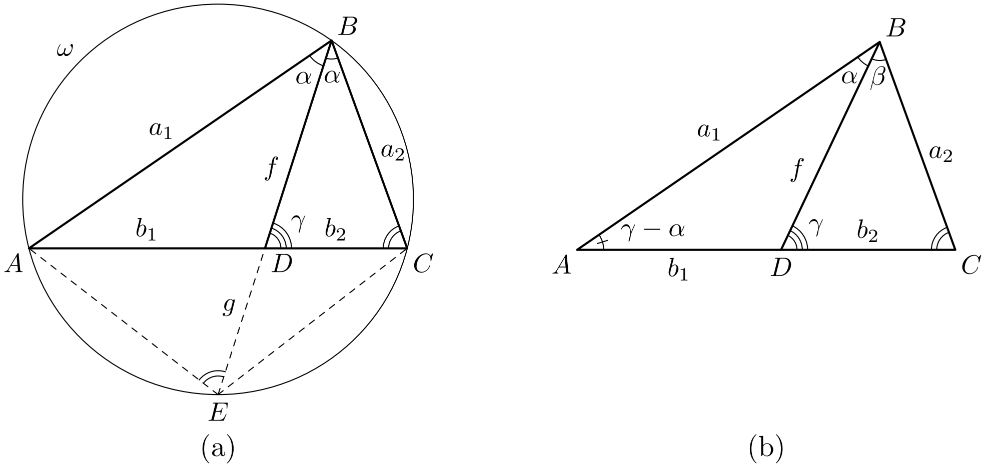

Рис. 2. Доказательство прямого (a) и обратного (b) утверждения о биссектрисе

Доказательство. Пусть $f = BD$ есть биссектриса угла B, проведенная к стороне AC. Докажем следующие три соотношения на величины a_1, a_2, b_1, b_2 и f:

1. $a_1/a_2 = b_1/b_2$;

2. $a_1a_2 - b_1b_2 = f^2$;

3. $(a_1 + b_1)(a_2 - b_2) = f^2$.

Равенства 1 и 2 хорошо известны; каждое из них также является характеристическим свойством биссектрисы треугольника.

Первое свойство вытекает из сравнения площадей:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{1}{2}a_1 f \sin\alpha}{\frac{1}{2}a_2 f \sin\alpha} = \frac{S_{ABD}}{S_{BCD}} = \frac{\frac{1}{2}b_1 h}{\frac{1}{2}b_2 h} = \frac{b_1}{b_2}\,, \tag{1}$$

где $\alpha = \measuredangle ABD = \measuredangle CBD$, а h — высота, опущенная из вершины B на сторону AC.

Второе свойство биссектрисы основывается на понятии «степени» точки относительно окружности. Опишем окружность ω вокруг треугольника ABC. *Степенью точки* D внутри окружности ω называется произведение длин отрезков любой хорды, проходящей через D, на которую D делит эту хорду (все такие произведения одинаковы для данной точки D). Обозначив $DE = g$, получаем для точки D: $b_1 b_2 = fg$ (рис. 2).

Заметим, что $\triangle ABE$ подобен $\triangle DBC$ по двум углам:

$$\measuredangle ABE = \measuredangle DBC = \alpha \quad \text{и} \quad \measuredangle AEB = \measuredangle ACB = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{AB}\,.$$

Поэтому

$$\frac{a_1}{f+g} = \frac{f}{a_2}\,,$$

откуда

$$a_1 a_2 = f^2 + fg \quad \Rightarrow \quad f^2 = a_1 a_2 - fg = a_1 a_2 - b_1 b_2,$$

что и требовалось.

Приступим к доказательству того, что для биссектрисы f выполняется равенство 3, и обратно, отрезок BD, удовлетворяющий этому равенству, является биссектрисой. Отметим, что нам неизвестны какие-либо упоминания в литературе об этом свойстве.

Легко видеть, что алгебраические соотношения 1, 2 и 3 являются «линейно зависимыми»: из любых двух следует третье. Тем самым из свойств биссектрисы 1, 2 немедленно вытекает прямое утверждение: биссектриса f удовлетворяет условию 3.

Вывод обратного утверждения требует применения теоремы синусов и некоторой тригонометрии. Обозначим $\alpha = \measuredangle ABD$, $\beta = \measuredangle CBD$ и $\gamma = \measuredangle BDC$ (см. рис. 2(b)). Наша цель — доказать равенство $\alpha = \beta$. Применяя теорему синусов к $\triangle ABD$, имеем

$$\frac{a_1}{\sin\gamma} = \frac{b_1}{\sin\alpha} = \frac{f}{\sin(\gamma-\alpha)}\,,$$

а применяя теорему синусов к $\triangle BDC$, имеем

$$\frac{a_2}{\sin\gamma} = \frac{b_2}{\sin\beta} = \frac{f}{\sin(\gamma+\beta)}\,.$$

Отсюда находим

$$a_1 + b_1 = \frac{f}{\sin(\gamma-\alpha)}(\sin\gamma + \sin\alpha) = f\frac{\sin\dfrac{\gamma+\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2}}\,,$$

$$a_2 - b_2 = \frac{f}{\sin(\gamma+\beta)}(\sin\gamma - \sin\beta) = f\frac{\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma+\beta}{2}}\,,$$

и, применяя условие 3, получаем

$$f^2\,\frac{\sin\dfrac{\gamma+\alpha}{2}\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\sin\dfrac{\gamma+\beta}{2}} = f^2,$$

откуда

$$\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2} = \sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\,,$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\left(\gamma + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\left(\gamma - \frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

$$\cos\left(\gamma + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\left(\gamma - \frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Из последнего равенства и условий $0 < \alpha,\ \beta,\ \gamma < \pi$ следует, что $\alpha = \beta$, что и требовалось доказать.

Теперь приступим к доказательству теоремы.

Продлим отрезок BF_2 до второго пересечения с эллипсом в некоторой точке A'. Обозначим

$$f = F_1F_2,\ c = F_2C,\ a_1 = F_1A',\ b_1 = F_2A',\ a_2 = F_1B \text{ и } b_2 = F_2B$$

(см. рис. 3). Обозначим C' вторую точку пересечения эллипса с ветвью гиперболы $\mathcal{H}$. В силу фокального свойства эллипса выполнено равенство

$$F_1A' + F_2A' = F_1C' + F_2C',$$

то есть

$$a_1 + b_1 = \sqrt{f^2 + c^2} + c. \qquad (2)$$

Далее, в силу фокального свойства гиперболы имеем

$$F_1B - F_2B = F_1C - F_2C,$$

то есть

$$a_2 - b_2 = \sqrt{f^2 + c^2} - c. \qquad (3)$$

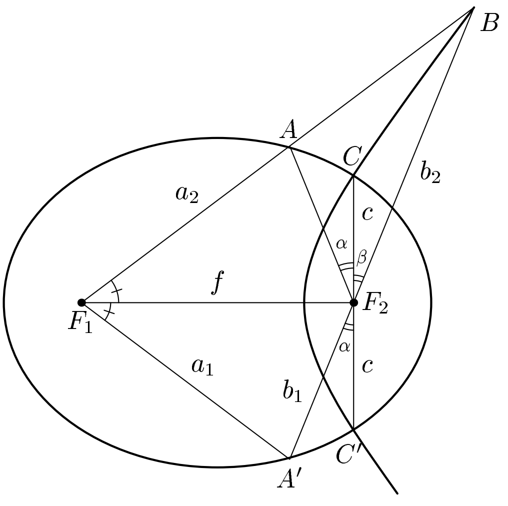

Рис. 3. Вспомогательное построение

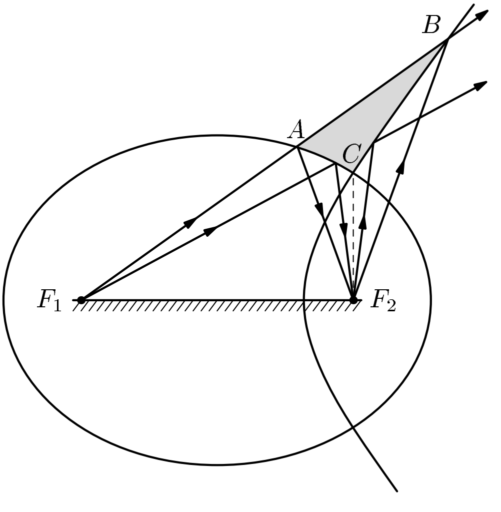

Рис. 4. Криволинейный треугольник ABC невидим из фокуса F_1: все выходящие из F_1 световые лучи огибают препятствие ACB так, как если бы его не было вовсе

Перемножая левые и правые части (2) и (3),получаем

$$(a_1 + b_1)(a_2 - b_2) = f^2,$$

и с учетом леммы заключаем, что F_1F_2 — биссектриса угла F_1 треугольника $A'F_1B$. Это, в свою очередь, означает, что точка A' симметрична A относительно прямой F_1F_2, и в силу симметрии имеем

$$\measuredangle AF_2C = \measuredangle A'F_2C'. \tag{4}$$

С другой стороны, углы $\measuredangle BF_2C$ и $\measuredangle A'F_2C'$ вертикальны, а значит, равны:

$$\measuredangle BF_2C = \measuredangle A'F_2C'. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что

$$\measuredangle AF_2C = \measuredangle BF_2C,$$

то есть $\alpha = \beta$. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Гальперин Г. А. *Биллиардная формула, измеряющая расстояния в многомерном пространстве Лобачевского* // Математическое просвещение. Серия 3, вып. 8, 2004. С. 93–112.

[2] Плахов А. Ю. *Рассеяние в биллиардах и задачи ньютоновской аэродинамики* // Успехи математических наук. Т. 64, 2009. С. 97–166.

[3] Aleksenko A., Plakhov A. *Bodies of zero resistance and bodies invisible in one direction* // Nonlinearity. Vol. 22, 2009. P. 1247–1258.

Г. А. Гальперин, Eastern Illinois University, USA
E-mail: `ggalperin@eiu.edu`
А. Ю. Плахов, Aveiro University, Portugal
E-mail: `plakhov@ua.pt`