По мотивам задачника «Математического просвещения»

Решение задачи про вписывание пятиугольника

Р. Н. Карасёв*

Теорема. *Во всякое выпуклое тело K в $\mathbb{R}^3$ можно вписать плоский правильный пятиугольник, плоскость которого проходит через любую наперёд заданную точку $a \in \operatorname{int} K$.*

Из этой теоремы следует решение задачи 3.9 задачника «Математического просвещения» (формулировку см. в вып. 8, с. 247).

План доказательства взят из статьи В. В. Макеева [1]. Оно основано на применении некоторого обобщения теоремы Борсука – Улама [4]. Однако для понимания доказательства достаточно владеть программой первого семестра университета, не нужно знать ни формулировки этой теоремы, ни слов «степень отображения», «эквивариантные отображения». Новые объекты появляются только в конце (при доказательстве факта 2) и в тех простейших частных случаях, в которых они используются (ср. [2]).

В создании текста также принимали участие Илья Богданов и Аркадий Скопенков.

Доказательство теоремы для гладкого строго выпуклого[1)] *тела K.* Будем считать, что точка $a \in K$ (через которую должна пройти точка пятиугольника по условию задачи) — это начало координат. Рассмотрим в плоскости $x0y$ правильный пятиугольник, составленный из упорядоченных против часовой стрелки единичных векторов $e_1, \ldots, e_5$, первый из которых является направляющим вектором оси $0x$.

---

*Работа выполнена при частичной поддержке фонда «Династия», гранта Президента РФ МК-113.2010.1, грантов РФФИ 10–01–00096 и 10–01–00139, АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/500, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры иннновационной России» на 2009–2013 годы

1) Это ограничение техническое, почти всё доказательство можно понять и проверить, не зная, что такое гладкость и строгая выпуклость.

Доказательство проведём от противного — предположим что требуемых вписанных пятиугольников нет. Неформально говоря, начало доказательства — попытка вписать в K пятиугольник с центром в начале координат. Для $i = 1, 2, 3, 4, 5$ и вращения ρ трёхмерного пространства $\mathbb{R}^3$, ось которого проходит через начало координат, обозначим

$$h_i(\rho) := \max\{s : s\rho(e_i) \in K\}.$$

Иначе говоря, $h_i(\rho)$ — длина отрезка, высекаемого телом K на луче, выходящем из начала координат в направлении $\rho(e_i)$. Поскольку мы предполагаем отсутствие вписанных пятиугольников, то числа $h_1(\rho), \ldots, h_5(\rho)$ никогда не равны. Положим $\sigma(\rho) := \frac{1}{5}(h_1(\rho) + \cdots + h_5(\rho))$. Обозначим через $SO(3)$ множество вращений трёхмерного пространства, оси которых проходят через начало координат. Определим отображение

$$g\colon SO(3) \to \mathbb{R}^4 \quad \text{формулой } g(\rho) := (h_1(\rho) - \sigma(\rho), \ldots, h_4(\rho) - \sigma(\rho)).$$

Можно было бы добавить к этому отображению пятую координату $h_5(\rho) - \sigma(\rho)$, но она зависит от первых четырёх — ведь сумма всех пяти координат будет равна нулю.

Ясно, что отсутствие вписанного пятиугольника равносильно тому, что $0 \notin g(SO(3))$. Поэтому можно определить отображение

$$f\colon SO(3) \to S^3 \quad \text{формулой} \quad f(\rho) := \frac{g(\rho)}{|g(\rho)|}\,.$$

Напомним определение трёхмерной сферы:

$$S^3 := \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}.$$

Непрерывные отображения[2] $f_0, f_1\colon SO(3) \to S^3$ называются *гомотопными*, если они получаются друг из друга непрерывной деформацией, т. е. включаются в семейство непрерывных отображений $f_t\colon SO(3) \to S^3$, $t \in [0, 1]$, непрерывно зависящих от параметра t.[3]

Мы получим противоречие, если докажем следующие два факта.

1. f гомотопно отображению $f_1\colon SO(3) \to S^3$, для которого $f_1(SO(3)) \neq S^3$.

2. f не гомотопно отображению $f_1\colon SO(3) \to S^3$, для которого $f_1(SO(3)) \neq S^3$.

Доказательство факта 1. Говоря неформально, мы сдвигаем предполагаемый центр пятиугольника вдоль ρe_1 и определяем h_{ti} аналогично h_i,

[2] Читатель легко определит *расстояния* между точками пространства $SO(3)$ и между точками сферы S^3. Тогда обычное ε-δ определение непрерывности переносится на случай отображений $SO(3) \to S^3$.

[3] Непрерывная зависимость от параметра t в этом конкретном случае означает непрерывность отображения $F\colon [0, 1] \times S^3 \to S^3$, заданного формулой $F(t, x) = f_t(x)$.

но с новым центром. Формально, положим

$$h_{ti}(\rho) := \max\{s : s\rho(e_i) + th_1(\rho)\rho(e_1) \in K\}.$$

Для каждого t можно по приведённой выше схеме построить[4)] отображения $f_t\colon SO(3) \to S^3$. Это семейство отображений f_t непрерывно зависит от $t \in [0,1]$.[5)] Заметим, что $h_{11}(\rho) = 0$ для любого вращения ρ. Кроме того, $h_{1i}(\rho) > 0$ при некоторых $i = 2, \ldots, 5$ и ρ. Поэтому первая координата вектора $f_1(\rho)$ отрицательна для любого ρ. Значит, $f_1(SO(3)) \neq S^3$. $\square$

Доказательство факта 2. Обозначим через p вращение относительно оси z на угол $-2\pi/5$. Ясно, что $h_i(\rho \circ p) = h_{i+1}(\rho)$. Здесь и далее нумерация индексов циклическая по модулю 5. Определим отображение

$$s\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad \text{формулой } s(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_2, x_3, x_4, -x_1 - x_2 - x_3 - x_4).$$

Ясно, что s непрерывно,

$$g(\rho \circ p) = s(g(\rho)) \text{ и } s^5 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$$

(ибо, вспомнив про пятую координату $x_5 := -x_1 - x_2 - x_3 - x_4$, получим $s^k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_{1+k}, x_{2+k}, x_{3+k}, x_{4+k}, x_k)$). Определим отображение

$$r\colon S^3 \to S^3 \text{ формулой } r(v) := \frac{s(v)}{|s(v)|}\,.$$

Ясно, что r непрерывно,

$$f(\rho \circ p) = r(f(\rho)) \quad \text{и} \quad r^5 = \mathrm{id}_{S^3}\,.$$

Хочется применить следующую теорему (обобщение теоремы Борсука – Улама).

Пусть q — простое число, $F, P, R\colon S^n \to S^n$ — непрерывные отображения, для которых $F \circ P = R \circ F$, $P^q = R^q = \mathrm{id}_{S^n}$ и для любого $x \in S^n$ имеем $P(x) \neq x$, $Q(x) \neq x$. При этих условиях F не может быть гомотопно отображению $F_1\colon S^n \to S^n$, для которого $F_1(S^n) \neq S^n$.

Попробуйте доказать эту теорему для $n = 1$! Для произвольного n доказательство более сложное, подробное изложение можно найти в книге [5]. По сути надо доказать, что степень отображения F ненулевая.

Чтобы применить эту теорему, определим отображение

$$\pi\colon S^3 \to SO(3) \text{ формулой: } \pi(v) \text{ действует на } x \in \mathbb{R}^3 \text{ как } \pi(v)(x) = vxv^{-1}.$$

Здесь S^3 отождествлена с множеством кватернионов единичной нормы, а $\mathbb{R}^3$ с множеством кватернионов вида $xi + yj + zk$.

---

4) Естественно, в предположении отсутствия вписанного пятиугольника с центром $t\rho e_1$, лежащего в плоскости $\rho\langle e_1, \ldots, e_5\rangle$.

5) Доказательство — упражнение для читателя. Для непрерывности при $t = 1$ необходима гладкость и строгая выпуклость тела K.

Ясно, что это отображение непрерывно и что у любого вращения из $SO(3)$ ровно два прообраза при отображении π (эти прообразы отличаются знаком). Возьмём некоторый элемент $\bar{p}$ в прообразе p относительно π. При этом $\bar{p}^5$ может оказаться либо $+1$, либо -1; в последнем случае возьмём вместо $\bar{p}$ элемент $-\bar{p}$, тогда $\bar{p}^5$ станет $+1$. Тогда

$$f(\pi(v\bar{p})) = f(\pi(v)p) = rf(\pi(v)) \quad \text{для любого } v \in S^3.$$

Поэтому можно применить сформулированную теорему для $n = 3$, $q = 5$, $F = f \circ \pi$, $R = r$ и P, определённого как умножение на $\bar{p}$ справа. Получим, что $f \circ \pi$ не гомотопно отображению $F_1 \colon S^3 \to S^3$, для которого $F_1(S^3) \neq$ $\neq S^3$. Значит, исходное f также не гомотопно отображению $f_1 \colon SO(3) \to S^3$, для которого $f(SO(3)) \neq S^3$. $\square$

Сведение случая произвольного выпуклого тела K к случаю гладкого строго выпуклого K. Заметим, что существует последовательность гладких и строго выпуклых тел K_n, которые приближают (скажем, в метрике Хаусдорфа[6)]) тело K. Каждое K_n имеет вписанный пятиугольник P_n, плоскость которого α_n проходит через начало координат. Если размеры P_n не стремятся к нулю, то из соображений компактности можно выбрать предельный пятиугольник P, вписанный в K. Далее предполагаем, что размеры P_n стремятся к нулю. Заметим такой геометрический факт: для правильного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ обозначим (индексы считаются по модулю 5)

$$B_i = A_{i-1}A_i \cap A_{i+1}A_{i+2}$$

и рассмотрим звезду $A_1B_1A_2B_2 \dots A_5B_5$. Для P_n обозначим соответствующую звезду Q_n и заметим, что с одной стороны размеры Q_n стремятся к нулю, а с другой стороны Q_n содержит в себе $K_n \cap \alpha_n$. Но размеры $K_n \cap \alpha_n$ не могут стремиться к нулю, так как можно выбрать некоторый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в начале координат, содержащийся во всех K_n. $\square$

Замечание. Аналогично (см. статью В. В. Макеева [1]) доказывается утверждение: пусть p нечётное простое, а $d = \dfrac{p+1}{2}$, тогда во всякое выпуклое тело K в $\mathbb{R}^d$ можно вписать двумерный правильный p-угольник, плоскость которого проходит через любую наперёд заданную точку $a \in \operatorname{int} K$. Правда, в этом утверждении вместо теоремы Борсука – Улама нужно применять более сильное утверждение, в котором пространство прообраза (в доказательстве оно равно многообразию Штифеля V_d^2 ортонормированных 2-реперов в $\mathbb{R}^d$) не обязано быть сферой. Однако можно вычислить некоторый инвариант (когомологический индекс) этого пространства, с

[6)] Расстояние Хаусдорфа между непустыми компактами определяется как

$$\operatorname{dist}(X, Y) = \max\{\max_{x \in X} \operatorname{dist}(x, Y), \max_{y \in Y} \operatorname{dist}(X, y)\}.$$

точки зрения которого оно «похоже» на сферу соответствующей размерности.

Обобщённая теорема Борсука – Улама. Очень подробная информация по теоремам типа Борсука – Улама и их применениям в геометрии и комбинаторике содержится в книге И. Матушека [5], которая, в принципе, не требует предварительных знаний от читателя. Приведём для полноты формулировки этих теорем. Определения понятий «полиэдр» и «n-связность» читатель может найти в стандартном учебнике по топологии, например [3].

Определения.

1) Полиэдр X, на котором действует конечная группа G непрерывными преобразованиями, называется *G-пространством.* Если для любых $g \in G \setminus \{e\}$ и $x \in X$ имеем $gx \neq x$, то действие называется *свободным.*

2) Непрерывное отображение $f : X \to Y$ между G-пространствами называется *G-эквивариантным* (или G-отображением), если оно перестановочно с действием G, то есть для любых $g \in G$ и $x \in X$ имеем $f(gx) = gf(x))$.

Теорема. *Пусть G — конечная группа, состоящая более чем из одного элемента, а $f\colon X \to Y$ — G-отображение из $(n-1)$-связного в n-мерный полиэдр со свободным действием G. Тогда f не может быть гомотопным постоянному отображению, т. е. не может быть непрерывно продеформировано в отображение, образ которого состоит из одной точки.*

В качестве упражнения читателю предлагается доказать, что если для непрерывного отображения $f\colon X \to S^n$ образ $f(X)$ не равен S^n, то оно гомотопно постоянному.

Существует и другая формулировка теоремы Борсука – Улама. Она эквивалентна первой, но доказательство эквивалентности не тривиально.

Теорема. *Пусть G — конечная группа, состоящая более чем из одного элемента. Тогда не существует G-отображения из n-связного в n-мерный полиэдр со свободным действием G.*

Список литературы

[1] Макеев В. В. *Вписанные и описанные многогранники выпуклого тела* // Матем. заметки. Т. 55, вып. 4, 1994. С. 128–130.
Англ. пер. Math. Notes. Vol. 55, no 4, 1994. P. 423–425.

[2] Скопенков А. *Философски-методическое отступление* // Математика в задачах. Сборник материалов выездных школ команды Москвы

на Всероссийскую математическую олимпиаду. Под ред. А. Заславского, Д. Пермякова, А. Скопенкова, М. Скопенкова, А. Шаповалова. М.: МЦНМО, 2009. С. 11–14.
Эл. версия `http://www.mccme.ru/circles/oim/mvz.pdf`

[3] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. *Курс гомотопической топологии*. М.: Наука, 1989.

[4] Borsuk K. *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre* // Fund. Math. B. 20, 1933. S. 177–190.

[5] Matoušek J. *Using the Borsuk – Ulam theorem*. Berlin – Heidelberg: Springer Verlag, 2003.

Роман Карасёв, каф. высшей математики, Московский физико-технический институт, Институтский пер. 9, Долгопрудный, РФ 141700
Email: `r_n_karasev@mail.ru`