Задача о фишках и потоки на кубической решетке

М. Л. Матдинов

Введение. Пусть в некоторых клетках плоской решетки стоят фишки (не более одной в клетке), а некоторые клетки — пустые. Требуется сдвинуть все фишки на ограниченное расстояние так, чтобы все клетки были заполнены. Когда это можно сделать?

Например, пусть все клетки, кроме одной, заполнены. Тогда фишка, стоящая справа от этой клетки, сдвигается на шаг влево, фишка, стоящая справа от нее, тоже сдвигается на шаг влево и т. д. В результате весь ряд фишек справа от пустой клетки сдвигается на одну клетку влево и клетка заполняется. С другой стороны, если половина плоскости пустая, то ее заполнить невозможно. Невозможно осуществить требуемое и если имеются сколь угодно большие пустые квадраты.

Не очень сложно понять, что следующее условие необходимо:

> *Существует такая константа $C > 0$, что количество пустых клеток в каждом квадрате с произвольной стороной a не превосходит $C \cdot a$.* $(*)$

Упражнение. Покажите, что данное условие необходимо.

На самом деле это условие является и достаточным. В [1, с. 217], была предложена следующая *задача* 4.11:

Задача (А. Я. Белов). На некоторых клетках бесконечной доски стоят фишки (не более одной на каждой клетке), некоторые клетки — пустые. Назовем расстановку *почти полной*, если найдется такое число C, что можно так сдвинуть каждую фишку на расстояние, не превышающее C (иногда нулевое), чтобы пустых клеток не осталось. Назовем расстановку *не слишком пустой*, если найдется такое число D, что количество пустых клеток в любом квадрате не превосходит DP, где P — периметр квадрата. Докажите, что почти полные расстановки — это в точности не слишком пустые.

Под ред. Б. Р. Френкина.

В 1998 г. эта задача предлагалась при отборе команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду. Участник олимпиады Д. Ершов предложил идею, связанную с использованием теоремы Менгера. Решение задачи, основанное на этой идее см. [2, с. 249–252].

Пространственное обобщение этой задачи до сих пор оставалось нерешенным.

Отметим, что родственная задача (автор неизвестен) была предложена на V Международном математическом Турнире городов осенью 1983 г. (см. [3, с. 31, задача 10 и с. 247–248, решение задачи 10]).

Условие $(*)$ для n-мерного случая формулируется так:

Существует такая константа $C > 0$, что в произвольном кубе со стороной l содержится не более $C \cdot l^{n-1}$ пустых клеток. $(*_n)$

Упражнение. Докажите, что данное условие необходимо.

Как будет показано ниже, это условие в n-мерном случае также является достаточным.[1)]

Исходная задача о фишках связана со свойствами фазовых потоков на кубических решетках. Задача облегчается, если условие $(*_n)$ заменить на более сильное:

Существует такая константа $C > 0$, что в произвольном выпуклом теле с площадью поверхности S содержится не более $C \cdot S$ пустых клеток.

Доказательство соответствующего утверждения содержится в работе [8]. Его непрерывные аналоги исследовались в работах [10, 11].

Интересен аналог нашего результата для *билипшицевых* отображений дискретных множеств. Пусть даны два дискретных множества D_1 и D_2 на плоскости, для которых существуют константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что в каждом круге площади $S > 1$ содержится не менее чем $C_1 S$ и не более $C_2 S$ точек каждого из множеств D_i. Если же $S \leqslant 1$, то не более одной. Возникает естественный

Вопрос: Существуют ли константы $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$ и биекция $F\colon D_1 \to D_2$ такие, что $M_1|x-y| < |F(x) - F(y)| < M_2|x-y|$?

Этому вопросу и его обобщениям был посвящен проект М. Вялого на IV конференции Международного математического Турнира городов в 1992 г. [9].

В дальнейшем на этот вопрос был получен отрицательный ответ [5]. Тем не менее в ряде важных случаев, относящихся к арифметическим

---

1) Как нам стало известно, аналогичный результат независимо получен А. Магазиновым.

объектам в теории групп, в частности решеткам, ответ всё же положительный [5, 7].

Благодарности. Автор благодарен А. Белову, В. Шаричу, С. Горбаню, М. Содину за полезные обсуждения, М. Громову за указание связи с проблемой билипшицевых отображений, А. Райгородскому и всем участникам его семинара за внимание к работе, а также С. Дориченко и участникам его кружка за проявленный интерес.

Теорема 1. *Пусть некоторые клетки N-мерного клетчатого пространства $\mathbb{Z}^N$ заполнены фишками так, что в каждой клетке — не более одной фишки.*

Предположим, что существует такая константа $C \in \mathbb{R}$, что при любом натуральном l в каждом N-мерном гиперкубе со стороной l содержится не более Cl^{N-1} свободных клеток. Тогда существует такое натуральное число k, что все фишки могут одновременно сдвинуться, каждая на расстояние, не превосходящее k, так, чтобы свободных клеток не осталось (под *расстоянием* между клетками подразумевается максимум из расстояний между их проекциями на оси координат).

Доказательство теоремы 1. Пусть Ω — множество всех клетчатых кубов в $\mathbb{Z}^N$. Далее, пусть $m(L)$ — длина стороны произвольного куба $L \in \Omega$, и пусть L содержит $h(L)$ свободных клеток.

Для каждого куба $L \in \Omega$ и числа k построим следующий граф $G(L, k)$. Его вершины — клетки куба L и еще две особые вершины a и b («источник» и «сток»). Клетки куба L (т. е. остальные вершины $G(L, k)$) являются *смежными* тогда и только тогда, когда расстояние между ними не превосходит k. Кроме того, с вершиной a смежны все свободные клетки в L и только они, а с вершиной b смежны все клетки в L, из которых можно сделать шаг длины не более k, выводящий за пределы L.

Нам потребуется следующая

Лемма 1. *При условии $(*_n)$ существует такое натуральное k, что для любого куба $L \in \Omega$ в графе $G(L, k)$ между вершинами a и b существует $h(L)$ непересекающихся путей.*

Покажем, как из леммы 1 *вытекает доказательство основной теоремы.*

Утверждение этой леммы означает следующее: *существует такое k, что при любом натуральном m существуют непересекающиеся пути с длиной шага, не превосходящей k, начинающиеся во всех свободных клетках куба с центром в начале координат и стороной $2m$ и выходящие за его пределы.*

Пусть $a_{m,i,1}$ — первая клетка пути, ведущего из a_i (она определена только если a_i лежит внутри соответствующего куба). Заметим, что величина $a_{m,i,1}$ может принимать лишь конечное множество значений при данном i, поскольку эта клетка лежит на расстоянии не более k от a_i. Поэтому мы можем выбрать последовательность значений m так, чтобы клетка $a_{m,i,1}$ была одной и той же. Затем выберем подпоследовательность так, чтобы следующая клетка пути была одной и той же, и так далее. Аналогичные пути построим для всех a_i. Пусть $\{a_i = a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, \dots\}$ — путь, начинающийся в a_i. Свободна в нем клетка a_i и только она. Сдвинем фишки из $a_{i,1}$ в a_i, из $a_{i,2}$ в $a_{i,1}$ и т. д. Аналогично передвинем фишки на остальных путях. Прочие фишки оставим на месте. Тогда все фишки сдвинутся на ограниченное расстояние, все свободные клетки будут заполнены, а новых свободных клеток не появится, что и требуется в теореме.

Итак, остается доказать лемму 1. Вначале приведем формулировку теоремы Менгера (см., например, [4, с. 64]):

Теорема Менгера. *Между двумя несмежными вершинами графа x и y существует не менее t непересекающихся путей тогда и только тогда, когда при выкидывании любых $t-1$ вершин, отличных от x и y, эти две вершины остаются в одной компоненте связности.*

Доказательство леммы 1. В силу теоремы Менгера нам достаточно установить следующий факт:

При условии $(*_n)$ существует такое k, что в любом кубе $L \in \Omega$ после выкидывания $h(L)-1$ клеток можно из какой-то оставшейся свободной клетки выбраться за пределы L, идя по оставшимся клеткам шагами длины, не превосходящей k.

Пусть $L \in \Omega$, A — множество свободных клеток в L, B — множество выкинутых клеток и из оставшихся свободных клеток нельзя выйти из L указанным образом. Покажем, что $|A| < |B|$ при всех $k > k_0$, где константа k_0 не зависит от L. Тем самым требуемый факт будет доказан, поскольку $|A| = h(L)$.

Можно считать, что $A \backslash B$ не пусто. Выберем достаточно малое положительное ε. Пусть X — множество клеток, до которых можно добраться из $A \backslash B$. Заключим X в куб со стороной 2^t, объем которого не менее $\dfrac{|X|}{\varepsilon}$. Определим множество кубов M с помощью следующей процедуры, которую мы вначале применим к нашему кубу со стороной 2^t:

Если пересечение X с кубом составляет хотя бы долю ε от объема куба, причисляем куб к M. В противном случае, если пересечение не пусто, то делим куб на 2^N равных кубов и применяем процедуру к каждому из них. Если пересечение пусто, не делаем ничего.

Таким образом, X будет покрыто объединением нескольких непересекающихся кубов, причем для любого куба $U \in M$ имеем

$$\varepsilon \leqslant \frac{|U \cup X|}{|U|} < 2^N \varepsilon. \qquad (**)$$

(Правое неравенство выполнено, так как в противном случае мы не делили бы на 2^N частей куб, из которого получился куб U.)

Пусть T — объединение всех кубов из M. Достаточно показать, что $|T \cap A| < |T \cap B|$ и $|A \setminus T| \leqslant |B \setminus T|$. Но второе неравенство следует из того, что если $\alpha \in A$ и $\alpha \notin T$, то $\alpha \notin X$ и потому $\alpha \in B$. Первое неравенство будет доказано, если мы установим, что $|U \cap A| < |U \cap B|$ для любого $U \in M$. В силу условия $(*_n)$ $U \cap A$ содержит не более $Cm(U)^{N-1}$ клеток. Поэтому достаточно показать, что $|U \cap B| > Cm(U)^{N-1}$.

Пусть Y — произвольное подмножество в кубе $L \in \Omega$, а $B_k(Y, L)$ — множество всех клеток из L, удаленных не более чем на k хотя бы от одной клетки из Y.

Лемма 2. *При условии $(*_n)$ для любого положительного $C \in \mathbb{R}$ и любых $\alpha, \beta \in (0,1)$ существует такое натуральное k, что для любого достаточно большого куба $L \in \Omega$ и подмножества его клеток $Y \subset L$ выполняется следующее утверждение: если $\alpha|L| < |Y| < \beta|L|$, то $|B_k(Y, L)| > Cm(L)^{N-1}$.*

С помощью леммы 2 можно завершить доказательство леммы 1. Заметим, что $B_k(X \cap U, U)$ содержится в $B \cap U$. Положим $\alpha = \varepsilon$, $\beta = 2^N \varepsilon$. Из леммы 2 получаем, что *при некотором k в любом $U \in M$ достаточно большого размера, удовлетворяющем условию $(**)$, будет более чем $Cm(U)^{N-1}$ клеток из $B \cap U$, где C — константа из условия основной теоремы.*

При достаточно больших k эта оценка верна и для маленьких $|U|$. Действительно, возьмем $\varepsilon < 2^{-N-1}$, тогда $|U \cap X|$ составляет менее половины от $|U|$. При большом k остальная часть U содержится в $B_k(X \cap U, U)$, а тогда и в $B \cap U$, откуда $|B \cap U| > \frac{1}{2}|U| = \frac{1}{2}m(U)^N$. Осталось показать, что $\frac{1}{2}m(U)^N > Cm(U)^{N-1}$. Для этого достаточно, чтобы выполнялось условие $m(U) > 2C$. Но так как $1 \leqslant |U \cap X| < 2^N \varepsilon |U|$, то нужно лишь выбрать ε достаточно малым.

Доказательство леммы 2. Зафиксируем некоторое δ, $0 < \delta < 1$. Выберем некоторое k. Поскольку мы хотим доказать наше утверждение лишь для достаточно больших кубов, можно считать, что $|B_k(Y, L)| < \delta|L|$. Пусть $Y' = L \setminus Y \setminus B_k(Y, L)$. Заметим, что $|Y'| > (1 - \beta - \delta)|L|$.

Пусть $x, y \in L$. Назовем *линейным путем* между x и y путь наименьшей длины между ними с шагом 1, причем вначале движение происходит параллельно первой координатной оси, затем параллельно второй и т. д. Ясно, что между двумя ячейками из L существует единственный линейный путь.

Введем следующие обозначения: $w(x) = 1$ при $x \in B_k(Y, L)$; $w(x) = 0$ в противном случае; $W(x, y)$ — число точек из $B_k(Y, L)$ на линейном пути из x в y; $N(x)$ — число линейных путей, проходящих через x.

Если линейный путь проходит через x, то x принадлежит его компоненте, параллельной i-й координатной оси, где $1 \leqslant i \leqslant N$. Начало этой компоненты — одна из m клеток, откуда можно попасть в x, двигаясь параллельно i-й оси. Конец i-й компоненты — одна из тех же m клеток. При каждом из вариантов начала i-й компоненты имеется m вариантов начала предыдущей компоненты (при $i > 1$) и т. д., а при каждом из вариантов конца i-й компоненты имеется m вариантов конца следующей компоненты (при $i < N$) и т. д. Поэтому существует не более m^{N+1} линейных путей, i-я компонента которых проходит через x, откуда $N(x) \leqslant Nm^{N+1}$.

Заметим, что если $x \in Y$, $y \in Y'$, то $W(x, y) = W(y, x) \geqslant k$, поэтому выполняется неравенство:

$$\sum_{x,y \in L} W(x, y) \geqslant 2k|Y||Y'| \geqslant 2k\alpha(1 - \beta - \delta)|L|^2 = 2k\alpha(1 - \beta - \delta)m(L)^{2N}.$$

Заметим также, что выполняется очевидное равенство

$$\sum_{x,y \in L} W(x, y) = \sum_{x \in L} N(x)w(x)$$

Таким образом, мы имеем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} 2k\alpha(1 - \beta - \delta)m(L)^{2N} \leqslant \sum_{x,y \in L} W(x, y) = \sum_{x \in L} N(x)w(x) \leqslant \\ \leqslant Nm(L)^{N+1} \sum_{x \in L} w(x) = Nm(L)^{N+1}|B_k(Y, L)| \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|B_k(Y, L)| \geqslant \frac{2k}{N}\alpha(1 - \beta - \delta)m(L)^{N-1}.$$

Остается лишь выбрать k достаточно большим, чтобы правая часть была больше $Cm(L)^{N-1}$. Таким образом, лемма 2, а вместе с ней лемма 1 и основная теорема 1, доказаны.

Список литературы

[1] Математическое Просвещение. Сер. 3, вып. 4, 2000.

[2] Математическое Просвещение. Сер. 3, вып. 8, 2004.

[3] Толпыго А. К. *Тысяча задач Международного математического Турнира городов*. М.: МЦНМО, 2010.

[4] Харари Ф. *Теория графов*. М.: УРСС, 2003.

[5] Burago D., Kleiner B. *Separated nets in Euclidean space and Jacobians of bi-Lipschitz maps* // Geom. Funct. Anal. Vol. 8, 1998. P. 273–282.

[6] Burago D., Kleiner B. *Rectifying separated nets* // Geom. Funct. Anal. Vol. 12, 2002. P. 80–92.

[7] Gromov M. *Asymptotic invariants of infinite groups* // Geometric Group Theory. Vol. 2 (Sussex, 1991). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. P. 1–295.

[8] Gromov M. *Metric structures for Riemannian and Non-Riemannian spaces*. Boston: Birkhäuser, 1999.

[9] IV *Летняя конференция Международного математического Турнира Городов. Задачи и решения.* Москва, 1993. С. 11–13, 33–46.

[10] Sodin M., Tsirelson B. *Uniformly spread measures and vector fields* // Записки научн. сем. ПОМИ. Т. 366, 2009. С. 116–127.

[11] Sodin M., Tsirelson B. *Random complex zeroes, II. Perturbed lattice* // Israel Journal of Mathematics. Vol. 152, 2006. P. 105–124.

М. Л. Матдинов, СУНЦ МГУ
Email: marmarselsel@mail.ru