Несколько прямых, проходящих через точку Фейербаха

Ф. Ивлев

В этой заметке содержится, в частности, решение задачи 14.8 из задачника «Математического просвещения»[1)]

Всем известно, что в любом треугольнике существует вписанная окружность. Также хорошо известен факт, что во всяком треугольнике середины его сторон и основания высот треугольника лежат на одной окружности, называемой *окружностью девяти точек* или *окружностью Эйлера* треугольника. Если рассматривать разносторонний треугольник (а в нашем исследовании случай равнобедренного и равностороннего треугольника является вырожденным), то две вышеупомянутые замечательные окружности касаются. Этот факт в 1822 году доказал немецкий математик К. Фейербах, именем которого часто называют как окружность девяти точек, так и саму точку касания окружностей.

В данной работе рассмотрены несколько новых замечательных прямых, проходящих через точку Фейербаха. Сам факт, что эти прямые проходят через точку Фейербаха был замечен Львом Емельяновым и Татьяной Емельяновой в 2001 году. На Летней конференции Турнира городов они включили его как недоказанный пункт в задачу «Семейство Фейербаха»[2)]. Первое решение, видимо, было получено Д. Гринбергом (Darij Grinberg)[3)].

Приведенное в данной заметке доказательство отличается от найденного Гринбергом. Оно затрагивает несколько новых свойств точек, являющихся точками пересечения несоответственных сторон серединного треугольника и треугольника из точек касания вписанной окружности со

1) Условие задачи в 14 выпуске «Математического просвещения» содержало опечатки. Правильное условие см. в этом номере, с. 235.

2) Ссылка на страницу конференции: `http://www.turgor.ru/lktg/2001/index.php`. Ссылка на условия задачи (см. п. 22) `http://www.turgor.ru/lktg/2001/feerbach/ru/probl_r.zip`.

3) Ссылка на его работы `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/geometry2.html`, на статью, о которой идет речь, — `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/GenFeuerPDF.zip`.

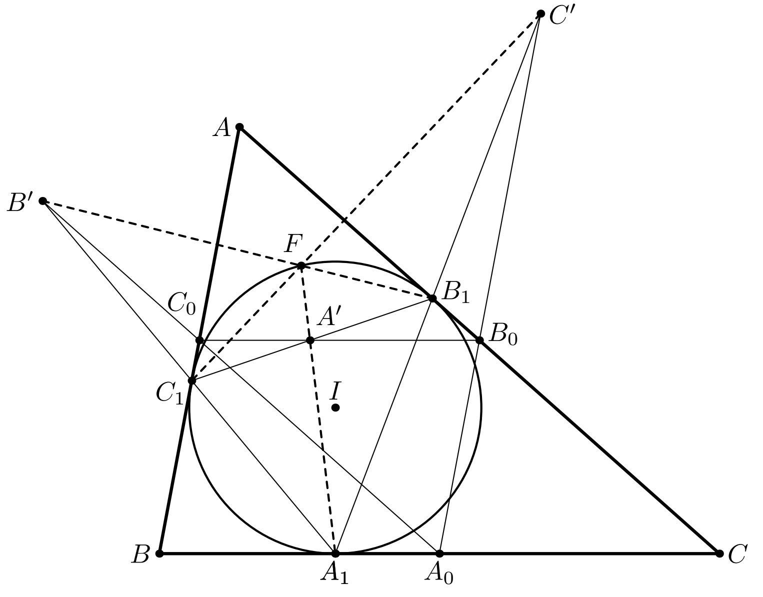

Рис. 1. Основная теорема: прямые A_1A', B_1B', C_1C' проходят через точку Фейербаха

сторонами. Приводятся новые свойства центров вневписанных окружностей серединного треугольника. Также указываются еще три замечательные прямые, проходящие через точку Фейербаха (помимо, найденных Емельяновыми) и даже целый класс таких прямых. (См. теорему 2 и лемму 5 ниже.)

В конце статьи приведено, пожалуй, самое короткое и простое доказательство поставленной задачи, найденное Александром Скутиным[4]. В решении Скутина приводятся еще несколько интересных свойств рассматриваемой конструкции.

Будем называть треугольник, образованный точками касания вписанной окружности со сторонами, *треугольником Жергонна.*

Обозначим вершины исходного треугольника A, B, C, вершины треугольника Жергонна — A_1, B_1, C_1, а середины сторон треугольника ABC через A_0, B_0 и C_0 (см. рис. 1). Рассмотрим точки пересечения соответственных сторон серединного треугольника $A_0B_0C_0$ и треугольника Жергонна $A_1B_1C_1$. Обозначим их через A', B' и C' соответственно (A' соответствует точке пересечения прямых B_1C_1 и B_0C_0). Наша цель — изучить свойства прямых A_1A', B_1B', C_1C' и доказать, что они проходят через точку Фейербаха. Назовем это утверждение Основной теоремой.

[4] Решение приводится с согласия А. Скутина.

Наметим план доказательства. Если читатель знает некоторые леммы, то он может сразу перейти к следующим шагам решения. Также сюда можно заглядывать, чтобы вспомнить обозначения.

Обозначим центр вписанной окружности $\triangle ABC$ через I.

Обозначим точку пересечения прямых CI и C_1A_1 через C_A, CI и C_1B_1 — через C_B. Аналогично определяются точки A_B, A_C, B_A, B_C.

1. Лемма 1. Точка C_A лежит на C_0B_0. Аналогично для остальных точек.
2. Лемма 2. Точки C_A, C_B, A_B, A_C лежат на одной окружности, ортогональной вписанной окружности с центром в точке O_A.
3. Лемма 3. O_A и два центра аналогичных окружностей (обозначим их через O_B и O_C) лежат на прямых $B'C'$, $A'C'$ и $A'B'$ соответственно.
4. Лемма 4. Обозначим за M_A середину стороны O_BO_C треугольника $O_AO_BO_C$.
   Тогда M_A лежит на прямой A_1A'.
5. Доказательство основной теоремы.
6. Лемма 5. Даны точки A_1, B_1, C_1 на сторонах треугольника. A_0, B_0, C_0 — середины сторон $\triangle ABC$. Точка пересечения A_1B_1 с A_0B_0 — A_1'. Аналогично определяются точки B_1' и C_1'. Точка A_2 симметрична точке A_1 относительно A_0. Аналогично определяются точки B_2 и C_2. Точка пересечения A_2B_2 с A_0B_0 — A_2'. Аналогично определяются точки B_2' и C_2'.
   Тогда прямые A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1', A_2A_2', B_2B_2', C_2C_2' пересекаются в одной точке.
7. Теорема 2. Обозначим точки касания вневписанных окружностей со сторонами через A_2, B_2 и C_2. Пусть A'' — точка пересечения прямых B_0C_0 и B_2C_2. Аналогично определим точки B'' и C''. Тогда прямые A_2A'', B_2B'' и C_2C'' проходят через точку Фейербаха.

Перейдем непосредственно к доказательству. При доказательстве лемм используются некоторые факты из статьи [1]. А именно: вершины A, B и C лежат на сторонах треугольника $A'B'C'$, и каждая из вершин треугольника $A'B'C'$ является полюсом его противоположной стороны относительно вписанной окружности.

В дальнейшем удобно будет рассматривать вместо обычных углов ориентированные углы. Будем обозначать через (l, r) ориентированный угол между прямыми l и r — угол, на который нужно повернуть прямую l, чтобы она стала параллельна прямой l. Подробнее об ориентированных углах можно прочитать в [2, глава 2].

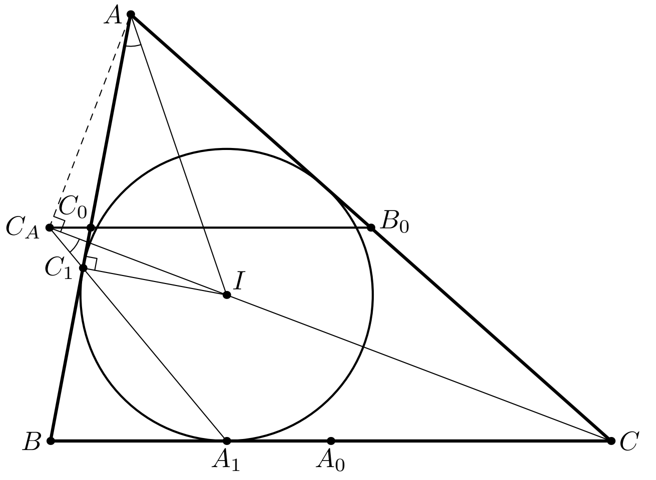

Рис. 2.

Лемма 1. Точка C_A лежит на средней линии $\triangle ABC$, параллельной BC. Аналогично для остальных точек.

Доказательство. Рассмотрим только случай точки C_A, для остальных точек рассуждения аналогичны.

$$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C \quad \Rightarrow$$
$$\angle BA_1C_1 = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = \frac{\angle A + \angle C}{2} \quad \Rightarrow$$
$$\angle(A_1B,\, A_1C_1) = \angle(A_1C,\, CI) + \angle(AI,\, AC_1) \quad \Rightarrow$$
$$\angle(AI,\, AC_1) = \angle(A_1B,\, A_1C_1) - \angle(A_1C,\, CI) =$$
$$= \angle(A_1C,\, C_1C_A) - \angle(A_1C,\, CC_A) =$$
$$= \angle(IC_A,\, A_1C) + \angle(A_1C,\, C_1C_A) = \angle(IC_A,\, C_AC_1).$$

Следовательно, точки A, C_1, C_A и I лежат на одной окружности. Тогда $\angle AC_AI = \angle AC_1I = 90^\circ$ (см. рис. 2). Следовательно, B_0 — центр описанной окружности $\triangle AC_AC$, как середина гипотенузы прямоугольного треугольника. Получаем, что $\angle C_AB_0A = 2\angle C_ACA = \angle C$, т. е. $C_AB_0 \parallel BC$, что и означает, что C_AB_0 — средняя линия. □

Далее для доказательства мы будем пользоваться языком проективных и полярных преобразований. Подробнее о них можно прочитать в [1] и [2].

Лемма 2. Точки A_B, A_C, B_A, B_C лежат на одной окружности.

Доказательство. Мы получили, что $C_0C_A \parallel BC$, а следовательно, все стороны $\triangle C_1C_0C_A$ параллельны соответственным сторонам $\triangle C_1BA_1$.

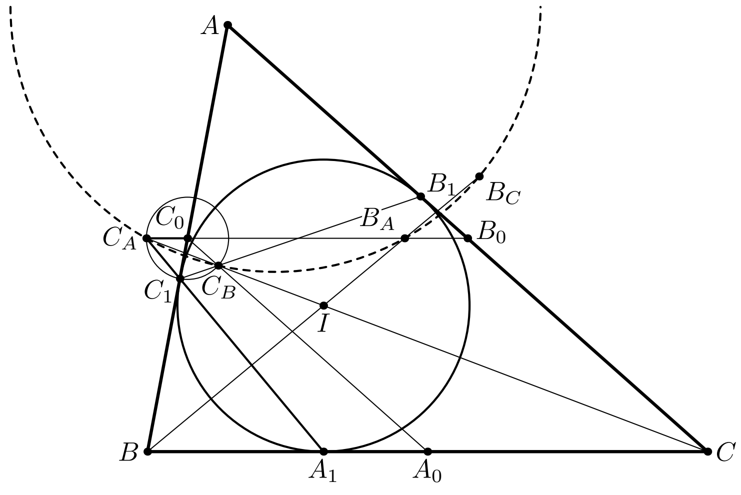

Рис. 3.

То есть он тоже равнобедренный, и потому $C_0C_1 = C_0C_A$. По аналогичным причинам $C_0C_1 = C_0C_B$. Следовательно, C_0 — центр описанной окружности треугольника $C_AC_1C_B$ (см. рис. 3). Заметим, что центр этой окружности лежит на касательной к вписанной окружности в их общей точке C_1. Значит сама окружность ортогональна вписанной окружности. Следовательно, точки C_A и C_B, лежащие с I на одной прямой, инверсны относительно вписанной окружности. Аналогично инверсны относительно вписанной окружности пары точек A_B с A_C и B_A с B_C. Следовательно, точки A_B, A_C, B_A, B_C лежат на одной окружности, ортогональной вписанной окружности. Назовем эту окружность ω_C. Аналогично определим окружности ω_A и ω_B. Центры этих окружностей обозначим за O_A, O_B и O_C соответственно. □

Так как окружности ω_A, ω_B и описанная окружность $\triangle C_AC_BC_1$ проходят через точки C_A и C_B, то их центры лежат на одной прямой. То есть C_0 лежит на прямой O_AO_B. Аналогично $B_0 \in O_AO_C$ и $A_0 \in O_BO_C$. Причем O_AO_B перпендикулярна C_AC_B, а следовательно перпендикулярна и биссектрисе угла C. Заметим, что биссектриса угла C_0 треугольника $A_0B_0C_0$ параллельна биссектрисе угла C. А значит, прямая O_AO_B перпендикулярна и биссектрисе угла C_0. Вспомнив, что эта прямая проходит через вершину C_0, получаем, что O_AO_B — внешняя биссектриса треугольника $A_0B_0C_0$. Заметим, что аналогичное верно и для прямых O_AO_C и O_BO_C, а следовательно, O_A, O_B и O_C — центры вневписанных окружностей треугольника $A_0B_0C_0$. Но тогда точки A_0, B_0 и C_0 являются основаниями высот треугольника $O_AO_BO_C$. То есть окружность Эйлера треугольника

ABC так же является окружностью Эйлера треугольника $O_AO_BO_C$, так как они обе проходят через точки A_0, B_0 и C_0.

Лемма 3. O_A лежит на $B'C'$.

Доказательство. Обозначим вписанную окружность треугольника ABC через ω. Напомним, что окружности ω и ω_A ортогональны. Обозначим за K и L точки их пересечения. Тогда O_AK и O_AL — касательные к ω, так как ω ортогональна ω_A. Следовательно, поляра O_A относительно ω — прямая KL. Также KL является полярой I относительно ω_A. Как мы знаем, A' — полюс $B'C'$ относительно ω. Следовательно, для того чтобы показать, что O_A лежит на $B'C'$, достаточно показать, что поляра O_A проходит через A'. То есть, что A' лежит на KL. Для этого достаточно заметить, что I — точка пересечения C_AC_B и B_AB_C, а A' — точка пересечения C_AB_A и C_BB_C. Следовательно, A' лежит на поляре I относительно ω_A, то есть на KL, ч. т. д. $\square$

Обозначим середины сторон $\triangle O_AO_BO_C$ через M_A, M_B и M_C.

Лемма 4. Точки M_A, A_1, A' лежат на одной прямой.

Доказательство. Пусть Q — точка пересечения прямых B_1C_1 и BC. Тогда, так как прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, то по теореме о полном четырехвершиннике $(B, C, A_1, Q) = -1$. Спроектируем это двойное отношение из точки A' на прямую O_BO_C. При этом Q перейдет в бесконечно удаленную точку, точки B и C перейдут в O_B и O_C, а следовательно, A_1 перейдет в середину отрезка O_BO_C, то есть в точку M_A (см. рис. 4). Следовательно, точки M_A, A_1, A' лежат на одной прямой. $\square$

Основная теорема. Прямые A_1A', B_1B' и C_1C' проходят через точку Фейербаха.

Доказательство. Рассмотрим треугольники $M_AM_BM_C$ и $A_1B_1C_1$. Соответственные стороны у них перпендикулярны соответствующим биссектрисам треугольника $\triangle ABC$, а значит параллельны между собой. Следовательно, эти треугольники гомотетичны. Так как описанная окружность треугольника $M_AM_BM_C$ является окружностью Эйлера треугольника ABC, а описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ — вписанной окружностью треугольника ABC, то центром гомотетии будет точка Фейербаха треугольника ABC. Следовательно, прямые A_1A', B_1B', C_1C', проходящие через соответствующие вершины треугольника, пересекаются в этом центре гомотетии, то есть в точке Фейербаха, ч. т. д. $\square$

Именно это факт заметили Емельяновы, и доказал Гринберг. Наши рассуждения можно продолжить и найти еще одну тройку замечательных прямых, проходящих через точку Фейербаха, и даже целый класс

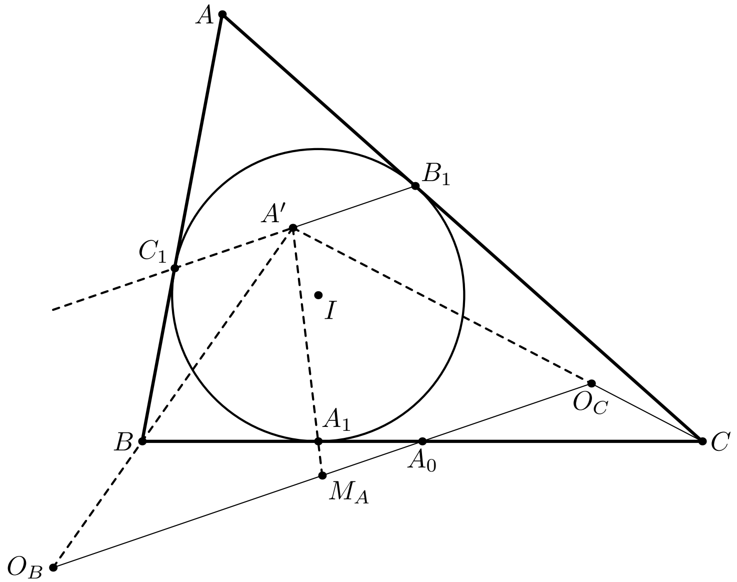

Рис. 4.

специальных троек прямых, проходящих через точку Фейербаха. Сейчас мы покажем, что в условии основной теоремы можно было заменить заменить треугольник Жергонна на треугольник из точек касания вневписанных окружностей со сторонами, часто называемый *треугольником Нагеля*. Обозначим его вершины через A_2, B_2 и C_2. Для них аналогичным образом определим точки $A''B''C''$. Тогда утверждение теоремы 2 состоит в том, что прямые $A''A_2$, $B''B_2$, $C''C_2$ также пересекутся в точке Фейербаха.

Докажем более общий факт, а именно:

Лемма 5. Даны точки A_1, B_1, C_1 на сторонах треугольника. A_0, B_0, C_0 — середины сторон треугольника ABC. Точка пересечения A_1B_1 с A_0B_0 — A_1'. Аналогично определяются B_1' и C_1'. Точка A_2 — образ точки A_1 при гомотетии в A_0 с коэффициентом k. Аналогично определяются точки B_2 и C_2 (коэффициент k для всех трех точек одинаковый). Для них определим точки A_2', B_2', C_2' аналогичным образом. Тогда прямые A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1', A_2A_2', B_2B_2', C_2C_2' пересекаются в одной точке.

Доказательство. Сначала покажем, что прямые A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1' пересекаются в одной точке. Так как точки A_2, B_2, C_2 тоже лежат на сторонах треугольника ABC, то прямые A_2A_2', B_2B_2', C_2C_2' тоже будут пересекаться в одной точке.

Сделаем аффинное преобразование, переводящее $\triangle ABC$ в правильный. Тогда точки A_0, B_0, C_0 перейдут в середины сторон нового треугольника, так как аффинное преобразование сохраняет отношения на прямой. В свою очередь точки A_1, B_1, C_1 перейдут в какие-то точки на сторонах. При этом точки A_2, B_2, C_2 будут по прежнему гомотетичны точкам A_1, B_1, C_1 с тем же коэффициентом k. То есть условие леммы можно считать сохранившимся.

Обозначим длину высоты из A_1 на стороны A_0B_0 и A_0C_0 через h_A. Аналогично определим h_B и h_C. Поместим в точки A_1, B_1, C_1 массы $\frac{1}{h_A}$, $\frac{1}{h_B}$ и $\frac{1}{h_C}$ соответственно. Заметим, что в этом случае массы точек A_1 и B_1 группируются в точку C_1', так как $A_1C_1' \cdot \frac{1}{h_A} = \sin\angle(A_0B_0,\, A_1B_1) = B_1C_1' \cdot \frac{1}{h_B}$. Следовательно, центр масс всей системы будет лежать на прямой C_1C_1'. Аналогично показывается, что он лежит и на прямых A_1A_1' и B_1B_1'. Следовательно, эти прямые пересекаются в одной точке. Пусть это точка M. Так как M — центр масс, то $\overrightarrow{MA_1} \cdot \frac{1}{h_A} + \overrightarrow{MB_1} \cdot \frac{1}{h_B} + \overrightarrow{MC_1} \cdot \frac{1}{h_C} = 0$. А следовательно, и $(\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0A_1}) \cdot \frac{1}{h_A} + (\overrightarrow{MB_0} + \overrightarrow{B_0B_1}) \cdot \frac{1}{h_B} + (\overrightarrow{MC_0} + \overrightarrow{C_0C_1}) \cdot \frac{1}{h_C} = {}$ $= \overrightarrow{MA_0} \cdot \frac{1}{h_A} + \overrightarrow{MB_0} \cdot \frac{1}{h_B} + \overrightarrow{MC_0} \cdot \frac{1}{h_C} + \overrightarrow{A_0A_1} \cdot \frac{1}{h_A} + \overrightarrow{B_0B_1} \cdot \frac{1}{h_B} + \overrightarrow{C_0C_1} \cdot \frac{1}{h_C} = 0$. Заметим, что $\overrightarrow{A_0A_1} \cdot \frac{1}{h_A}$ — вектор коллинеарный вектору $\overrightarrow{BC}$ и по длине равный $\frac{1}{\sin 60^\circ}$. А следовательно, сумма трех таких векторов равна нулю. Откуда получаем, что $\overrightarrow{MA_0} \cdot \frac{1}{h_A} + \overrightarrow{MB_0} \cdot \frac{1}{h_B} + \overrightarrow{MC_0} \cdot \frac{1}{h_C} = 0$. То есть M — еще и центр масс системы точек A_0, B_0, C_0 с массами $\frac{1}{h_A}$, $\frac{1}{h_B}$, $\frac{1}{h_C}$ соответственно. Заметим, что аналогичные рассуждения верны и для точек A_2, B_2, C_2. А так как высоты из них относятся к высотам из точек A_1, B_1, C_1 с коэффициентом k, то полученные массы будут пропорциональны массам, получившимся в рассуждении о точках A_1, B_1, C_1. А следовательно, точка пересечения прямых A_2A_2', B_2B_2', C_2C_2' есть также центр масс точек A_0, B_0, C_0 с массами $\frac{1}{h_A}$, $\frac{1}{h_B}$, $\frac{1}{h_C}$ соответственно. То есть совпадает с M, ч. т. д. □

Известный факт, что точки касания вписанной окружности и вневписанной окружности со стороной симметричны относительно середины этой стороны. Тогда утверждение теоремы 2 получается, если применить лемму 5 с $k = 1$ к утверждению основной теоремы.

Заметим так же, что условие пересечения трех прямых в одной точке сохраняется при проективных преобразованиях. Так что в условии леммы 5 можно заменить серединный треугольник на произвольный чевианный. А для сохранения условия равенства отношений после проективного преобразования можно потребовать, чтобы двойные отношения точек $(A,\ B_1,\ B_0,\ C)$ и $(C,\ B_2,\ B_0,\ A)$ относились так же, как и две аналогичные пары четверок точек. В частности, это соображение можно применить для следующей конструкции: взять за треугольник $A_0B_0C_0$ треугольник из оснований биссектрис треугольника, а за точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 — чевианные треугольники двух изогонально сопряженных точек. Получается сам по себе интересный факт, пока не нашедший себе продолжения.

Теперь приведем доказательство Александра Скутина. В нем мы будем доказывать нужный нам факт про каждую из трех прямых отдельно. Будем доказывать для прямой A_1A'. Для остальных прямых доказательство аналогично.

Лемма 1′. $\angle(A_0F,\ FA_1) = (\angle(CA,\ CB) + \angle(BA,\ BC))/2$.

Доказательство. Покажем, что

$$\angle(A_0F,\ FH) = \angle(CA,\ CB) + \angle(BA,\ BC),$$

где H — основание высоты, опущенной из A на BC. Тогда нужный нам факт будет очевидно следовать из леммы Архимеда. Заметим, что

$$\angle(A_0F,\ FH) = \angle(A_0B_0,\ B_0H),$$

так как все эти точки лежат на окружности Эйлера. Так же заметим, что ввиду того, что B_0 — середина гипотенузы прямоугольного треугольника AHC, $\angle(CA,\ CB) = \angle(CB_0,\ CH) = \angle(HC,\ HB_0)$. Значит, $\angle(A_0B_0,\ B_0H) = \angle(A_0B_0,\ A_0H) + \angle(A_0H,\ HB_0) = \angle(BA,\ BC) + \angle(CA,\ CB)$, ч. т. д. □

Лемма 2′. Точки B_C, C_B, A_1, A_0 и F лежат на одной окружности.

Доказательство. Покажем, что $\angle(A_0C_B,\ C_BA_1) = \angle(A_0F,\ FA_1)$. Из вписанности C_BIA_1B получаем, что

$$\angle(C_BI,\ C_BA_1) = \angle(BI,\ BA_1) = \angle(BA,\ BC)/2.$$

Из того, что $C_BA_0 = A_0C$, получаем равенство

$$\angle(A_0C_B,\ C_BC) = \angle(CC_B,\ C_A0) = \angle(CA,\ CB)/2.$$

Откуда получаем, что

$$\angle(A_0C_B,\ C_BA_1) = \angle(A_0C_B,\ C_BC) + \angle(C_BC,\ C_BA_1) = \\ = (\angle(CA,\ CB) + \angle(BA,\ BC))/2 = \angle(A_0F,\ FA_1).$$

То есть C_B лежит на описанной окружности $\triangle A_1A_0F$. Аналогично получаем, что и B_C лежит на ней же. Утверждение доказано. □

Мы получили, что A_1F — радикальная ось вписанной и описанной около треугольника $C_BB_CA_1$ окружностей. Так что нам осталось показать, что A' лежит на ней. Для этого достаточно заметить, что A' — центр гомотетии, переводящей треугольник $C_0C_1C_B$ в треугольник $B_0B_CB_1$, так как у этих треугольников соответственные стороны параллельны. А значит, $\frac{A'C_1}{A'B_C} = \frac{A'C_B}{A'B_1}$, откуда следует равенство степеней относительно нужных окружностей $A'C_1 \cdot A'B_1 = A'C_B \cdot A'B_C$. Основная теорема доказана.

Заметим также, что данный результат обобщается для вневписанной окружности, так как алгебраически вписанная окружность неотличима от вневписанной. То есть, если везде заменить слово «вписанная» на «вневписанная», то полученный факт тоже верен.

Приведем также несколько задач, которые предлагается решить самостоятельно.

Задача 1. Докажите, что прямые A_0A', B_0B' и C_0C' пересекаются в одной точке. Назовем эту точку F'. Докажите, что прямая FF' является общей касательной вписанной окружности и окружности Эйлера.

Задача 2. Покажите, что прямые AA', BB' и CC' параллельны.

Задача 3. В обозначениях Леммы 5 докажите, что точки A_1, B_1, C_1, A_0, B_0, C_0 и M лежат на одной конике. То есть точа M является четвертой точкой пересечения описанных коник соответствующих шестерок точек.

Задача 4. Из задачи 3 видно, что точки A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1, F и F' лежат на одной конике. Покажите, что она касается с соответственными кониками для других точек Фейербаха в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно, причем касательными являются прямые O_CO_B и ей аналогичные.

Автор выражает благодарность за помощь в доказательстве некоторых лемм Матдинову Марселю и Мокину Василию, а так же Скопенкову Аркадию и Заславскому Алексею за помощь в оформлении работы.

Список литературы

[1] Емельянов Л. А., Емельянова Т. Л. *Семейство Фейербаха* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 6, 2002. С. 78–92.

[2] Прасолов В. В. *Задачи по планиметрии*. М.: МЦНМО, 2007.