Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются). Если автор задачи нам неизвестен, то в скобках указывается «фольклор».

1. Задачи на «устный счет»:

   а) Найдите первую цифру числа 2^{400}. (*А. Я. Белов*)

   б) Найдите $[2^{\sqrt{15}}]$, не пользуясь калькулятором. (*А. В. Спивак*)

   в) Что больше: $\sqrt[3]{60}$ или $2+\sqrt[3]{7}$? (*В. А. Сендеров*)

   г) Оцените $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^{100} x\,dx$ с 20% погрешностью. (*В. И. Арнольд*)

2. Может ли сумма двух периодических функций с наименьшими периодами 1 и $\sqrt{2}$ снова быть периодической функцией, отличной от константы?

3. Гипербола $H = \{(x, y) : xy = 1\}$ повернута на угол α относительно начала координат $(0, 0)$; получилась гипербола H_α. Найдите угол между их касательными в точках пересечения H и H_α.

   (*А. В. Акопян, D.Schleicher*)

4. Во все точки целочисленной решетки на плоскости вбиты гвозди. На плоскость положили отрезок длины 2011, не задевающий ни одного их этих гвоздей.

   а) Можно ли передвинуть отрезок, не задевая ни одного гвоздя, так, чтобы в результате он развернулся на 180°?

   б) Существует ли такое начальное положение отрезка, при котором его можно повернуть вокруг некоторой точки на 180° так, чтобы он не задел ни одного гвоздя?

   (Авторам неизвестно, верно ли утверждение пункта б) для произвольного начального положения отрезка.)

   (*В. А. Сендеров, А. Я. Белов*)

5. Даны две бесконечно дифференцируемые функции $f(x) = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$, $g(x) = x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots$. Известно, что $f(g(x)) = x$ и что все числа $k!a_k$ — целые. Докажите, что что все числа $k!b_k$ — тоже целые. (*А. В. Бунькова*)

6. На ленте записана бесконечная последовательность цифр. Докажите, что либо из нее можно вырезать 10 стозначных чисел, идущих в порядке убывания, либо какая-нибудь комбинация цифр повторяется 10 раз подряд. А если длина ленты 100^{100} или 100^{20}? Оцените достаточную длину ленты. (*А. Я. Белов*)

7. *Алгебраическая кривая порядка* m задана уравнением
$$\sum_{k+l\leqslant m} a_{kl}x^ky^l = 0.$$
Докажите, что количество ее *овалов* (т. е. компонент связности) не превосходит $(m-1)(m-2)/2+1$. (*Теорема Гарнака*)

8. а) Расстояние между промежуточными лагерями 1 день пути. Экспедиция хочет отнести 1 банку консервов на расстояние n дней пути от базового лагеря и вернуться обратно. При этом каждый член экспедиции может нести с собой не более трех банок консервов, а в день он съедает одну банку. Каково наименьшее число банок консервов должно быть употреблено для этой цели? (Оставлять банки можно только в промежуточных лагерях.) б) Рассмотрите случай, когда каждый член экспедиции может нести с собой k банок консервов, а также случай камикадзе. в) Непрерывный аналог этой задачи: самолеты могут заправляться в воздухе, а дальность полета составляет 1000 км. Количество бензина, который для этого тратится принимается за единицу. Сколько нужно бензина чтобы пролететь 10 тыс. км? (*А.Я.Белов*)

9. а) Дана 2×2 матрица A с вещественными коэффициентами. Докажите, что ее можно представить как сумму квадратов двух матриц второго порядка с вещественными коэффициентами. (*SEEMOUS* 2010)

   б)* Можно ли матрицу размера $n\times n$ с вещественными коэффициентами представить в виде суммы квадратов нескольких матриц размера $n\times n$ с вещественными коэффициентами? Если «да», то каково минимальное число квадратов? (*Охад Ливне Бар-Он, Шахар Кармиели*)

10. На грани правильного тетраэдра отмечена точка. Докажите, что тетраэдр можно разрезать на четыре равных выпуклых многогранника так, чтобы эта точка была вершиной одного из них.
(*И. И. Богданов*)

11. а) Пусть $M = (a, b)$ — интервал на положительной полупрямой $(0, +\infty)$. Доказать, что интервалы $nM = (na, nb)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ покрывают полупрямую $(c, +\infty)$ для достаточно большого c и, значит, дополнение к их объединению имеет конечную меру.

    б) Придумать пример подмножества $M \subset (0, \infty)$ положительной меры, не обладающего указанным выше свойством, т. е. такого, что дополнение к объединению подмножеств nM $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет бесконечную меру. (*Э. Б. Винберг*)

12. а) Множество X вершин правильного n-угольника таково, что равна нулю сумма векторов с началом в центре многоугольника и концами в вершинах множества X. Пусть $n = p^\alpha q^\beta$, где p, q — простые числа. Докажите, что для некоторого k множество X можно разбить на непересекающиеся множества, каждое из которых является множеством вершин правильного k-угольника. Докажите, что при любом n, делящемся хотя бы на три различных простых числа, это не всегда верно. (Пара противоположных вершин рассматривается как 2-угольник).

    б) Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — векторы из центра правильного n-угольника в его последовательные вершины, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ — такой целочисленный вектор, что $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$. Докажите, что a есть целочисленная линейная комбинация векторов вида

$$e_{d,k} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{d}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, \ldots, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k-d-1})$$

    при k, делящих n. (По сути, $e_{k,d}$ соответствует сумме векторов в вершины некоторого правильного (n/k)-угольника.)
(*И. И. Богданов, Э. Б. Винберг, Г. А. Гальперин, Г. Р. Челноков*)

Исправленные условия задач

К сожалению, некоторые условия задач из задачника «Математического просвещения» в вып. 14 содержали ошибки.

Приводим исправленные формулировки задач.

14.7. Пусть d — нечетный делитель натурального числа $p-1$. Докажите, что в p-ичной системе счисления существует d-значное число, равное определителю $d \times d$ матрицы, составленной из цифр этого числа и их циклических перестановок. Например, в десятичной системе счисления ($p = 10$)

$$692 = \det \begin{pmatrix} 6 & 2 & 9 \\ 9 & 6 & 2 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$456790123 = \det \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(*Н. И. Белухов*)

14.7. Дан $\triangle ABC$. A_1, B_1, C_1 — точки касания сторон BC, AC, AB с вписанной окружностью соответственно. A_0, B_0, C_0 — середины сторон. Обозначим точку пересечения прямых A_0B_0 и A_1B_1 через C'. Аналогично определяются точки A' и B'. Докажите, что прямые A_1A', B_1B' и C_1C' пересекаются в точке Фейербаха. (*Ф. Ивлев*)