Решения задач из предыдущих выпусков

12.1. Условие. $\cos\alpha = 1/3$. Докажите, что градусная мера угла α иррациональна.

Решение. Достаточно убедиться, что $\cos(2^n\alpha) \neq \cos(2^m\alpha)$ при $m \neq n$. В самом деле: если $\alpha = p/q \cdot 2\pi$, p, q — целые числа, то найдутся такие $n \neq m$, что 2^n и 2^m сравнимы по модулю q. В этом случае углам $2^n\alpha$ и $2^m\alpha$ отвечает одна и та же точка на единичной окружности и соответствующие косинусы совпадают.

Покажем, что $\cos(2^n\alpha)$ имеет вид $p_n/3^{2^n}$, где p_n не делится на 3. Тогда $\cos(2^n\alpha) \neq \cos(2^m\alpha)$ при $m \neq n$.

В силу равенства $\cos(2\varphi) = 2\cos^2(\varphi) - 1$ имеем $p_{n+1} = 2p_n^2 - 3^{2^n}$ (не делится на 3), а знаменатель дроби для $\cos(2^{n+1}\alpha)$ равен $3^{2^{n+1}}$, так что дело завершает индукция. Задача решена.

Замечание. На окружности радиуса $5^{k/2}$ лежит ровно $k+1$ точка с натуральными координатами. Полезное упражнение — доказать это элементарными методами, без использования теории гауссовых целых чисел.

Комментарии. 1. Пусть β — градусная мера угла правильного тетраэдра. Легко убедиться, что $\cos(2\beta) = 1/3$. На результате задачи 12.1 основано решение Третьей проблемы Гильберта о неравносоставленности куба и правильного тетраэдра. Грубо говоря, поскольку двугранные углы правильного тетраэдра иррациональны, при разрезании и составлении куба образуются «щели», ведь если примыкание нескольких ребер многогранников выходит на поверхность, то сумма их двугранных углов равна π, если на ребро куба — то $\pi/2$, а если образуется ребро «в глубине» — то сумма соответствующих двугранных углов равна 2π. Подробнее см. книгу В. Г. Болтянского «Третья проблема Гильберта».

2. Возникает вопрос: *Какие углы у треугольников на целочисленной решетке выражаются целым числом градусов*? (Ответ — углы, кратные 45°).

Этот вопрос сводится к такому: *Какие правильные многоугольники можно вписать в целочисленную решетку*? Ответ — только квадраты.

В правильную треугольную решетку можно вписать только правильный треугольник и шестиугольник. Прочие правильные многоугольники никуда не вписываются.

Подробнее см. А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи, «Как решают нестандартные задачи». (*А. Я. Канель-Белов*)

13.3. Условие. Известно, что для любой последовательности $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i < \infty$. Докажите, что тогда $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 < \infty$.

Решение. Докажем, что $|b_n| \to 0$.

Для $C > 0$ рассмотрим подпоследовательность m_k такую, что $|b_{m_k}| > C$. Если эта подпоследовательность бесконечна, то условие задачи нарушается для последовательности

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sign} b_{m_k}}{k}, & \text{если } n = m_k, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Значит, для любого C лишь конечное количество членов последовательности b_n по модулю превосходит C.

Теперь рассуждаем от противного. Предположим, что $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 = \infty$. Рассмотрим последовательность

$$a_n = \frac{b_n}{f_n}, \quad \text{где } f_n = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Достаточно доказать, что $\sum_n a_n b_n$ расходится, а $\sum_n a_n^2$ — сходится.

Для натурального числа N выделим отрезок натурального ряда ℓ_N, $\ell_N + 1, \ldots, r_N$, состоящий из всех чисел n, для которых $N - 1 \leqslant f_n < N$. Имеем оценку

$$\sum_{n\in[\ell_N, r_N]} a_n b_n = \sum_{n\in[\ell_N, r_N]} \frac{b_n^2}{f_n} \geqslant \frac{\sum_{n\in[\ell_N, r_N]} b_n^2}{N} \geqslant \frac{1}{2N}$$

при достаточно больших N. Отсюда получаем расходимость ряда $\sum_n a_n b_n$.

С другой стороны, при достаточно больших N для $n \in [\ell_N, r_N]$ выполняется $b_n^2 < 1/2$. Поэтому

$$\sum_{n\in[\ell_N, r_N]} a_n^2 = \sum_{n\in[\ell_N, r_N]} \frac{b_n^2}{f_n^2} \leqslant \frac{1}{2(N-1)^2}\,.$$

Отсюда получаем сходимость ряда $\sum_n a_n^2$. (*М. Н. Вялый*)

14.3. Условие. Бесконечное множество точек на плоскости таково, что все попарные расстояния целые. Докажите, что все точки лежат на одной прямой. А что если все попарные расстояния рациональны?

Решение. а) Рассмотрим пару точек A, B и произвольную точку X нашего множества M. Заметим, что в силу неравенства треугольника $\big||XA| - |XB|\big| \leqslant |AB|$. Поскольку все попарные расстояния между точками целые, количество возможных значений величины $\big||XA| - |XB|\big|$ не превосходит $|AB|$. Таким образом, все точки лежат на конечном числе гипербол $\big||XA| - |XB|\big| = c$; $c = 0, \ldots, |AB|$ с фокусами A и B.

При $c = 0$ и $c = |AB|$ эти гиперболы вырождаются в прямые (серединный перпендикуляр к отрезку $[AB]$ и прямая (AB) соответственно). На одной из них (гиперболе Γ) лежит бесконечное множество отмеченных точек, ибо множество M бесконечно.

Теперь возьмем пару точек $C \neq D$ из множества M, лежащие на Γ, и построим семейство гипербол Γ_i, с ними связанные. Поскольку множество отмеченных точек на Γ бесконечно, бесконечное подмножество из них лежат на одной из Γ_i, т. е. на пересечении $\Gamma \cap \Gamma_i$.

С другой стороны, любые две гиперболы либо совпадают, либо их пересечение состоит не более чем из четырех точек. Поэтому $\Gamma = \Gamma_i$. Поскольку фокусы гиперболы Γ_i лежат на Γ это возможно только, если они обе прямые. Обозначим эту прямую за l.

Поскольку не все точки из M лежат на одной прямой, есть отмеченная точка $O \in M$ не принадлежащая l. Пусть $Q \in M \cap l$.

Остается рассмотреть конечное семейство гипербол с фокусами Q и O (на которых лежат отмеченные точки) и их пересечение с прямой l. Поскольку ни одна из них не может совпасть с l, пересечение каждой из них с l состоит не более чем из двух точек, т. е. конечно. Значит, отмеченных точек на l конечно.

Получили нужное противоречие. Задача допускает пространственное обобщение.

б) Эта задача является контрапунктом к предыдущей.

Покажем, что на единичной окружности можно выбрать бесконечное множество точек такое, что попарные расстояния между ними рациональны. Если точки A, B отвечают углам φ и ψ, то расстояние между ними равно $2\sin((\varphi - \psi)/2)$. Поэтому если $\sin(n\varphi)$ рационален при всех n, то все попарные расстояния между точками $A_k = (\sin(2k/\varphi), \cos(2k/\varphi))$ рациональны.

С помощью равенств

$$\sin(k+1)\varphi = \sin(k\varphi)\cos(\varphi) + \cos(k\varphi)\sin(\varphi)$$

легко проверить по индукции что если $\sin(\varphi)$ и $\cos(\varphi)$ рациональны, то и $\sin(n\varphi)$ рационален при всех n. Если при этом градусная мера угла φ иррациональна, то точки A_k попарно различны и образуют искомое бесконечное множество.

Возьмем $\varphi = \arcsin 3/5$. Тогда $\sin(\varphi) = 3/5$, $\cos(\varphi) = 4/5$ так что $\sin(n\varphi)$ рационален при всех n. Остается проверить только, что градусная мера угла φ иррациональна.

А это доказывается аналогично решению задачи 12.1 (см. выше, с. 236). (*А. Я. Канель-Белов*)

14.5. Условие. Бесконечно Мудрый Таракан живет на плоскости. Он близорук и потому видит Истину, только когда находится не более, чем в одном шаге от нее. Первоначально Таракан находится в n шагах от Истины. Когда Таракан делает шаг, друзья говорят говорят ему, приблизился он к Истине, или нет. а) Докажите, что, пользуясь этой и только этой информацией, Таракан может достичь Истины менее чем за $n+10\ln n$ шагов. б) Докажите, что не существует алгоритма, позволяющего достичь Истины менее чем за $n + 0.1\ln n$ шагов.

Решение.

а) Опишем алгоритм. Он состоит из двух фаз.

1. Определение направления на Истину.

2. Путь по выделенному направлению.

Конусом возможных направлений K назовем множество возможных направлений на Истину из начальной точки. Это угол, величина которого *раствор* равен φ. Вначале $\varphi = 2\pi$. *Действие* состоит в паре шагов – шаг от начальной точки и шаг к ней обратно.

Лемма. *Существует действие, сокращающее раствор в* 2 *раза.*

Доказательство. Случай $\varphi = 2\pi$ проверяется непосредственно. Пусть $\vec{l}$ — вектор биссектрисы K, $\vec{m}$ — вектор перпендикулярного направления. Ясно, что действие, связанное с направлением m приводит к искомому сокращению: ответу «приблизился» отвечает половина K лежащая в угле между $\vec{l}$, $\vec{m}$, а ответу «удалился» отвечает половина K лежащая в угле между $\vec{l}$, $-\vec{m}$. Лемма доказана.

За $\log_2(n) + 2$ действий (т. е. $2[\log_2(n) + 3]$ шагов) можно определить направление на Истину с точностью до угла $\varphi = 2\pi/(4n)$, при этом уклонение сторон угла от биссектрисы составит $\pi/(4n) < \arcsin(1/n)$ так что после этого путь по биссектрисе приводит к успеху за $n + 1$ шаг.

б) Назовем шаг Таракана *разведывательным*, если его направление с направлением на деталь образует угол больше $\pi/3$. C есть *дуга возможных положений Истины*. Это дуга окружности с центром в начальной точке и радиусом n, такая, что любое положение на ней согласуется с ответами, полученными Роботом. Вначале это вся окружность.

Лемма 1. *Количество l разведывательных шагов не превосходит* $\log_2(n)/5$.

Доказательство. Разведывательные шаги приводят к приближению на величину, не превосходящую $l\cos\pi/3$. Поэтому общее число шагов не меньше $l+(n-l\cos\pi/3)=n+l(1-\cos\pi/3)=n+l/2$ и если $l>\log_2(n)$ то величина $n+l/2$ окажется больше $n+\log_2(n)/10$, что противоречит условию задачи. Лемма доказана.

Назовем *начальным участком* первые $n/3$ шага.

В справедливости следующего утверждения легко убедиться непосредственно.

Лемма 2. *После первого шага только разведывательный шаг приводит к изменению угла раствора. При этом C разбивается на две дуги, отвечающие ответам «приблизился» и «удалился» (возможно, одна из них пустая). Длина $|C'|$ наибольшей из них C' не превосходит $|C|/2$.*

Следствие. *Для любого алгоритма с l проверочными шагами существует положение Истины такое, что после начального участка угловой раствор дуги C будет не менее чем $\pi n/2^l$.*

Следующая лемма также проверяется непосредственно:

Лемма 3. *Пусть A — произвольная точка, тогда расстояние от A до самой далекой точки дуги C не меньше чем $d+|C|/2\sqrt{n}$.*

В силу леммы 1 тогда $|C|<\pi\cdot n/2^{\log_2 n/5}=\pi\cdot n^{4/5}$. И после первых $n/3$ шагов расстояние от положения Таракана до самой удаленной от него точки дуги C будет не меньше $2n/3+|C|/\sqrt{n}=2n/3+n^{0.3}/2$. Общее число шагов в наихудшем случае будет тогда не меньше чем $n/3+2n/3+n^{0.3}/2>$ $>n+\log_2(n)/10$. Задача решена. (*А. Я. Канель-Белов*)

14.6. Условие. $f(x,y)$ — бесконечно дифференцируемая функция от двух переменных с локальным минимумом в нуле. Других критических точек у ней нет. Верно ли, что этот минимум глобальный? (Точка называется *критической*, если в ней обе частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$ обращаются в нуль.)

Ответ: точка $(0,0)$ не обязательно является точкой глобального минимума!

Первое решение. Рассмотрим многочлен $P(x)=x^2+y^2(1-x)^3$. Тогда $\partial P/\partial x=2x-3y^2(1-x)^2$, $\partial P/\partial y=2y(1-x)^3$. Если $\partial P/\partial y=0$, то $y=0$ либо $x=1$. Если при этом $x=1$ и $\partial P/\partial x=0$ то $x=0$, что противоречит равенству $x=1$.

Итак, $y=0$. Тогда равенство $\partial P/\partial x=2x-3y^2(1-x)^2=0$ влечет равенство $x=0$. Итак, $(0,0)$ — единственная критическая точка P и легко проверить, что это точка локального минимума. Она не является точкой глобального минимума, поскольку P принимает сколь угодно большие по модулю отрицательные значения. В самом деле, пусть $y = 1$, тогда $P(x, 1) = x^2 + (1 - x)^3$. Ясно, что $P(x, 1) \to -\infty$ при $x \to \infty$.

(*В. О. Бугаенко*)

Второе решение. Рассмотрим функцию общего вида (т. е., ее критические точки образуют дискретное множество), имеющую изолированный локальный минимум, не являющийся глобальным. Рассмотрим связную односвязную область, содержащую этот локальный минимум, а также некоторую точку, в которой она принимает меньшее значение, и не содержащую никаких других критических точек. Голоморфным преобразованием переведем эту область во всю плоскость. Тогда заданная функция на области определит новую функцию на всей плоскости. Она и будет искомой.

(*В. Гальперин*)

14.7. Условие. Пусть d — нечетный делитель натурального числа $p - 1$. Докажите, что в p-ичной системе счисления существует d-значное число, равное определителю $d \times d$ матрицы, составленной из цифр этого числа и их циклических перестановок.

Решение. Обозначим

$$q = \frac{p^d - 1}{(p-1)d}\,.$$

Рассмотрим те кратные tq числа q, для которых выполняются условия $\frac{d-1}{2}(p-1) < t < \frac{d+1}{2}(p-1)$ и $(t, d) = 1$. Докажем, что каждое такое число равно определителю циркулянтной матрицы из его p-ичных цифр.

Под циркулянтной матрицей $C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мы понимаем матрицу вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ x_n & x_1 & x_2 & \ldots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_n & x_1 & \ldots & x_{n-2} \\ \hdotsfor{5} \\ x_2 & x_3 & x_4 & \ldots & x_1 \end{pmatrix}$$

Для определителя $\det C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ циркулянтной матрицы известна следующая формула:

$$\det C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} (x_1 + x_2\omega_j + x_3\omega_j^2 + \cdots + x_n\omega_j^{n-1}),$$

где ω_j — корни n-й степени из единицы.

Мы используем эту формулу в двух случаях (в обоих ответ можно также получить элементарными преобразованиями строк и столбцов циркулянтной матрицы). В первом случае числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют арифметическую прогрессию с суммой s и разностью h. В этом случае

$$C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = sn^{n-2}(-h)^{n-1}.$$

Во втором случае числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют геометрическую прогрессию вида $x_i = p^{n-i}$ для некоторого действительного числа p. В этом случае

$$C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (p^n - 1)^{n-1}.$$

Итак, рассмотрим число описанного выше вида. Обозначим через $A_1 = tq = \overline{a_1 a_2 \ldots a_d}$ его p-ичную запись, а через $A_i = \overline{a_i a_{i+1} \ldots a_d a_1 \ldots a_{i-1}}$ — i-ю циклическую перестановку, $i = 2, 3, \ldots, d-1$. Непосредственным перемножением матриц можно проверить, что

$$C(a_1, a_2, \ldots, a_d) C^T(p^{d-1}, p^{d-2}, \ldots, p, 1) = C(A_1, A_2, \ldots, A_{d-1}, A_d). \qquad (*)$$

Здесь C^T обозначает транспонированную матрицу. Из предыдущего имеем $\det C^T(p^{d-1}, p^{d-2}, \ldots, p, 1) = (p^d - 1)^{d-1}$.

Наша следующая цель — доказать два утверждения: (1) применением четного числа транспозиций строк и столбцов матрицу $C(A_1, A_2, \ldots, A_d)$ можно привести к виду $C(B_0, B_1, \ldots, B_{d-1})$, где $B_0, B_1, \ldots, B_{d-1}$ — перестановка чисел $A_1, A_2, \ldots, A_d$ в возрастающем порядке; (2) числа B_0, $B_1, \ldots, B_{d-1}$ образуют арифметическую прогрессию.

Начнем с доказательства утверждения (2). Заметим, что

$$A_{i+1} = pA_i - (p^d - 1)a_i.$$

Поэтому $A_i \equiv p^{i-1} A_1 \pmod{p^d - 1}$. Учитывая, что $(t, d) = 1$, отсюда следует, что числа $A_1, A_2, \ldots, A_d$ попарно различны и все они имеют одинаковый остаток по модулю $(p-1)q$. С другой стороны, все эти числа содержатся в интервале $(0, p^d - 1)$ длины $d[(p-1)q]$. Поэтому $A_1, A_2, \ldots, A_d$ — в точности все числа из интервала $(0, p^d - 1)$, имеющие один и тот же остаток по модулю $(p-1)q$. Значит, упорядоченный набор этих чисел образует арифметическую прогрессию с разностью $(p-1)q$. Из ограничений на t заключаем, что средний член $B_{(d-1)/2}$ этой прогрессии равен A_1, а ее сумма равна dA_1.

Теперь докажем (1). Обозначим $r = (d-1)/2$, так что $A_1 = B_r$.

Перестановками строк и столбцов за исключением первого преобразуем матрицу $C(A_1, A_2, \ldots, A_d)$ к виду

$$M = \begin{pmatrix} B_r & B_{r+1} & \dots & B_{d-1} & B_0 & \dots & B_{r-1} \\ B_{r-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_d & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{r+1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Этого можно добиться, сделав одинаковое количество транспозиций строк и транспозиций столбцов. Действительно, у циркулянтной матрицы первая строка, прочитанная слева направо, совпадает с первым столбцом, прочитанным снизу вверх. Аналогичное свойство выполняется и для матрицы M. Значит, упорядочить первую строку и первый столбец в некотором порядке можно, выполнив равное количество транспозиций строк и столбцов.

Мы докажем, что матрица M — циркулянтная. Из этого легко следует утверждение (1). Действительно, циклическая перестановка строк (столбцов) сохраняет циркулянтный вид матрицы и является четной перестановкой (так как d нечетно). После r таких перестановок матрица M (в предположении, что она циркулянтная) станет равной $C(B_0, \dots, B_{d-1})$.

Рассмотрим элемент матрицы M, который стоит на пересечении столбца, в первой строке которого стоит $B_i = A_x$, и строки, в первом столбце которой стоит $B_j = A_y$. Этот элемент равен B_k для некоторого k. Условие циркулянтности матрицы M равносильно $i + j \equiv k + r \pmod{d}$.

С другой стороны, исходная матрица $C(A_1, \dots, A_d)$ циркулянтная. Поэтому $B_k = A_m$ и $m + 1 \equiv x + y \pmod{d}$.

Поскольку A_i образуют геометрическую прогрессию по модулю $p^d - 1$, из последнего сравнения получаем $A_1 A_m \equiv A_x A_y \pmod{p^d - 1}$. Из равенств $A_1 = B_r$, $A_m = B_k$, $A_x = B_i$, $A_y = B_j$ получаем

$$\begin{aligned} A_x A_y \equiv B_i B_j \equiv (B_0 + iq(p-1))(B_0 + jq(p-1)) \equiv \\ \equiv B_0^2 + B_0(i+j)q(p-1) \pmod{p^d - 1} \end{aligned}$$

и

$$A_1 A_m \equiv B_0^2 + B_0(r+k)q(p-1) \pmod{p^d - 1}.$$

Поэтому

$$B_0(i+j)q(p-1) \equiv B_0(r+k)q(p-1) \pmod{p^d - 1},$$

т. е.

$$B_0(i+j) \equiv B_0(r+k) \pmod d.$$

Но $(B_0, d) = 1$, так что выполняется сравнение

$$(i+j) \equiv (r+k) \pmod d$$

и матрица M циркулянтная.

Для завершения доказательства напишем равенство определителей, которое вытекает из $(*)$:

$$\det C(a_1, \ldots, a_d)(p^d-1)^{d-1} = \det C(A_1, \ldots, A_d) = \\ = \det C(B_0, \ldots, B_{d-1}) = sd^{d-2}(-h)^{d-1} = \\ = dA_1 d^{d-2}[(1-p)q]^{d-1} = A_1(p^d-1)^{d-1}.$$

Отсюда получаем искомое равенство

$$C(a_1, a_2, ...a_d) = A_1.$$

Замечание. Для десятичной системы это доказательство дает такие числа, равные определителям циркулянтных матриц, составленных из их цифр: 456 790 123, 469 135 802, 493 827 160, 506 172 839, 530 864 197 и 543 209 876.

Некоторые 3-значные числа указанного вида содержат нули в десятичной записи. В этом случае определитель упрощается и мы получаем два числа, которые равны сумме кубов их цифр: $370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$ и $407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$. Тот факт, что оба эти числа делятся на 37, послужил толчком для придумывания данной задачи. Одна из первых формулировок этого факта имела такой вид:

Пусть $\overline{abc}$ — кратно 37. Докажите, что число $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ равно либо 0, либо еще одному кратному 37, составленному из десятичных цифр a, b и c.

(*Н. И. Белухов*)