Наш семинар: математические сюжеты

Проблема тринадцати шаров (элементарный подход)

Х. Маехара

Сколько единичных шаров могут одновременно касаться единичного шара в трехмерном пространстве, не пересекаясь друг с другом? Эта проблема, известная как проблема Ньютона – Грегори или проблема тринадцати шаров, стала предметом дискуссии между И. Ньютоном и Д. Грегори в 1694 г. Ответ следующий.

Теорема 1. *Максимальное число попарно непересекающихся единичных шаров, касающихся данного единичного шара, равно двенадцати.*

Первое доказательство этой теоремы было получено в 1953 г. Шутом и ван дер Варденом [17]. В 1956 г. Лич опубликовал двухстраничную работу [8] с наброском доказательства. Но проследить доказательство по этой работе трудно из-за значительных пробелов. За последние десять лет появились посвященные проблеме тринадцати шаров работы [1–5, 7, 11–16]. Мусин [13] решил аналогичную задачу в четырехмерном пространстве: максимальное число единичных шаров, касающихся четырехмерного единичного шара, равно 24. Он же, используя схожие методы, получил новое решение проблемы 13 шаров [14]. Кроме того, в работе [15] Мусин и Тарасов нашли максимально возможное значение d_{13} минимума сферических расстояний между 13 точками единичной сферы ($d_{13} \approx 57.1367°$) и доказали, что конфигурация, на которой достигается значение d_{13}, единственна с точностью до изометрии.

Перевод А. А. Заславского.

Мы приведем элементарное доказательство теоремы 1, полученное на основе работ [11, 12] и доступное старшеклассникам. Доказательства всех необходимых лемм и формул также будут представлены.

1. Терминология и обозначения

Обозначим через S^2 единичную сферу с центром в начале координат O трехмерного евклидова пространства. *Большим кругом* называется сечение S^2 плоскостью, проходящей через O. *Ребром* (или *отрезком*) называется дуга большого круга, меньшая π. Ребро с концами A, B (а также его длину) будем обозначать AB. Подмножество $W \subset S^2$ называется *выпуклым* если для любых двух точек из W соединяющее их ребро лежит в W. В дальнейшем под любой фигурой (дугой, треугольником, четырехугольником, кругом, окружностью и т. д.) подразумевается фигура на сфере S^2, если не оговорено иное. Треугольник ABC на S^2 — это выпуклая область на S^2, ограниченная тремя отрезками AB, BC, CA. Символ $\triangle(x, y, z)$ обозначает треугольник с длинами сторон x, y, z. *Шапкой* называется область S^2, ограниченная окружностью. если дан треугольник ABC, то $cap(ABC)$ обозначает шапку, ограниченную описанной окружностью ABC и содержащую ABC. *Центр* шапки лежит внутри нее, и сферическое расстояние от него до любой граничной точки называется *радиусом* шапки. Треугольник ABC называется *существенным*, если центр $cap(ABC)$ лежит внутри треугольника ABC. Дуга окружности с концами A, C, проходящая через B обозначается $\widehat{ABC}$. *Четырехугольником* $ABCD$ называется (не обязательно выпуклая) область S^2, ограниченная четырьмя отрезками AB, BC, CD, DA. Площадь треугольника или четырехугольника обозначается $|ABC|$, $|\triangle(x, y, z)|$, $|ABCD|$.

Пусть четырехугольник $ABCD$ является объединением треугольников ABC и ACD, как на рисунке 1. Если D не лежит внутри $cap(ABC)$, то диагональ AC называется *собственной диагональю* $ABCD$.

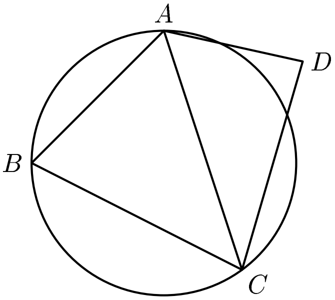

Рис. 1.

2. Основные формулы и леммы

Доказательства следующих формул и лемм приведены в разделе 4.

(2.1) Формула площади. $|ABC| = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$.

(2.2) Сферическая теорема косинусов. В $\triangle(x,y,z)$

$$\cos z = \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos\theta,$$

где θ — угол $\triangle(x,y,z)$, противоположный z.

Так как $\sin x \sin y > 0$, то $\cos z$ возрастает с ростом $\cos\theta$ при фиксированных x, y. Отсюда следует.

(2.3) При фиксированных x, y угол θ является монотонно возрастающей функцией z. $\square$

(2.4) Лемма Тота [6]. Пусть d — наименьшая сторона ABC. Если радиус *cap*(ABC) меньше, чем d, то $|ABC| \geqslant |\triangle(d,d,d)|$.

(2.5) Лемма о собственной диагонали [3, 9]. Пусть AC — собственная диагональ четырехугольника $ABCD$. Если $ABCD$ деформируется так, что длины его сторон остаются неизменными, а длина AC уменьшается, то $|ABCD|$ уменьшается.

Пусть ABC — *существенный треугольник*, а треугольник $AB'C$ симметричен ABC относительно плоскости ACO. Тогда AC — существенная диагональ четырехугольника $ABCB'$, являющегося объединением треугольников ABC, $AB'C$. Так как $|ABC| = |ABCB'|/2$, из леммы о собственной диагонали следует, что:

(2.6) При уменьшении стороны x существенного треугольника $\triangle(x,y,z)$ $|\triangle(x,y,z)|$ уменьшается. $\square$

Если P — центр *cap*(ABC), то общая точка луча $\overrightarrow{OP}$ с плоскостью ABC является центром описанной окружности плоского треугольника ABC. Следовательно, *треугольник ABC существенный тогда и только тогда, когда плоский треугольник ABC не тупоугольный*. Отсюда вытекает

(2.7) Для любых $x, y, z \in [\pi/3, \pi/2]$, $\triangle(x,y,z)$ существенный. $\square$

(2.8) Для любых $x, y \in [\pi/3, 2\pi/3]$, $\triangle(x,y,\pi/2)$ существенный. $\square$

3. Доказательство теоремы 1

Подмножество $X \subset S^2$ назовем $\dfrac{\pi}{3}$-*отделимым*, если сферическое расстояние между любыми двумя точками X не меньше $\dfrac{\pi}{3}$. Пусть два единичных шара касаются S^2 в точках P и Q. Из рисунка 2 видно, что эти шары не пересекаются тогда и только тогда, когда $\angle POQ \geqslant \dfrac{\pi}{3}$. Следовательно теорема 1 равносильна следующей.

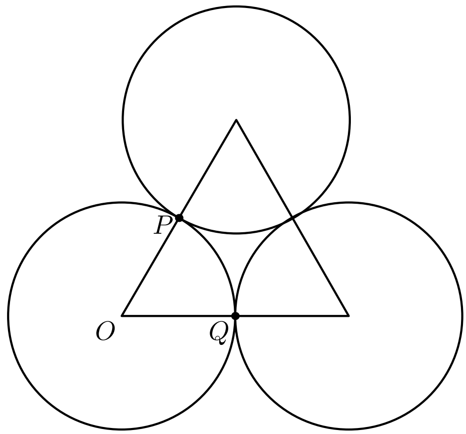

Рис. 2.

Теорема 2. *Максимальная мощность $\frac{\pi}{3}$-отделимого подмножества S^2 равна двенадцати.*

Мы будем доказывать теорему именно в этой формулировке. Обозначим через n максимальную мощность $\frac{\pi}{3}$-отделимого подмножества S^2. Надо доказать, что $n = 12$. Введем следующие символы a, b, δ.

$$a := \pi/3,\ b := \arccos(1/7) \approx 1.427,\ \delta := |\triangle(a,a,a)|.$$

Применяя (2.1) и (2.2), получаем:

$$\delta \approx 0.551, \qquad |\triangle(a,a,b)| \approx 0.667, \qquad |\triangle(a,b,b)| \approx 0.892,$$
$$|\triangle(b,b,b)| \approx 1.194, \quad |\triangle(a,\pi/2,\pi/2)| \approx 1.047, \quad |\triangle(a,a,\pi/2)| \approx 0.679.$$

Впишем в S^2 правильный икосаэдр. Проекции его ребер на S^2 из O разбивают S^2 на 20 равносторонних треугольников площади $4\pi/20 \approx 0.628$. Так как $0.628 > \triangle(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) \approx 0.551$, стороны этих треугольников больше, чем $\frac{\pi}{3}$. Значит вершины икосаэдра образуют $\frac{\pi}{3}$-отделимое множество, т. е. $n \geqslant 12$.

Пусть теперь $\mathcal{X} \subset S^2$ — $\frac{\pi}{3}$-отделимое множество максимальной мощности n. Выпуклая оболочка $\varGamma(\mathcal{X})$ множества $\mathcal{X}$ является выпуклым многогранником, вершины которого принадлежат $\mathcal{X}$. Точка O лежит внутри $\varGamma(\mathcal{X})$, так как иначе можно было бы добавить к $\mathcal{X}$ точку, не нарушая условия $\frac{\pi}{3}$-отделимости. Проекции ребер $\varGamma(\mathcal{X})$ на S^2 из O, разбивают S^2 на сферические многоугольники. Проведя, если необходимо, диагонали этих многоугольников, мы получим граф G на S^2, разбивающий S^2 на треугольники. Обозначим через t число получившихся треугольников G. Суммарная площадь этих t треугольников равна 4π. Применяя (2.1), получаем

$$4\pi = \text{сумма внутренних углов } t \text{ треугольников} - \pi t = 2\pi n - \pi t.$$

Следовательно

1° $t = 2n - 4$.

Так как O лежит внутри $\Gamma(\mathcal{X})$, а каждая грань $\Gamma(\mathcal{X})$ задает опорную плоскость к $\Gamma(\mathcal{X})$, получаем, что

2° Ни одна вершина G не лежит внутри описанной окружности треугольника G.

3° Поэтому каждое ребро G является собственной диагональю четырехугольника, полученного объединением двух треугольников, прилежащих к этому ребру.

4° Радиус описанной окружности каждого треугольника G меньше a (иначе центр этой окружности можно было бы добавить к $\mathcal{X}$, не нарушая $\frac{\pi}{3}$-отделимости).

По лемме Тота (2.4) и 4°, площадь каждого треугольника G не меньше, чем $\delta = |\triangle(a,a,a)|$. Так как $2n - 4 \leqslant 4\pi/\delta \approx 22.8$, то $n \leqslant 13$. Таким образом, чтобы доказать, что $n = 12$, достаточно доказать, что $n \neq 13$. Будем доказывать это от противного.

Предположим $n = 13$.

Лемма 1. *В этом случае в G есть не больше одного ребра длины $\geqslant b$.*

Доказательство. Из 1° и $n = 13$ следует, что $t = 22$. Пусть наибольшее ребро G — это общее ребро AC треугольников ABC и ACD, а e — следующее по длине ребро (а также его длина) G. Покажем, что $e < b$.

(i) Предположим сначала, что $e > \pi/2$. Деформируем четырехугольник $ABCD$, сохраняя длины его сторон так, чтобы AC стало равно $\frac{\pi}{2}$. Тогда $|ABCD|$ уменьшится по лемме о собственной диагонали (2.5), а так как длины всех ребер не меньше $\frac{\pi}{3}$, то по свойству 4° оба треугольника ABC, ACD будут существенными в силу (2.7) и (2.8). Если e является стороной $ABCD$, то

$$|ABCD| > |\triangle(a,\pi/2,\pi/2)| + \delta \approx 1.0472 + 0.5513$$

и $4\pi > 21\delta + 1.0472 \approx 12.624 > 4\pi$ — противоречие.

Если e не является стороной $ABCD$, то $|ABCD| > 2|\triangle(a,a,\pi/2)| \approx \approx 1.359$. Аналогично сумма площадей двух треугольников с общим ребром e не меньше, чем $2|\triangle(a,a,\pi/2)|$. Тогда $4\pi > (22-4)\delta + 2\times 1.359 \approx$ $\approx 12.642 > 4\pi$ — противоречие. Таким образом, $e \leqslant \pi/2$.

(ii) Теперь предположим, что $b \leqslant e \leqslant \pi/2$. Треугольники, отличные от ABC, ACD, существенные по (2.7). Если e — сторона $ABCD$, то $|ABCD| > |\triangle(a,b,b)| + |\triangle(a,a,b)|$, и, так как существует другой треугольник со стороной e:

$$4\pi \geqslant (22-3)\delta + 2|\triangle(a,a,b)| + |\triangle(a,b,b)| \approx 12.701 > 4\pi,$$

противоречие. Если e не является стороной $ABCD$, то сумма площадей двух треугольников с общим ребром e не меньше, чем $|\triangle(a,a,b)|$, и, значит, $4\pi \geqslant (22-4)\delta + 4|\triangle(a,a,b)| \approx 12.59 > 4\pi$ — противоречие. Следовательно $e < b$. Таким образом в G есть не больше одного ребра с длиной $\geqslant b$.

Лемма 2. *Пусть $\theta = \theta(x,y,z)$ — угол треугольника $\triangle(x,y,z)$, противоположный z. Если $a \leqslant x \leqslant y < b$ и $a \leqslant z$, то $\theta > \pi/3$.*

Доказательство. По (2.3) $\theta(x,y,z) \geqslant \theta(x,y,a)$. Положим $f(x,y,z) =$ $= \cos\theta$. Так как $f_y(x,y,z) = (\cos x - \cos y\cos z)/(\sin^2 y \sin x) > 0$ при $a \leqslant$ $\leqslant x \leqslant y < b$, то $f(x,y,a) < f(x,b,a)$. Поскольку

$$f_x(x,b,a) = \sqrt{3}(2 - 7\cos x)/(24\sin^2 x),$$

максимум $f(x,b,a)$ на интервале $a \leqslant x \leqslant b$ достигается при $x = a$ или $x = b$. Так как $f(a,b,a) = \dfrac{1}{2} > \dfrac{47}{96} = f(b,b,a)$, то $f(x,y,z) < f(a,b,a) = \dfrac{1}{2}$. Значит, $\cos\theta < \dfrac{1}{2}$, т. е. $\theta > \dfrac{\pi}{3}$.

Теперь, если в G нет ребер длины $\geqslant b$, то из леммы 2 следует, что степень каждой вершины G не больше 5. (Величина b была выбрана так, чтобы гарантировать это условие.) Однако G имеет $(22\times 3)/2 = 33$ ребра, так что средняя степень равна $66/13 > 5$ — противоречие. Поэтому в G ровно одно ребро длины $\geqslant b$. Пусть граф G_1 получается из G удалением этого ребра. Тогда степень каждой вершины G_1 не больше 5.

(1) G_1 — плоский граф с 32 ребрами и 21 гранью, одна из которых — четырехугольник, а остальные 20 — треугольники.

Поскольку сумма степеней вершин G_1 равна 64, то

(2) G_1 имеет одну вершину степени 4 и 12 вершин степени 5.

Так как $\triangle(x,y,z)$ является существенным при $x,y,z \in [a,b]$, площадь любого треугольника, образованного ребрами G_1 меньше $|\triangle(b,b,b)|$. Так как $3\delta > |\triangle(b,b,b)|$, внутри такого треугольника не может быть вершин. Значит,

(3) любой треугольник, образованный ребрами G_1, является гранью G_1.

Упражнение. Докажите, что не существует графа, удовлетворяющего условиям (1–3).

Указание. Начните анализ структуры такого графа с четырехугольной грани.

Отсюда следует, что $n \neq 13$, и теорема 2 доказана.

4. Некоторые факты сферической геометрии

4.1. Формула площади и сферическая теорема косинусов

Пусть дана точка $P \in S^2$. Точка $Q \in S^2$ называется *противоположной* P, если PQ — диаметр S^2. Точку, противоположную P, будем обозначать через P^*. Область S^2, ограниченную двумя большими кругами, проходящими через $P \in S^2$ и противоположную точку P^*, будем называть *лункой*. Если внутренний угол при вершине лунки равен θ, то ее площадь равна $4\pi \times \dfrac{\theta}{2\pi} = 2\theta$.

Формула площади. $|ABC| = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$.

Доказательство. Пусть A^*, B^*, C^* — точки, противоположные A, B, C, соответственно. Обозначим площади четырех образовавшихся треугольников через Δ, u, v, w (см. рисунок 3). Так как треугольники CA^*B^* и C^*AB

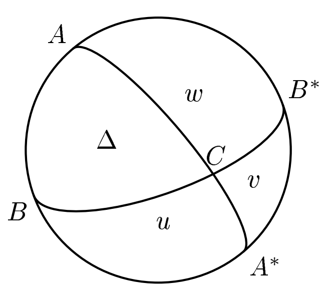

Рис. 3.

симметричны относительно центра O сферы S^2, $\Delta + v$ равно площади $2\angle C$ лунки CAC^*B. Значит $(\Delta + u) + (\Delta + v) + (\Delta + w) = 3\Delta + u + v + w$ равно суммарной площади трех лунок $2\angle A + 2\angle C + 2\angle B$. Поскольку $\Delta + u + v + w$ равно площади 2π полусферы, то $2\Delta + 2\pi = 2(\angle A + \angle B + \angle C)$, откуда и следует искомая формула. $\square$

Сферическая теорема косинусов. Пусть x, y, z — стороны ABC, противоположные вершинам A, B, C, соответственно. Тогда $\cos z = \cos x \cos y + \sin x \sin y \cos \angle C$.

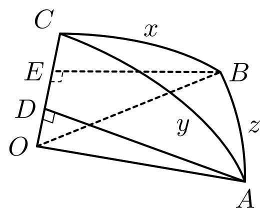

Рис. 4.

Доказательство. Пусть D, E — проекции точек A, B на прямую OC (см. рисунок 4). Угол между векторами $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{EB}$ равен $\angle C$. Так как $DA = \sin y$ и $EB = \sin x$, то $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EB} = \sin x \sin y \cos \angle C$. С другой стороны, поскольку $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \cos y\, \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OB} - \cos x\, \overrightarrow{OC}$, получаем, что

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EB} = (\overrightarrow{OA} - \cos y\, \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \cos x\, \overrightarrow{OC}).$$

Так как правая часть равна $\cos z - \cos x \cos y$, то

$$\cos z - \cos x \cos y = \sin x \sin y \cos \angle C. \qquad \square$$

4.2. Теорема Лекселя и лемма Тота

Теорема 3 (Сферическая теорема о вписанном угле [7, 9, 10]). *Рассмотрим треугольник ABC. Пусть P — центр* cap(ABC). *Тогда* $\angle C - (\angle A + \angle B) = \pm 2\angle PAB$, *со знаком* $(-)$ *если* $\widehat{ACB}$ *большая дуга, и* $(+)$ *в противном случае. Значит,*

$$\angle AXB - (\angle XAB + \angle XBA) \text{ постоянно при } X \in \widehat{ACB}.$$

Доказательство на рисунке 5. (Заметим, что надо еще рассмотреть случай несущественного треугольника.)

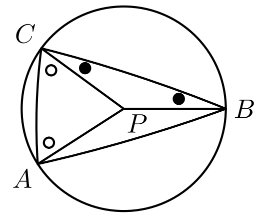

Рис. 5.

Следствие 1. $\widehat{ACB}$ *большая дуга (полуокружность) тогда и только тогда, когда* $\angle C < \angle A + \angle B$ $(\angle C = \angle A + \angle B)$. *В частности, если* $\angle C < \frac{\pi}{2}$, *то* $\widehat{ACB}$ *большая дуга.* $\square$

Теорема 4 (Теорема Лекселя). *Дан треугольник ABC. Пусть X — внутренняя точка полусферы, ограниченной большим кругом ABA^*B^* и содержащей C. Если $X \in \widehat{A^*CB^*}$, то $|ABX| = |ABC|$. Если X лежит внутри (вне) cap(A^*CB^*), то $|ABX| > |ABC|$ ($|ABX| < |ABC|$).*

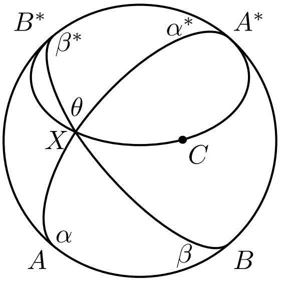

Рис. 6.

Доказательство [10]. На рисунке 6 видно, что, если $X \in \widehat{A^*CB^*}$, то $\theta - \alpha^* - \beta^*$ постоянно по теореме 3, т. е. $\theta - (\pi - \alpha) - (\pi - \beta)$ постоянно. Значит, $\theta + \alpha + \beta - \pi$ постоянно, что влечет $|ABX| = |ABC|$. Если X лежит на CA^* и $X \neq C$, то, очевидно, $|ABX| > |ABC|$. Поэтому, если X лежит внутри cap(A^*CB^*), то $|ABX| > |ABC|$. Аналогично, если X лежит вне cap(A^*CB^*), то $|ABX| < |ABC|$. □

Лемма 3 (Лемма Тота). *Пусть $d = AB$ — кратчайшая сторона треугольника ABC. Если радиус cap(ABC) меньше d, то*

$$|ABC| \geqslant |\triangle(d, d, d)|.$$

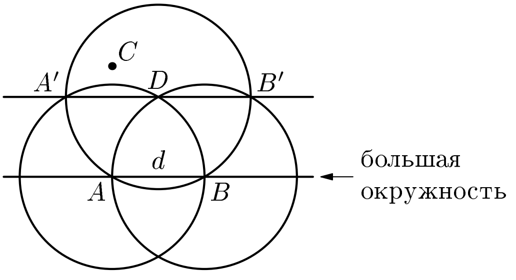

Рис. 7.

Доказательство. Проведем окружности радиуса d с центрами A, B (рисунок 7). Пусть D — точка пересечения этих окружностей, лежащая по ту же сторону от AB, что и C. Проведем окружность радиуса d с центром D. Пусть A', B' — вторые точки ее пересечения с окружностями с центрами B

и A, соответственно. Так как радиус $cap(ABC)$ меньше d, C лежит внутри $cap(ABA')$. Поскольку $|ABD| = |ABA'D|/2 = |ABA'| = |ABB'|$, получаем, что по теореме Лекселя $\widehat{A'DB'} \subset \widehat{A^*DB^*}$. Следовательно, C лежит внутри $cap(A^*DB^*)$, и по теореме Лекселя $|ABC| \geqslant |ABD|$. □

4.3. Изопериметрическая теорема и лемма о собственной диагонали

Лемма 4. *Пусть A, B, C — вершины $\triangle(x, y, z)$, противоположные x, y, z, соответственно. Если $\widehat{ABC}$ большая дуга, то $|\triangle(x, y, z)|$ уменьшается при уменьшении y. Если $\widehat{ABC}$ — полуокружность, то $|\triangle(x, y, z)|$ уменьшается при любом изменении y.*

Доказательство. (i) Предположим, что $\widehat{ABC}$ большая дуга. Тогда, по следствию 1, $\widehat{B^*A^*C}$ тоже большая дуга. Значит, центр $cap(B^*CA^*)$ и A^* лежат по одну сторону от B^*C. Тогда, если двигать C, не меняя A, B и сохраняя x постоянным, то $y = AC$ уменьшается, при выходе C из исходной $cap(A^*CB^*)$ (см. рисунок 8). По теореме Лекселя $|ABC|$ уменьшается.

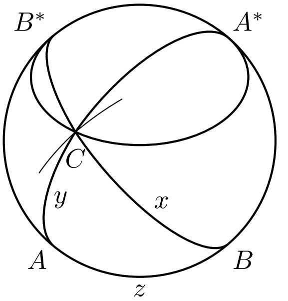

Рис. 8.

(ii) Пусть $\widehat{ABC}$ полуокружность. Тогда $\widehat{B^*A^*C}$ тоже полуокружность, и B^*C — диаметр $cap(B^*CA^*)$. Значит окружность с центром B и радиусом x касается дуги $\widehat{B^*CA^*}$ в точке C. Тогда, если двигать C, не меняя A, B, x, то C выйдет из исходной $cap(A^*CB^*)$. Следовательно, $|ABC|$ уменьшится. □

Следствие 2. *Площадь треугольника ABC с заданными $AB = z$, $BC = x$ (при $x + z < \pi$) максимальна, если $\widehat{ABC}$ полуокружность.* □

Следствие 3. *Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ с заданными $AB = x$, $BC = y$, $CD = z$ (при $x + y + z < \pi$) максимальна, когда $\widehat{ABD}$, $\widehat{ACD}$ полуокружности.*

Доказательство. Если $\widehat{ABD}$ ($\widehat{ACD}$) не является полуокружностью, то по лемме 4 можно изменить длину AD, оставляя неизменными x, y, z и BD ($|AC|$), так, что $|ABCD|$ увеличится.

Теорема 5 (Изопериметрическая теорема). *Если деформировать вписанный многоугольник, сохраняя длины сторон, то его площадь уменьшится.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ выпуклый четырехугольник, вписанный в окружность, x, y, z, w — длины его сторон (см. рисунок 9). Будем считать, что z — наибольшая сторона, а $w \geqslant y$. Пусть AP — диаметр шапки. Тогда

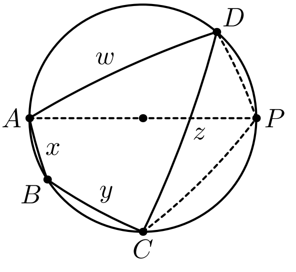

Рис. 9.

AP пересекает CD (возможно, $P = C$), и $w + DP < \pi$, $x + y + CP < \pi$ (так как описанная окружность не является большим кругом). Зафиксировав C, D, P и длины сторон x, y, z, w, деформируем четырехугольник в $A'B'CD$. По следствиям 2 и 3 $|A'PD| < |APD|$ и $|A'B'CP| < |ABCP|$. Следовательно,

$$|A'B'CD| \leqslant |A'B'CP| + |A'DP| - |CPD| < \\ < |ABCP| + |PAD| - |CPD| = |ABCD|.$$

□

Лемма 5. *Пусть $ABCD$ выпуклый четырехугольник, вписанный в окружность, и $AD \leqslant CD$. Если уменьшать AD, не меняя AB, BC, CD, то $|ABCD|$ уменьшается.*

Доказательство. Пусть $A'B'C'D'$ — выпуклый четырехугольник, полученный из $ABCD$ уменьшением AD при неизменных длинах остальных сторон. Зафиксировав вершины A', B', C' и длину $C'D'$, восстановим исходную длину $A'D'$, получив четырехугольник $A'B'C'D''$ (см. рисунок 10). Так как $A'D'' = AD \leqslant CD = C'D''$, $\widehat{A'C'D''}$ — большая дуга. По лемме 4 $|A'C'D''| > |A'C'D'|$, и, значит, $|A'B'C'D''| > |A'B'C'D'|$. Деформировав $A'B'C'D''$ во вписанный четырехугольник с сохранением длин сторон,

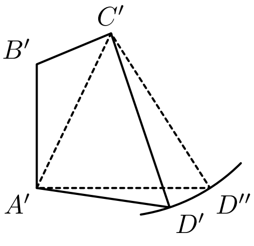

Рис. 10.

получим четырехугольник, равный $ABCD$. По изопериметрической теореме $|ABCD| \geqslant |A'B'C'D''|$, следовательно, $|ABCD| > |A'B'C'D'|$. $\square$

Лемма 6 (Лемма о собственной диагонали). *Пусть AC — собственная диагональ четырехугольника $ABCD$. При деформации, сохраняющей длины сторон $ABCD$ и уменьшающей длину AC, $|ABCD|$ уменьшается.*

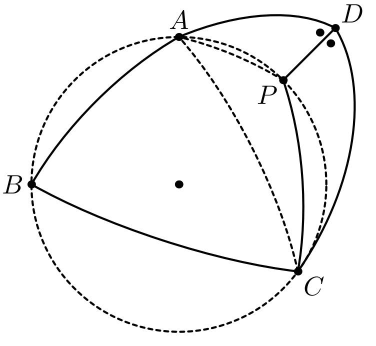

Рис. 11.

Доказательство. Если D лежит на границе $cap(ABC)$, то $|ABCD|$ уменьшается с уменьшением AC по изопериметрической теореме. Поэтому можно считать, что D лежит вне $cap(ABC)$. Пусть P — точка внутри треугольника ACD, лежащая на $\widehat{ACB}$, и такая, что DP — биссектриса $\angle D$. Тогда дуги $\widehat{ADP}$ и $\widehat{CDP}$ большие по следствию 1. Предположим, что $AP \leqslant CP$. Теперь, сохраняя CPD внутри $ABCD$, уменьшим AC. Тогда $\angle ADC$ уменьшается по (2.3). Значит, $\angle ADP$ и AP уменьшаются. Так как $\widehat{ADP}$ большая дуга, то $|ADP|$ уменьшается. С другой стороны, поскольку $AP \leqslant CP$, $|ABCD|$ уменьшается при уменьшении AP по лемме 5. Следовательно, при уменьшении AC $|ABCD|$ уменьшается. $\square$

Список литературы

[1] Anstreicher K. M. *The thirteen spheres: A new proof* // Discrete Comput. Geom. Vol. 31, 2004. P. 613–625.

[2] Bezdek K. *Sphere packing revisited* // European J. Combin. Vol. 27, 2006. P. 864–883.

[3] Böröczky K. *The Newton-Gregory problem revisited* // Discrete geometry (Ed. by A. Bezdek) New York: Marcel Dekker, 2003. P. 103–110.

[4] Böröczky K., Szabó L. *Arrangement of* 13 *points on a sphere* // Discrete geometry (Ed. by A. Bezdek) New York: Marcel Dekker 2003. P. 111–184.

[5] Casselman B. *The difficulty of kissing in three dimensions* // Notices Amer. Math. Soc. Vol. 51, 2004. P. 884–885.

[6] Fejes Tóth L. *On the densest packing of spherical caps* // Amer. Math. Monthly Vol. 56, 1949. P. 330–331.

[7] Hsiang Wu-Yi. *Least action principle of crystal formation of dense packing type and Kepler' conjecture* // Singapore: World Scientific, 2001.

[8] Leech J. *The problem of thirteen spheres* // Math. Gazette. Vol. 40, 1956. P. 22–23.

[9] Maehara H. *Geometry of circles and spheres*. [На японском] Tokyo: Asakura-shoten, 1998.

[10] Maehara H. *Lexell's theorem via an inscribed angle theorem* // Amer. Math. Monthly. Vol. 106, 1999. P. 352–353.

[11] Maehara H. *Isoperimetric theorem for spherical polygons and the problem of* 13 *spheres* // Ryukyu Math. J. Vol. 14, 2001. P. 41–57.

[12] Maehara H. *The problem of thirteen spheres — a proof for undergraduates* // European J. Combin. Vol. 28, 2007. P. 1770–1778.

[13] Musin O. R. *The kissing number in four dimensions* // Ann of Math. Vol. 168, no 1, 2008. P. 1–32.

[14] Musin O. R. *The kissing problem in three dimensions* // Discrete Comput Geom. Vol. 35, 2006. P. 375–384.

[15] Musin O. R., Tarasov A. S. *The strong thirteen sphere problem*. Preprint.

[16] Pfender F., Ziegler G. M. *Kissing numbers, sphere packings, and some unexpected proofs* // Notices Amer. Math. Soc. Vol. 51, 2004. P. 873–883.

[17] Schütte K., Waerden, van der, B. L. *Das Problem der dreizehn Kugeln* // Math. Ann. Bd. 125, 1953. S. 325–334.

Х. Маехара, Research Institute of Educational Development, Tokai University