Окружность, описанная вокруг многочлена

Ю. В. Вязовецкий А. С. Тихонов

1. Введение

Надеемся, название этой работы вас заинтересовало и заинтриговало. «Как такое возможно?» — воскликнет удивлённый читатель и наша ближайшая цель — представить соответствующие разъяснения. Хорошо известно (см. любой учебник по высшей алгебре [1–4,6,9,10]), что произвольный многочлен n-й степени имеет (с учётом их кратности) ровно n корней в комплексной плоскости. И для случая кубического многочлена без кратных корней мы всегда можем провести единственную окружность[1)], проходящую через три его корня[2)]. «Ну и что?» — воскликнет упрямый читатель, — «Подумаешь! Вокруг треугольника всегда можно описать окружность». И будет прав. Спорить не станем. Конечно, надо представить на ваш суд что-то более содержательное и об этом сейчас пойдёт речь.

С давних пор в математике большую пользу приносило взаимодействие и взаимопроникновение различных её ветвей: алгебраическими методами решались сложные геометрические задачи (начиная с изобретателя аналитической геометрии Р. Декарта) и, наоборот, геометрические методы с успехом использовались в алгебре, анализе и даже в физике. Одному примеру такого взаимодействия и посвящена данная работа.

Нашей целью является решение кубических уравнений в радикалах. Задача эта классическая и была решена ещё в 16-м веке: формулы Кардано дают полное решение.[3)] Мы хотим предложить геометрическую интерпретацию для них. Наши формулы не будут полностью совпадать с формулами Кардано, однако величины, участвующие в этих формулах, легко выражаются друг через друга. Таким образом, можно говорить о

[1)] Мы будем считать прямые предельным случаем окружностей, т. е. окружностью с бесконечно большим радиусом, как это принято в комплексном анализе.

[2)] С геометрической интерпретацией комплексных чисел можно ознакомиться в книге [5].

[3)] Однако сам Дж. Кардано, впервые опубликовавший эти формулы в 1545 г., указывает на авторство Н. Тартальи (1535). Исторически же первоизобретателем этого метода решения считается С. Ферро (1515).

Математическое просвещение, сер. 3, вып. 15, 2011(107–113)

некоторой модификации способа Кардано, которая имеет свои преимущества/недостатки.

Мы совершим наше путешествие по маршруту: Алгебра – Геометрия – Алгебра. В разделе 2 кратко излагаются необходимые сведения из теории дробно-линейных преобразований и обсуждаются их геометрические свойства. Во третьем разделе мы представляем основные геометрические соображения, лежащие в основе нашего решения, а затем в разделе 4 мы переводим их на язык алгебры.

2. Дробно-линейные преобразования и их свойства

Преобразования комплексной плоскости вида

$$w = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad ad - bc \neq 0\,, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

называются дробно-линейными преобразованиями. Дробно-линейные преобразования обладают следующими свойствами:

1. Круговое свойство: окружности при дробно-линейных преобразованиях переходят в окружности.

2. Консерватизм углов: при дробно-линейных преобразованиях углы между окружностями сохраняются.

3. Сохранение сопряжённости: точки, сопряжённые относительно окружности[4)], переходят в точки, сопряжённые относительно образа этой окружности.

4. Единственным дробно-линейным преобразованием, переводящим три различные точки z_1, z_2 и z_3 в три различные точки w_1, w_2 и w_3, соответственно, является преобразование, задаваемое формулой $\dfrac{(w-w_1)(w_3-w_2)}{(w-w_2)(w_3-w_1)} = \dfrac{(z-z_1)(z_3-z_2)}{(z-z_2)(z_3-z_1)}$.

Мы не будем здесь останавливаться на обосновании этих свойств и отошлем заинтересованного читателя к [5] или [8]. Чтобы читатель понимал все геометрическое богатство этих свойств, хотелось бы попутно отметить, что дальнейшая их разработка приводит к модели геометрии Лобачевского на евклидовой плоскости [8]. Однако, нам — в другом направлении.

[4)] Две точки называются сопряжёнными относительно окружности, если они лежат на одном и том же луче, выходящем из центра окружности, и произведение их расстояний от центра окружности равно квадрату радиуса этой окружности. В предельном случае сопряжёнными точками являются центр окружности и бесконечно удалённая точка ∞.

3. Геометрический этап решения

В этом разделе мы изложим геометрические идеи, лежащие в основе предлагаемого в работе способа решения кубических уравнений. Наша цель — найти корни уравнения третьей степени, записанного в общем виде

$$w^3 + aw^2 + bw + c = 0\,, \tag{1}$$

используя при этом дробно-линейные преобразования. Для этого рассмотрим дробно-линейное преобразование, которое переводит корни $z_1 = 1$, $z_2 = \epsilon$ и $z_3 = \epsilon^2$, где $\epsilon = -1/2 + i\sqrt{3}/2$, простейшего уравнения $z^3 = 1$ в корни данного уравнения w_1, w_2 и w_3, соответственно. Такое (единственное) преобразование существует. Более того, для него существует явная формула (см. предыдущий раздел). Обозначим через w_0 и w_∞ точки, в которые наше преобразование переводит точки 0 и ∞ (очевидно, они сопряжены относительно окружности, проходящей через корни уравнения). Назовём w_0 и w_∞ точками разрешимости для нашего уравнения[5)].

Для уравнения $z^3 = 1$ точки разрешимости — это 0 и ∞. Как легко видеть, они (и только они) являются неподвижными точками дробно-линейных преобразований, циклически переставляющих корни z_1, z_2, z_3, т. е. (в этом частном случае) поворотов на 120° вокруг начала координат, и переставляются при транспозициях корней (например, преобразование $w = 1/z$, которое сохраняет z_1 и переставляет z_2 и z_3, переставляет также 0 и ∞).

Для любой другой тройки точек w_1, w_2, w_3 точки разрешимости w_0 и w_∞ удовлетворяют тем же свойствам, поскольку эти свойства сохраняются при дробно-линейных преобразованиях[6)].

Точки разрешимости допускают и чисто геометрическое описание. Именно, для любых трёх различных точек w_1, w_2, w_3 точки разрешимости w_0 и w_∞ лежат на пересечении трёх окружностей (прямых) ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. Эти окружности задаются следующими свойствами:

- ▷ окружность ℓ_i проходит через w_i;
- ▷ окружности ℓ_i ортогональны к окружности, описанной вокруг w_1, w_2, w_3;

[5)] Мы будем также называть w_0 и w_∞ точками разрешимости и для треугольника, вершинами которого являются корни нашего уравнения w_1, w_2, w_3. Точки разрешимости пополняют богатое семейство замечательных точек в треугольнике (ортоцентр, барицентр, центры вписанной и описанной окружностей и т. д.)

[6)] Замечание для тех, кто знаком с теорией Галуа. Раз точки разрешимости, которые очевидным образом рационально выражаются через корни уравнения, сохраняются при циклических перестановках корней, то существует квадратное уравнение с коэффициентами, которые рационально выражаются через коэффициенты исходного уравнения, корнями которого являются точки разрешимости. В следующем разделе мы найдём это уравнение явно.

▷ окружности ℓ_i и ℓ_j образуют между собой в точках пересечения (т. е. в точках w_0 и w_∞) углы по 120° (см. рисунок 1).

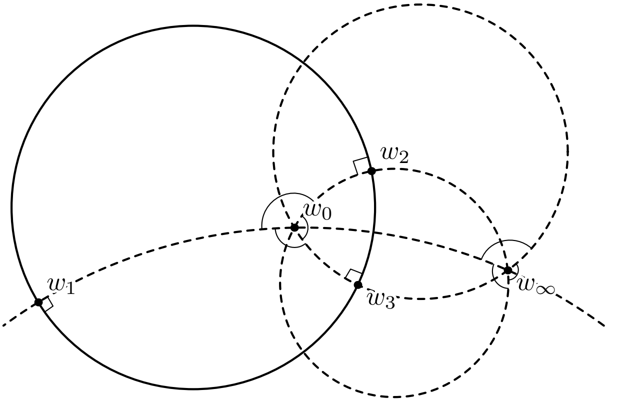

Рис. 1.

Ввиду свойств дробно-линейных преобразований, эти свойства достаточно проверить для точек разрешимости 0 и ∞ уравнения $z^3 = 1$. В этом случае окружности являются прямыми, проходящими через точки 1, ϵ и ϵ^2 и ортогональными единичной окружности. Очевидно, что эти прямые пересекаются в точках 0 и ∞ под углами 120°.

Можно также показать, что пара точек w_0 и w_∞ указанными тремя условиями определяется однозначно. Однако мы опустим обоснование этого факта, так как он нам не понадобится в дальнейшем.

Итак, мы получили геометрическую характеризацию точек разрешимости и доказали их существование для трёх произвольных различных точек комплексной плоскости (случай с кратными корнями требует отдельного рассмотрения).

Теперь осуществим преобразование

$$\omega = \frac{w - w_0}{w - w_\infty}\,, \tag{2}$$

которое переведёт точку w_0 в 0, а точку w_∞ — в ∞. Согласно свойствам дробно-линейных преобразований, оно переведёт корни данного уравнения в точки, лежащие в вершинах правильного треугольника с центром в точке 0. Можно показать, что полученные три точки удовлетворяют уравнению вида $\omega^3 = A$. Тогда задача решения кубического уравнения сведётся к вычислению величины A и нахождению точек разрешимости w_0 и w_∞. Этому посвящён следующий (алгебраический) раздел данной статьи.

4. Алгебраический этап решения

Заранее зная из геометрических соображений (см. предыдущий раздел), что преобразование (2) переведёт наше исходное кубическое уравнение (1) в уравнение $\omega^3 = A$, мы подставим $w = \frac{w_\infty \omega - w_0}{\omega - 1}$ (это дробно-линейное преобразование является обратным к преобразованию (2)) в исходное уравнение (1) и потребуем, чтобы коэффициенты в числителе при ω^2 и ω были равны 0. Тогда получаем систему

$$\begin{cases} 3w_\infty^2 w_0 + aw_\infty^2 + 2aw_\infty w_0 + bw_0 + 2bw_\infty + 3c &= 0 \\ 3w_\infty w_0^2 + aw_0^2 + 2aw_\infty w_0 + bw_\infty + 2bw_0 + 3c &= 0 \end{cases}.$$

Группируя, получаем

$$\begin{cases} w_\infty(3w_\infty w_0 + a(w_\infty + w_0) + b) + (aw_\infty w_0 + b(w_\infty + w_0) + 3c) &= 0 \\ w_0(3w_\infty w_0 + a(w_\infty + w_0) + b) + (aw_\infty w_0 + b(w_\infty + w_0) + 3c) &= 0 \end{cases}.$$

Учитывая, что $w_\infty \neq w_0$, имеем

$$\begin{cases} 3w_\infty w_0 + a(w_\infty + w_0) + b &= 0 \\ aw_\infty w_0 + b(w_\infty + w_0) + 3c &= 0 \end{cases}.$$

Решая последнюю систему относительно переменных $w_\infty w_0$ и $w_\infty + w_0$, находим

$$w_\infty + w_0 = \frac{9c - ab}{a^2 - 3b}, \qquad w_\infty w_0 = \frac{b^2 - 3ac}{a^2 - 3b}. \tag{3}$$

Таким образом, w_0 и w_∞ являются корнями квадратного уравнения

$$(a^2 - 3b)w^2 - (9c - ab)w + (b^2 - 3ac) = 0. \tag{4}$$

Заметим, что к успеху привело то, что мы точно знали вид преобразования (2). Если бы мы использовали дробно-линейное преобразование общего вида $\omega = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta}$, то получили бы систему из двух уравнений, но с четырьмя неизвестными. Анализ решений такой недоопределённой системы весьма затруднителен.

Величина A легко вычисляется $A = \frac{w_0^3 + aw_0^2 + bw_0 + c}{w_\infty^3 + aw_\infty^2 + bw_\infty + c}$ и, учитывая, что w_0 и w_∞ являются корнями квадратного уравнения (4), получаем

$$\omega^3 = \frac{3w_0 + a}{3w_\infty + a}. \tag{5}$$

Извлекая кубический корень и делая преобразование $w = \frac{w_\infty \omega - w_0}{\omega - 1}$, находим корни исходного уравнения (1).

В наших рассуждениях мы предполагали, что точки w_0 и w_∞ являются различными конечными точками комплексной плоскости. Для полноты решения следует рассмотреть вырожденные случаи:

1. Одна из точек w_0 или w_∞ является бесконечно удалённой, что алгебраически означает, что коэффициент при w^2 в (4) равен 0.

   Упражнение 1. Доказать, что условие $a^2 = 3b$ является необходимым и достаточным для того, чтобы корни уравнения (1) лежали в вершинах правильного треугольника и решения (1) задавались бы формулой $w_{1,2,3} = -a/3 + \sqrt[3]{a^3/27 - c}$.

2. Случай $w_0 = w_\infty$, что эквивалентно тому, что уравнение (1) имеет кратные корни, то есть

$$D^2 = [(w_1 - w_2)(w_2 - w_3)(w_3 - w_1)]^2 = \\ = a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c - 27c^2 + 18abc = 0\,.$$

   Упражнение 2. Доказать, что дискриминант уравнения (4) равен $-3D^2$ и в случае, когда $D = 0$, корни уравнения (1) находятся по формулам $w_{1,2} = \dfrac{9c - ab}{2(a^2 - 3b)}$ и $w_3 = \dfrac{2ab + 9c - a^3}{a^2 - 3b}$.

Осталось обсудить связь нашего подхода с формулами Кардано. Как известно [4], для приведённого кубического уравнения (то есть, когда в (1) $a = 0$), корни находятся по формулам Кардано

$$w_{1,2,3} = \sqrt[3]{\widetilde{w}_0} + \sqrt[3]{\widetilde{w}_\infty}\,,$$

где $\widetilde{w}_0$ и $\widetilde{w}_\infty$ являются корнями квадратного уравнения

$$w^2 + cw - \frac{b^3}{27} = 0\,.$$

В случае $a = 0$ уравнение (4) имеет вид $-3bw^2 - 9cw + b^2 = 0$, которое можно переписать в виде $\dfrac{b^2w^2}{9} + c\dfrac{bw}{3} - \dfrac{b^3}{27} = 0$. Откуда моментально следует, что $\widetilde{w}_0 = \dfrac{bw_0}{3}$ и $\widetilde{w}_\infty = \dfrac{bw_\infty}{3}$.

5. Заключение

Итак, привлекая дробно-линейные преобразования комплексной плоскости, мы можем дать геометрическую интерпретацию формул Кардано, а также имеем ещё один способ нахождения корней кубического уравнения. При этом точки разрешимости, вводимые в работе, а также окружность, проходящая через корни уравнения, играют решающую роль в нашем подходе.

Список литературы

[1] Варден, Ван дер, Б. Л. *Алгебра*. М.: Наука, 1976.

[2] Калужнин Л. А., Сущанский В. И. *Преобразования и подстановки*. М.: Наука 1979.

[3] Кострикин А. Н. *Введение в алгебру*. М.: Наука, 1977.

[4] Курош А. Г. *Курс высшей алгебры*. М.: Наука, 1968.

[5] Понарин Я. П. *Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах*. М.: МЦНМО, 2004.

[6] Прасолов В. В. *Многочлены*. М.: МЦНМО, 2001.

[7] Прасолов В. В., Соловьев Ю. П. *Эллиптические функции и алгебраические уравнения*. М.: Факториал, 1997.

[8] Привалов И. И. *Введение в теорию функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1977.

[9] Фаддеев Д. К. *Лекции по алгебре*. М.: Наука, 1984.

[10] Чезаро Э. *Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. Часть первая*. Одесса, 1913.

Ю. В. Вязовецкий, ученик 11-го класса гимназии им. А. П. Чехова, г. Ялта
А. С. Тихонов, доцент кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь
Email: `tikh@mail.ru`