Простое доказательство теоремы Абеля о неразрешимости уравнений в радикалах*

А. Б. Скопенков

Теорема Абеля. *Калькулятор имеет кнопки*

$$1, \quad +, \quad -, \quad \times, \quad : \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{} \quad \text{для любого } n.$$

Он оперирует с комплексными числами и при нажатии кнопки $\sqrt[n]{}$ *выдает все значения корня (и как-то их случайно нумерует). Калькулятор вычисляет числа с абсолютной точностью и имеет неограниченную память. При делении на 0 он выдает ошибку и прекращает работу.*

Тогда ни при каком $n \geqslant 5$ *не существует программы для этого калькулятора, которая по коэффициентам многочлена* n*-й степени выдает конечное множество чисел, содержащее все его корни.*

Комментарии по поводу понятия программы и другая формулировка приведены в пункте «путёвые перестановки для программы и коммутаторы».

В этой заметке мы покажем, как можно было бы придумать простое доказательство теоремы Абеля. Мы следуем изложению [11], которое упрощено по сравнению с [1] (не используется понятия римановой поверхности и гомотопии). В отличие от [11], здесь излагается способ *придумать* доказательство.[1)]

Для понимания самого доказательства достаточно прочитать определение путёвой перестановки из следующего пункта, пункт «план простого доказательства теоремы Абеля» и решения задач, на которые есть ссылки в этом пункте.

*Обновляемая версия: `www.mccme.ru/circles/oim/abel.pdf`

[1)]Заметка основана на занятиях кружка «Олимпиады и математика» и выездных школ команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду (`http://www.mccme.ru/circles/oim/mat.htm`). В одном месте (задача 7b, аналогично решаются задачи 8b и 9b) вместе с эвристическим рассуждением из [11] приводится и более строгое (которое мне сообщил А. Канель со ссылкой на А. Ногина). В отличие от [11], здесь используется понятие осторожного пути вместо рассуждений о перестановках башни значений радикальной формулы при обходе параметром замкнутого пути, не проходящего через особые точки радикальной формулы.

Заметим, что теорема (Галуа) о неразрешимости в радикалах *одного конкретного* уравнения [4, 5, 8] — более сильная.

Приводимое доказательство не использует терминов «группа Галуа» и «расширение поля». Несмотря на отсутствие этих *терминов*, *идеи* приводимого доказательства являются *отправными* для теории Галуа (более подробно см. [3, 7, 10]). Материал преподносится в виде задач, к которым даются указания. (И отсутствие терминов, и присутствие задач, характерно не только для дзенских монастырей, но и для серьезного изучения математики.) В конце приводятся задачи для исследования. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то это утверждение и надо доказать.

Благодарю М. Вялого, А. Канеля-Белова, Г. Челнокова и участников моих занятий за полезные обсуждения.

1. (a) Теорему Абеля достаточно доказать для уравнений 5-й степени.

(b) Теорему Абеля достаточно доказать для уравнений $z^5 - z + a = 0$.

(На самом деле, и необходимо, поскольку любое уравнение пятой степени сводится к написанному при помощи некоторой программы для нашего калькулятора.)

(c) (это не задача, а *загадка* [2]) Сформулируйте вещественный аналог теоремы Абеля. Вытекает ли он из комплексного? А комплексный из вещественного?

2. (a) У калькулятора оторвали кнопки $\sqrt[n]{}$. Теперь не существует программы для решения квадратного уравнения.

(b)* Не существует программы для решения кубического уравнения, использующей извлечение корня только один раз.

(c)* Не существует программы для решения уравнения 4-й степени, использующей извлечение корня не более двух раз.

Вряд ли у вас получится решить задачу 2c без знания дальнейшего материала. К ней нужно возвращаться по мере его изучения.

Путёвые перестановки

В этом и следующих двух пунктах калькулятор не используется (поэтому даже читатель, у которого возникли вопросы о работе калькулятора, может смело решать задачи).

3. (a) Руководитель кружка двигался по единичной окружности на комплексной плоскости, сделал один оборот и вернулся в исходную точку. Он велел ученику двигаться на комплексной плоскости так, чтобы координата z ученика в любой момент равнялась бы квадрату координаты a руководителя. Как пришлось двигаться ученику?

(b) На следующее занятие кружка на комплексную плоскость пришло два ученика. Руководитель встал в точке 1, а учеников расставил в точки 1 и -1. Потом он велел каждому ученику двигаться так, чтобы координата a руководителя в любой момент равнялась бы квадрату координаты z ученика. А сам пошел по единичной окружности на комплексной плоскости против часовой стрелки, сделал один оборот и вернулся в исходную точку 1. Как пришлось двигаться ученикам? Где они оказались в конце занятия?

4. На следующее занятие кружка на комплексную плоскость пришло уже n учеников. Руководитель не растерялся, встал в точке 1, а учеников расставил в точки $\cos(2\pi k/n) + i\sin(2\pi k/n)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Потом он сказал: «Моя координата равна n-й степени координаты любого из вас! Двигайтесь так, чтобы сохранить это замечательное свойство».

(a) Руководитель сам пошел по единичной окружности на комплексной плоскости против часовой стрелки, сделал один оборот и вернулся в исходную точку 1. Как пришлось двигаться ученикам? Где они оказались в конце занятия?

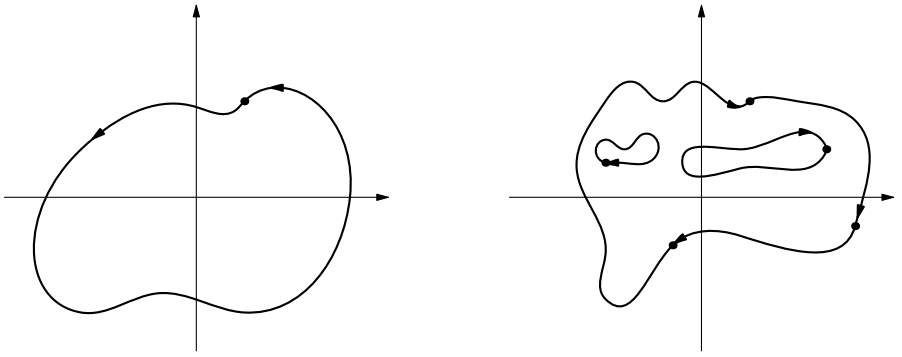
(b) Руководитель называется *добрым*, если он не проходит через 0. Для любого замкнутого маршрута доброго руководителя в конце занятия ученики переставятся.

(c) Для произвольного замкнутого маршрута доброго руководителя если в конце ученик 1 оказался в точке $\cos(2\pi k/n)+i\sin(2\pi k/n)$, то ученик $\cos(2\pi/n)+i\sin(2\pi/n)$ оказался в точке $\cos(2\pi(k+1)/n)+i\sin(2\pi(k+1)/n)$.

(d) Для произвольного замкнутого маршрута доброго руководителя в конце занятия ученики переставятся по степени некоторого цикла.

Определение путёвой перестановки. Пусть $p_a(z)$ — семейство многочленов степени n, коэффициенты которого (но не степень) непрерывно зависят от параметра a. Пусть уравнение $p_{a_0}(z) = 0$ имеет n различных корней, которые обозначены $z_1, \dots, z_n$. Будем изменять параметр a (руководитель) вдоль некоторого непрерывного замкнутого пути с началом и концом в a_0. Пусть для любой точки a этого пути уравнение $p_a(z) = 0$ имеет n различных корней. Будем двигать i-го ученика, начиная в z_i, и так, чтобы в каждый момент времени его координата была корнем уравнения $p_a(z) = 0$. Тогда в конце движения ученики переставятся.[2)] Назовем полученную перестановку n-элементного множества **путёвой** для семейства уравнений $p_a(z) = 0$ и данной нумерации корней уравнения $p_{a_0}(z) = 0$.

[2)] Для первого знакомства с приводимыми идеями читателю полезно воспользоваться без доказательства существованием такого движения учеников (ср. задачи 4bcd), а также использовать аналогичные наглядные соображения при решении задач 7b, 8b и 9b ниже. Строгое обоснование вытекает из *комплексной теоремы о неявной функции*.



изменение параметра a изменение корней

Рис. 1.

Это действительно перестановка, т. е. два ученика не могут в конце оказаться в одной точке (задача 4b). Цикл $(12\dots n)$ является путёвым для $p_a(z) = z^n - a$ и «естественной» нумерации его корней (задача 4a); все путёвые перестановки являются степенями этого цикла (задача 4d).

5. (a) Тождественная перестановка путёвая для любого семейства многочленов и любой нумерации корней.

(b) Как перестановка, отвечающая вышеописанному замкнутому пути, зависит от начальной нумерации корней?

С этого места мы пропускаем слова «для некоторой нумерации корней», говоря о путёвых перестановках.

Ответы и указания

4. (c) Если $x(t)$ — закон движения первого ученика, то $x(t)(\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n))$ — закон движения второго.

(d) Следует из (c).

5. (a) Если параметр a в процессе движения стоит на месте, то каждый корень остается на месте.

(b) *Ответ*: при перенумерации, заданной перестановкой α, перестановка σ, отвечающая вышеописанному замкнутому пути, перейдет в перестановку $\alpha\sigma\alpha^{-1}$.

Зачем нужны путёвые перестановки?

Если бы удалось доказать, что любая путёвая перестановка для семейства уравнений, разрешимого в радикалах, циклическая, то для доказательства теоремы Абеля достаточно было бы привести пример семейства

уравнений и нециклической путевой для него перестановки. Однако перестановка $(13)(24) = (1234)^2$ путёвая для $p_a(z) = z^4 - a$.

Хорошо было бы найти другое свойство путёвых перестановок для уравнений, разрешимых в радикалах, которое не выполняется для путёвых перестановок произвольных уравнений. Этого сделать не получится, ибо *любая перестановка является путёвой для некоторого семейства уравнений, разрешимого в радикалах, и некоторой нумерации корней*. (Действительно, если перестановка является произведением k циклов длин $n_1, \dots, n_k$, то искомое семейство уравнений — $\Pi_{s=1}^k((z - n_s)^{n_s} - a)$.)

И всё-таки мы докажем теорему Абеля. Мы найдем свойство *множества* всех путёвых перестановок для уравнения, разрешимого в радикалах, не выполненное для *множества* всех путёвых перестановок произвольного уравнения.

Покажем отправную идею на примере решения задачи 2а. (Это решение сложнее придуманного вами ранее, но зато обобщается до доказательства теоремы Абеля.)

6. (a) Для каких a уравнение $z^2 - 2z + a = 0$ имеет ровно два корня? (Здесь и далее имеются в виду комплексные корни.)

Ответ. Для $a \neq 1$.

(b) Как переставляются корни уравнения $z^2 - 2z + a = 0$ при следующем изменении параметра a?

Сначала от 0 до 0.99 по отрезку,

потом по окружности радиуса 0.01, обходящей вокруг точки 1 один раз

наконец, обратно от 0.99 до 0 по отрезку.

(c) Если $q(a)$ является отношением многочленов от a, то только тождественная перестановка является путёвой для $p_a(z) = z - q(a)$ (здесь путь параметра a не проходит через нули числителя и знаменателя).

(d) Выведите из (b,c) решение задачи 2а.

Ответы и указания

Обозначим $e^{it} := \cos t + i \sin t$. (В настоящем тексте это нужно воспринимать именно как обозначение. Свойство $e^{i(t_1+t_2)} = e^{it_1}e^{it_2}$ следует из формул для синуса и косинуса суммы.)

6. (b) Сначала корни приближаются к 1 с разных сторон. Чтобы корень двигался по закону $z(t) = 1 + \varepsilon e^{it}$, параметр a должен двигаться по закону $a(t) = 2z(t) - z^2(t) = 1 - \varepsilon^2 e^{2it}$. Поэтому возьмем $\varepsilon = 0.1$. Когда a совершит один оборот, каждый из корней совершит пол-оборота, т. е. они поменяются местами. Далее корни снова удалятся от 1.

Ответ: корни меняются местами.

Путёвые перестановки для уравнений 3-й, 4-й и 5-й степени

7. (a) Для каких a уравнение $z^3 - 3z + a = 0$ имеет ровно три корня?

Указание. Проще всего решать эту задачу при помощи следующих фактов:
– любой многочлен степени n имеет ровно n комплексных корней, и
– любой кратный корень многочлена является также корнем его производной.

Ответ. Для $a \neq \pm 2$.

(b) Как переставляются корни уравнения $z^3 - 3z + a = 0$ при следующем изменении параметра a?

Сначала от 0 до $2 - \delta_1$ по отрезку,
потом по кривой, «обходящей вокруг точки 2 один раз»,
наконец, обратно от $2 - \delta_2$ до 0 по отрезку.

(*В задачах* 7*bc*, 8*bc и* 9*bc выберите сами кривую и малые числа* δ_1, δ_2, *чтобы было удобно находить перестановку*.)

(c) Как переставляются корни уравнения $z^3 - 3z + a = 0$ при следующем изменении параметра a?

Сначала от 0 до $-2 - \delta_1$ по отрезку,
потом по кривой, «обходящей вокруг точки -2 один раз»,
наконец, обратно от $-2 - \delta_2$ до 0 по отрезку.

(d) Для $p_a(z) = z^3 - 3z + a$ все перестановки путёвые.

8. (a) Для каких a уравнение $z^4 - 4z + a = 0$ имеет ровно четыре корня?

Ответ. Для $a \neq 3, 3\alpha, 3\alpha^2$, где $\alpha = (1 + i\sqrt{3})/2$.

(b) Как переставляются корни уравнения $z^4 - 4z + a = 0$ при следующем изменении параметра a?

Сначала от 0 до $3 - \delta_1$ по отрезку,
потом по кривой, «обходящей вокруг точки 3 один раз»,
наконец, обратно от $3 - \delta_2$ до 0 по отрезку.

(c) Как переставляются корни уравнения $z^4 - 4z + a = 0$ при следующем изменении параметра a?

Сначала от 0 до $(3 - \delta_1)\alpha$ по отрезку,
потом по кривой, «обходящей вокруг точки 3α один раз»,
наконец, обратно от $(3 - \delta_2)\alpha$ до 0 по отрезку.

(d) Для $p_a(z) = z^4 - 4z + a$ все перестановки путёвые.

9. (a) Для каких a уравнение $z^5 - 5z + a = 0$ имеет ровно пять корней?

Ответ. Для $a \neq 4, 4i, -4, -4i$.

(b) Как переставляются корни уравнения $z^5 - 5z + a = 0$ при следующем изменении параметра a?

Сначала от 0 до $4 - \delta_1$ по отрезку,
потом по кривой, «обходящей вокруг точки 4 один раз»,
наконец, обратно от $4 - \delta_2$ до 0 по отрезку.

(c) Как переставляются корни уравнения $z^5-5z+a=0$ при следующем изменении параметра a?

Сначала от 0 до $(4-\delta_1)i$ по отрезку,

потом по кривой, «обходящей вокруг точки $4i$ один раз»,

наконец, обратно от $(4-\delta_2)i$ до 0 по отрезку.

(d) Для $p_a(z)=z^5-5z+a$ все перестановки путёвые.

10. Найдите все путёвые перестановки для

(a) $p_a(z)=z^4+2(1-2a)z^2+1$; (b) $p_a(z)=(z^3-a)^3-a(a-1)$.

Ответы и указания

7. (b) Ответ: корни $0,\sqrt{3}$ поменяются местами, корень $-\sqrt{3}$ остается на месте.

Зададим движение корня 0, по нему восстановим движение параметра a, а затем движение остальных корней. См. рис. 2.

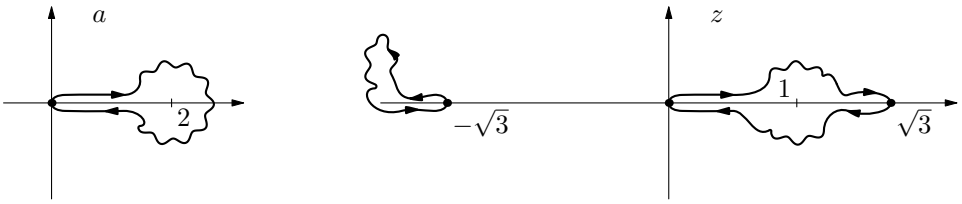


Рис. 2.

Сначала первый корень $z=0$ приближается к 1 слева и превращается в $1-\delta_1$. При этом $a=3z-z^3$ приближается к 2 слева. Значит, второй корень $\sqrt{3}$ приближается к 1 справа и превращается в $1+\delta_2$. А третий корень $-\sqrt{3}$ остается отрицательным. См. рис. 3.

Затем пусть первый корень идет в $1+\delta_2$ по некоторой кривой, близкой к 1 и не пересекающей вещественной оси нигде, кроме своих концов. Тогда второй корень остается близким к 1, а третий корень остается отрицательным. Значит, корень второй корень придет в $1-\delta_1$.[3)]

Далее первый корень приближается к $\sqrt{3}$ слева, примерно повторяя начальную часть движения второго корня в противоположном направлении. Значит, второй корень приближается к 0 справа, примерно повторяя начальную часть движения первого корня в противоположном направлении. А третий корень остается отрицательным.

[3)] Вот неформальная иллюстрация этого движения. Пусть первый корень движется по закону $z(t)=1+\delta_1 e^{it}$. Тогда параметр a движется по закону $a(t)=3z(t)-z^3(t)=$ $=2-3\delta_1^2e^{2it}-\delta_1^3e^{3it}$. Так как δ_1 мало, эта кривая близка к окружности $2-3\delta_1^2e^{2it}$. А значит, второй корень придет примерно в точку $1-\delta_1$ (ибо третий корень остается далеко).

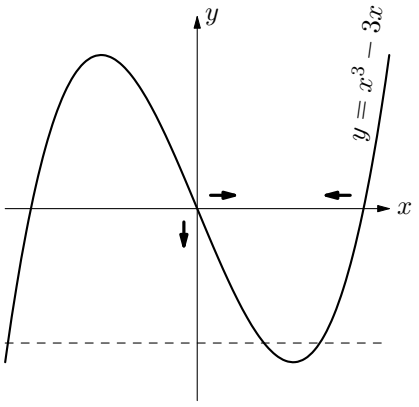


Рис. 3.

(c) *Указание*. Используйте нечетность.

Ответ: корни 0, $-\sqrt{3}$ поменяются местами, корень $\sqrt{3}$ остается на месте.

(d) Докажите, что любая перестановка 3-элементного множества представляется в виде композиции транспозиций (12) и (13).

8. (b) Аналогично задаче 7b корни 0, $\sqrt[3]{4}$ поменяются местами. Остальные два корня в процессе движения не пересекают ось Ox и поэтому в конце движения будут на своих прежних местах.

Ответ: корни 0, $\sqrt[3]{4}$ поменяются местами, остальные два корня остаются на месте.

(c) $p_{\alpha a}(\alpha z) = \alpha p_a(z)$.

Ответ: корни 0, $\sqrt[3]{4}\alpha$ поменяются местами, остальные два корня остаются на месте.

(d) Докажите, что любая перестановка 4-элементного множества представляется в виде композиции транспозиций (12), (13) и (14).

9. (b) Аналогично задачам 7b и 8b. Корни 0, $\sqrt[4]{5}$ поменяются местами, а остальные три корня вернутся на свои прежние места. (Ибо корни $i\sqrt[4]{5}$ и $-i\sqrt[4]{5}$ в процессе движения не пересекают вещественной оси, а корень $-\sqrt[4]{5}$ остается вещественным отрицательным.)

(d) Докажите, что любая перестановка 5-элементного множества представляется в виде композиции транспозиций (12), (13), (14) и (15). Для этого докажите, что

– любая перестановка 5-элементного множества является композицией циклов,

– любой цикл является композицией транспозиций,

– любая транспозиция является композицией транспозиций (12), (13), (14) и (15).

Осторожные пути

11. (a) Пусть $q(a)$ — отношение многочленов от a. Докажите, что все путёвые перестановки для $p_a(z) = z^n - q(a)$ являются степенью некоторого одного цикла.

(b)* Пусть существует программа для решения уравнения $p_a(z) = 0$, использующая извлечение корня только один раз. Обязательно ли все путёвые перестановки являются степенью некоторого одного цикла?

Наш калькулятор имеет неприятную особенность: результат вычислений не всегда однозначно определяется вводимыми данными (например, программа, выдающая *первое* значение $\sqrt{1}$, будет случайно выдавать 1 или -1). Эту неприятность можно преодолеть, осознав, что теорему Абеля достаточно доказать для «симметричных» программ для нашего калькулятора (или, эквивалентно, для похожего калькулятора, оперирующего с *множествами* комплексных чисел). Но всё равно будет непросто дать определение путёвой перестановки *для программы*, которое необходимо для решения задачи 11b. Мы поступим по-другому.

Радикальной формулой относительно $a_0, \dots, a_n$ называется (упорядоченный) набор рациональных функций (т. е. отношений многочленов) $p_1, \dots, p_s$ от $n+1, \dots, n+s$ переменных, соответственно, и целых положительных чисел $k_1, \dots, k_s$. Для радикальной формулы определим выражения

$$z_1, \dots, z_s \quad \text{формулой} \quad z_j^{k_j} = p_j(a_0, \dots, a_n, z_1, \dots, z_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Уравнение $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ с комплексными переменными коэффициентами называется *разрешимым в радикалах*, если существует радикальная формула относительно $a_0, \dots, a_n$, для которой любой корень уравнения является одним из значений одного из выражений $z_1, \dots, z_s$. Ср. [11, Chapter 5].

Мы докажем теорему Абеля в следующей эквивалентной форме: *ни при каком* $n \geqslant 5$ *уравнение* $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ *с комплексными переменными коэффициентами не является разрешимым в радикалах*.

Для доказательства теоремы Абеля полезно следующее понятие. Назовем замкнутый путь на плоскости **осторожным** для данной радикальной формулы, в которой $a_0, \dots, a_n$ зависят от параметра a, если при изменении параметра a вдоль этого пути каждое значение каждого выражения z_s возвращается на место.

12. (a) Если путь является осторожным относительно каждой из двух радикальных формул $p_1, \ldots, p_s; k_1, \ldots, k_s$ и $q_1, \ldots, q_t, l_1, \ldots, l_t$, то он является осторожным относительно их *суммы* $p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_t, p_s{+}q_t; k_1, \ldots, k_s, l_1, \ldots, l_t, 1$.

(b) Определите разность, произведение и частное радикальных формул. Докажите для них аналог предыдущего пункта.

(c) *n-й степенью* замкнутого пути называется новый замкнутый путь, который получается прохождением исходного пути n раз. Если путь является осторожным относительно радикальной формулы $p_1, \ldots, p_s; k_1, \ldots, k_s$, то его n-я степень является осторожной относительно радикальной формулы $p_1, \ldots, p_s, z_s; k_1, \ldots, k_s, n$.

(d) $k_1 \cdot \ldots \cdot k_s$-я степень любого пути является осторожной относительно радикальной формулы $p_1, \ldots, p_s; k_1, \ldots, k_s$.

(e) Если семейство уравнений $p_a(z) = 0$ разрешимо при помощи радикальной формулы $p_1, \ldots, p_s; k_1, \ldots, k_s$, то $k_1 \cdot \ldots \cdot k_s$-я степень любой путёвой перестановки тождественна.

Последним утверждением нельзя воспользоваться для доказательства теоремы Абеля, ибо любая перестановка в некоторой степени равна тождественной.

Коммутатором двух замкнутых путей называется новый замкнутый путь, который получается последовательным прохождением
– первого пути,
– второго пути,
– первого пути в обратную сторону,
– второго пути в обратную сторону.

13. (a) Если оба пути — осторожные относительно радикальной формулы $p_1, \ldots, p_s; k_1, \ldots, k_s$, то их коммутатор — осторожный относительно радикальной формулы $p_1, \ldots, p_s, z_s; k_1, \ldots, k_s, n$.

(b) Если существует программа для решения уравнения $p_a(z) = 0$, использующая одноэтажные извлечения корней, то любые две путёвые перестановки коммутируют (т. е. $\sigma\tau = \tau\sigma$).

(c) Не существует программы для решения кубического уравнения, использующей одноэтажные извлечения корней.

(Сравните с задачей 2b и вашим решением ее.)

14. (a) Какое условие на множество путёвых перестановок следует из существования программы для решения уравнения $p_a(z) = 0$, использующей не более, чем двухэтажное извлечение корня?

(b) Выведите из вашего решения пункта (a) и задачи 8d решение задачи 2c.

15. (a) Какое условие на множество путёвых перестановок следует из существования программы для решения уравнения $p_a(z) = 0$, использующей не более, чем трехэтажное извлечение корня?

(b) Существуют две не коммутирующие перестановки 5-элементного множества, каждая из которых является коммутатором некоторых двух произведений коммутаторов.

(c) Выведите из (a,b) и задачи 9 необходимость наличия хотя бы трех этажей в программе, якобы решающей семейство уравнений $z^5 - z + a = 0$.

(d) Докажите теорему Абеля.

Ответы и указания

11. (a) Аналогично задачам 4cd.

13. (a) Значение выражения z_s возвращается на место в результате обхода числом a каждого из двух данных замкнутых путей L_1 и L_2. Поэтому n значений выражения z_{s+1} имеют вид $x, x\varepsilon, x\varepsilon^2, x\varepsilon^3, \dots, x\varepsilon^{n-1}$ для некоторого x и $\varepsilon := \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$. Аналогично задаче 4d для любого замкнутого пути L найдется такое $k(L)$, что в результате изменения параметра a вдоль этого пути число $x\varepsilon^s$ переходит в число $x\varepsilon^{s+k(L)}$. Поэтому в результате прохождения параметром a коммутатора путей L_1 и L_2 число $x\varepsilon^s$ переходит в число $x\varepsilon^{s+k(L_1)+k(L_2)-k(L_1)-k(L_2)}$.

(b) Следует из (a).

14. (a) *Подсказка.* Условие $\sigma\tau = \tau\sigma$ (на перестановки) равносильно тождественности перестановки $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$. Эта перестановка называется *коммутатором* перестановок σ, τ. Если имеется двухэтажная формула, то для путёвых перестановок σ, τ коммутатор (т. е. перестановка $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$) может не быть тождественным. Однако для коммутаторов выполняется некоторое условие. Найдите его!

Ответ. Если существует программа для решения уравнения $p_a(z) = 0$, использующая не более, чем двухэтажное извлечение корня, то коммутаторы путёвых перестановок коммутируют. (Даже произведения коммутаторов путёвых перестановок коммутируют.)

Доказательство аналогично решению задачи 13a.

15. (a) Если существует программа для решения уравнения $p_a(z) = 0$, использующая не более, чем трехэтажное извлечение корня, то коммутаторы коммутаторов путёвых перестановок коммутируют. (Даже произведения коммутаторов произведений коммутаторов путёвых перестановок коммутируют.) Доказательство аналогично задачам 13ab и 14a.

(b) Пример можно придумать напрямую или доказав, что любая четная перестановка является произведением коммутаторов. (Определение четной перестановки напомнено ниже.)

План простого доказательства теоремы Абеля

Мы довольно долго *придумывали* доказательство теоремы Абеля. *Изложить* же доказательство можно совсем коротко. (Освобождение доказательства от деталей, возникших при его придумывании и не нужных для него самого — важная часть его проверки.) Приведем план такого изложения.

Теорема Абеля вытекает из следующих трех лемм. Для их формулировки введем следующее определение (которое поможет нам коротко произносить громоздкие конструкции, возникшие в задачах 13b, 14a и 15a). Для данного семейства уравнений $p_a(z) = 0$ назовем 0-*путёвыми* путёвые перестановки. Если уже определены n-путёвые перестановки, то назовем перестановку $(n+1)$-*путёвой*, если она представляется в виде композиции коммутаторов некоторых n-путёвых перестановок.

Лемма о коммутаторах. *Если существует программа для решения семейства уравнений $p_a(z) = 0$, использующая не более, чем n-кратное извлечение корня, то лишь тождественная перестановка является n-путёвой для этого семейства.*

Лемма о примере уравнения. *Существует такое семейство $p_a(z)$ уравнений 5-й степени, множество всех путёвых перестановок которого совпадает с множеством всех перестановок 5-элементного множества.*

Лемма о четных перестановках. *Любая четная перестановка 5-элементного множества является произведением коммутаторов четных перестановок.*

Напомним, что перестановка называется *четной*, если она представляется в виде произведения циклов длины 3. (Это определение равносильно общепринятому.)

Лемма о коммутаторах следует из задачи 13a (аналогично задачам 13b, 14a, 15a). Лемма о примере уравнения следует из задачи 9d. Доказательство леммы о четных перестановках — задача (*указание*: достаточно доказать, что таковым является цикл длины 3).

Задачи для исследования

В математике имеется много результатов, непосредственно связанных с теоремой Абеля. См., например, [6, 9].

Следующие задачи показывают, что метод Феррари для решения уравнения 4-й степени «самый простой», а формула дель Ферро – Кардано – Тартальи в виде

$$x = \frac{1}{2}\Big(\sqrt[3]{-a + \sqrt{a^2 - 4}} - \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 4}}\Big)$$

для решения кубического уравнения $x^3 - 3x + a = 0$ — не «самая простая».

16. Существует программа для калькулятора, строящая по числу a конечное множество, содержащее все корни уравнения $x^3 - 3x + a = 0$, и содержащая только одно извлечения корня из выражения, содержащего корни.

17. Не существует

(a) формулы вида $z = \sqrt[k]{p + \sqrt[l]{q + \sqrt[m]{r}}} + \sqrt[n]{s + \sqrt[o]{t}}$ для решения уравнения $x^4 - 4x + a = 0$ ни для каких целых положительных k, l, m, n, o и рациональных функций p, q, r, s, t от a.

(b) программы, строящей по числу a конечное множество, содержащее все корни уравнения $x^4 - 4x + a = 0$, и содержащей только одно «трехэтажное» извлечения корня.

18. Существует ли программа для *вещественного* аналога калькулятора, определенного в начале заметки, находящая все *вещественные* корни

(a) уравнения $x^3 + px + q = 0$ по его коэффициентам p, q?

(b) уравнения $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ по его коэффициентам p, q, r?

(c) уравнения $x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ по его коэффициентам p, q, r, s?

19. Добавим к калькулятору кнопку, выдающую по числу $\cos\alpha$ все значения числа $\cos(\alpha/5)$. Появится ли программа для решения уравнения 5-й степени?

Задачи 16 и 17 несложны. (Задачу 16 можно решить, не используя изложенных выше идей, а задачу 17 — вряд ли.) К сожалению, автору не удалось найти в литературе ответы на естественные вопросы задач 18 и 19 (хотя, видимо, ответы известны специалистам).

Ответы и указания

16. $b := \frac{1}{2}\sqrt[3]{-a + \sqrt{a^2 - 4}}$ и $x := b - \frac{1}{b}$.

17. Если бы такая формула/программа существовала, то все коммутаторы произведений коммутаторов (перестановок 4-элементного множества) были бы степенью некоторой одной перестановки. А это не так.

Список литературы

[1] Алексеев В. Б. *Теорема Абеля*. М.: Наука, 1976.

[2] Виро О. Я., Иванов О. А., Нецветаев Н. Ю., Харламов В. М. *Элементарная топология*. М.: МЦНМО, 2010.

[3] Козлов П., Скопенков А. *В поисках утраченной алгебры*: *в направлении Гаусса* (*подборка задач*) // Мат. Просвещение, сер. 3, вып. 12, 2008. С. 127–144. Эл. версия: `http://arxiv.org/abs/0804.4357`

[4] Колосов В. А. *Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики*. М.: Гелиос, 2001.

[5] Прасолов В. В. *Многочлены*. М.: МЦНМО, 2003. Эл. версия: http://www.mccme.ru/prasolov

[6] Прасолов В. В., Соловьев Ю. П. *Эллиптические функции и алгебраические уравнения*. М.: Факториал, 1997.

[7] Скопенков А. *Философски-методическое отступление* // Сборник материалов московских выездных математических школ. Под ред. А. Заславского, Д. Пермякова, А. Скопенкова, М. Скопенкова и А. Шаповалова. М.: МЦНМО, 2009. Эл. версия: `http://www.mccme.ru/circles/oim/mvz.pdf`

[8] Тихомиров В. М. *Абель и его великая теорема* // Квант, №1, 2003. С. 11–15.

[9] Хованский А. Г. *Топологическая теория Галуа*. Москва, МЦНМО, 2008.

[10] Челноков Г. Р. *Основы теории Галуа в интересных задачах*. `http://www.mccme.ru/circles/oim/materials/grishalois.pdf`.

[11] Fuchs D., Tabachnikov S. *Mathematical Omnibus*. AMS, 2007.

А. Б. Скопенков, механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Независимый московский университет, Московский институт открытого образования
Инфо: `http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/PAPERSCI.pdf`
e-mail: `skopenko@mccme.ru`