

Четырехвалентные графы с крестовой структурой

В. О. Мантуров

Одним из важнейших классов графов является класс *крестовых графов*: таковыми мы будем называть четырехвалентные графы, у которых в каждой вершине указывается разбиение четырех полурёбер, инцидентных каждой вершине графа, на две пары «противоположных». Понятие противоположности будет важно при вложениях крестовых графов в поверхности: будем говорить, что вложение графа в двумерную поверхность *согласовано с крестовой структурой*, если полурёбра, противоположные в вершине, являются противоположными на поверхности. Любой четырехвалентный граф, вложенный в поверхность, естественным образом наследует из этой поверхности крестовую структуру. Будем называть не противоположные полурёбра, инцидентные одной вершине, *соседними*.

На протяжении всей статьи графы подразумеваются связными и конечными; петли и кратные ребра допускаются (иногда графы с петлями и кратными ребрами называют *мультиграфами*).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для определения валентности графа в вершине удобно ввести понятие *полурёбра*. Добавляя на каждом ребре графа по новой вершине, мы получим разбиение ребер на *полурёбра*. Полурёбра удобны для подсчета валентности вершин графа: если вершина исходного графа инцидентна некоторому ребру дважды, то это значит, что на преобразованном графе эта вершина инцидентна двум разным полурёбрам.

Крестовые графы могут возникнуть следующим образом. Пусть S — двумерная поверхность, а Γ — вложенный в поверхность S произвольный граф. Построим *срединный* (*медиальный*) граф $M(S, \Gamma)$ следующим образом. Вершинами нового графа будут середины ребер исходного графа, а рёбра нового графа будут строиться следующим образом: каждое ребро будет соответствовать *углу*, т. е. паре соседствующих ребер и вершине между ними. Вообще говоря, если два ребра графа Γ имели две общие концевые вершины, то на графе $M(S, \Gamma)$ две соответствующие этим ребрам вершины будут соединены двумя различными ребрами, см. рис. 1.

Полученный граф $M(S, \Gamma)$ будет четырехвалентным: у каждого ребра имеются два соседних ребра с одного конца и два соседних ребра с другого

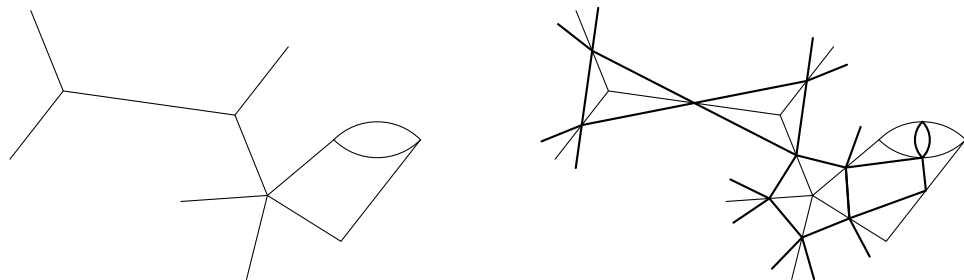


Рис. 1. Построение медиального графа

конца; более того, на данном графе естественным образом определяется наследуемая из поверхности крестовая структура.

Рассмотрим простейший четырехвалентный граф с одной вершиной и двумя ребрами, ей инцидентными. Отметим, что на этом графе имеется две разные крестовые структуры. В одной крестовой структуре два полуребра одного ребра являются противоположными, а в другой крестовой структуре они являются соседними. Отметим, что первый крестовый граф Γ_1 не вложим в плоскость, а второй крестовый граф вложим в плоскость, см. рис. 2.

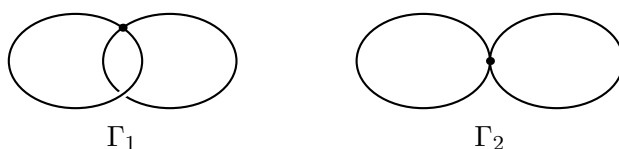
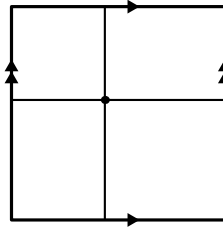


Рис. 2. Простейший граф и две его крестовые структуры

Как оказывается, граф Γ_1 естественным образом вложим в тор с сохранением крестовой структуры: представляя тор в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами, мы можем изобразить на торе граф Γ_1 в виде параллели и меридиана с одной точкой пересечения, см. рис. 3.

Граф Γ_1 не вложим в плоскость: действительно, предположив, что одна окружность вложена в плоскость, мы получим (по теореме Жордана) две области, на которые она делит плоскость. Вторая окружность, проходя через точку перекрестья, должна переходить из одной области в другую, откуда она не может возвратиться.

Как оказывается, граф Γ_1 в некотором смысле является единственным препятствием планарности крестового графа. А именно, имеет место следующая

Рис. 3. Вложение графа Γ_1 в тор

ТЕОРЕМА 1. *Граф не вложим в плоскость тогда и только тогда, когда у него имеются два цикла без общих ребер, обладающие единственной точкой перекрестья.*

Дадим некоторые пояснения. *Циклом* мы называем непрерывное отображение окружности в граф, взаимно однозначное вне прообразов вершин графов. Этим мы подчеркиваем, что в цикле каждое ребро встречается не более одного раза. Мы говорим, что два цикла без общих ребер имеют *перекрестье* в некоторой вершине v , если один из них содержит одну пару противоположных полуребер в этой вершине, а другой — вторую. При этом в формулировке теоремы не накладывается никаких ограничений на количество (нетрансверсальных) пересечений двух циклов. Далее мы будем называть *препятствием Васильева* два цикла без общих ребер, имеющие единственную точку перекрестья.

Ясно, что на плоскости нельзя изобразить две несамопересекающиеся замкнутые кривые, которые бы имели перекрестье в одной точке. С другой стороны, если две кривые «касаются» в нескольких точках, то эти касания можно «развести» в точках нетрансверсального пересечения так, как показано на рис. 4.

Таким образом, предполагая, что граф вложен в плоскость с сохранением крестовой структуры, мы можем «развести» два цикла во всех

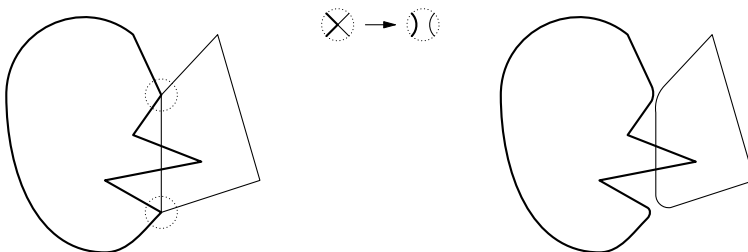


Рис. 4. Устранение нетрансверсальных пересечений

точках, где они пересекаются не трансверсально; если окажется, что при этом останется ровно одна точка перекрестья, то это будет противоречить планарности графа.

Приведенный выше результат был выдвинут в качестве гипотезы В. А. Васильевым [1] и доказан автором настоящей статьи в [3].

Простая часть гипотезы следует из приведенных выше рассуждений; доказательству сложной части (о том, что если граф не вложим в плоскость, то два таких цикла обязательно найдутся) посвящена оставшаяся часть настоящей статьи.

1. ПОВОРАЧИВАЮЩИЕ ОБХОДЫ. ХОРДОВЫЕ ДИАГРАММЫ

Назовем *хордовой диаграммой* конечный трехвалентный граф, состоящий из цикла, проходящего через все вершины (*окружности хордовой диаграммы*) по одному разу и оставшихся ребер, которые мы будем называть *хордами* хордовой диаграммы. Такие хордовые диаграммы рассматриваются с точностью до эквивалентности — изоморфизма графов, переводящего окружность в окружность. Хордовую диаграмму будем называть *ориентированной*, если ориентирована ее окружность; для ориентированных хордовых диаграмм изоморфизм предполагает сохранение ориентации.

Назовем *поворачивающим обходом* такой способ прохождения всех ребер четырехвалентного оснащенного графа с заходом в каждую вершину дважды, при котором в каждой вершине мы переходим с ребра на *не противоположное* ему (его же можно считать отображением f окружности в граф). Хордовая диаграмма $C(\Gamma)$, соответствующая поворачивающему обходу Γ строится следующим образом. Окружностью хордовой диаграммы является отображаемая окружность S^1 , а хордами соединяются пары точек, имеющие один и тот же образ относительно отображения f .

УПРАЖНЕНИЕ 1. Покажите, что у каждого связного крестового графа существует поворачивающий обход.

При этом хорды хордовой диаграммы, соответствующей поворачивающему обходу, естественно делить на два типа. Хорды *первого типа* соответствуют перекресткам первого типа, которые выглядят следующим образом. В данном перекрестке по двум противоположным (полу)ребрам ориентация обхода направлена к вершине, а по двум другим противоположным (полу)ребрам она ориентирована от вершины. В ином случае, если некоторое (полу)ребро ориентировано по направлению к вершине, а противоположное ему (полу)ребро ориентировано по направлению от вершины, будем говорить, что хорда *имеет второй тип*.

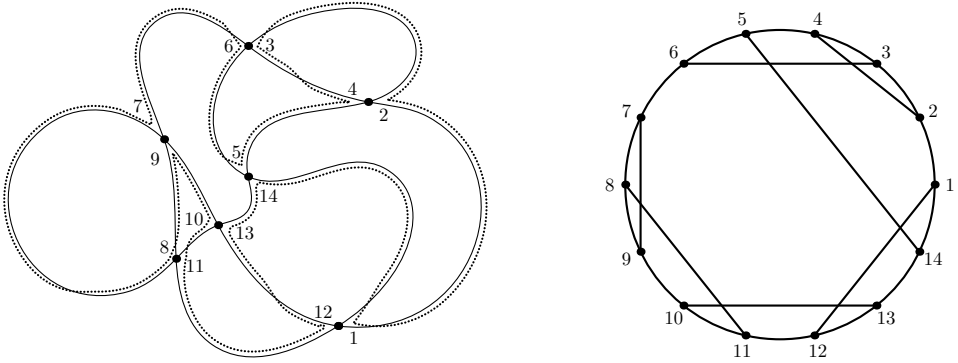


Рис. 5. Поворачивающий обход и поворачивающая хордовая диаграмма

На рис. 5 каждая вершина пронумерована два раза согласно двум моментам прохождения поворачивающего обхода через вершину (на этом примере все хорды имеют первый тип).

Как оказывается, поворачивающие обходы играют решающую роль в определении планарности крестовых графов.

2. d -ДИАГРАММЫ

Скажем, что две хорды p, q хордовой диаграммы D *зацеплены*, если их концы расположены на окружности в чередующем порядке.

Таким образом, при изображении хордовой диаграммы на плоскости посредством евклидовой окружности и прямолинейных хорд, зацепленные хорды изображаются пересекающимися.

Хордовая диаграмма называется d -*диаграммой*, если множество ее хорд можно разбить на два семейства таким образом, что любые две хорды из одного семейства оказались незацеплены.

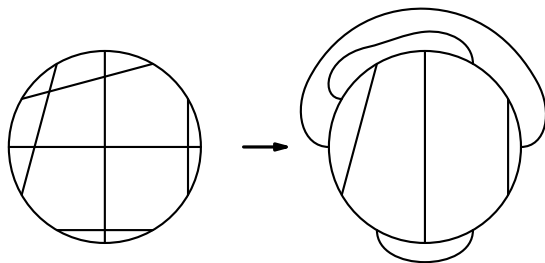
d -Диаграммы играют ключевую роль в различных вопросах теории узлов, см., напр., [5].

Читатель может в качестве упражнения проверить следующий факт: *хордовая диаграмма вложима в плоскость как граф тогда и только тогда, когда она является d -диаграммой.*

Подсказка изображена на рис. 6.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ ВАСИЛЬЕВА

Скажем, что крестовый граф обладает *седловой ориентацией*, если можно ориентировать его рёбра таким образом, чтобы в каждой вершине V некоторые два противоположных ребра были ориентированы по направлению к вершине V , а другие два — по направлению от вершины V . На

Рис. 6. d -диаграмма и вложение в плоскость

рисунке 7 слева изображен планарный крестовый граф и его седловая ориентация, а на рисунке справа — крестовый граф (с двумя вершинами), седловой ориентацией не обладающий.

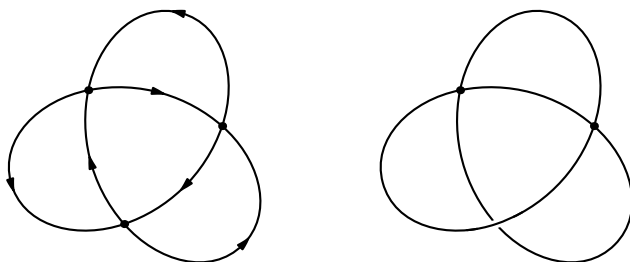


Рис. 7. Граф с седловой ориентацией и граф без седловой ориентации

Ясно, что если у связного крестового графа имеется седловая ориентация, то она единственная с точностью до одновременного обращения всех стрелок: стартуя с любой стрелки и двигаясь вдоль любого поворачивающего обхода, мы этот самый поворачивающий обход ориентируем в ту или другую сторону, и если в каждой вершине обход подходит сам к себе «правильно», то получаем седловую ориентацию. Иными словами, из определения седловой ориентации следует, что хордовая диаграмма, соответствующая некоторому (а следовательно, и любому) поворачивающему обходу крестового графа имеет все хорды первого типа.

УПРАЖНЕНИЕ 2. У всякого плоского крестового графа имеется седловая ориентация.

ЛЕММА 1. *Предположим, что крестовый граф Γ не обладает седловой ориентацией. Тогда на графе Γ найдется препятствие Васильева.*

Эту лемму мы оставляем читателю в качестве упражнения. Подсказка: попытайтесь из поворачивающего обхода построить седловую ориентацию и рассмотрите какую-либо из вершин, где этого не удастся сделать.

Эта лемма сводит нашу задачу к случаю графов, обладающих седловой ориентацией.

ЛЕММА 2. Пусть крестовый граф Γ обладает седловой ориентацией. Пусть для некоторого его поворачивающего обхода соответствующая хордовая диаграмма является d -диаграммой. Тогда Γ планарен.

Доказательство следует из рис. 8. Идея состоит в том, что каждая хорда вместе с двумя маленькими дугами в окрестности ее концов удаляется и заменяется на пару пересекающихся линий. Получающийся граф и будет искомым крестовым графом.

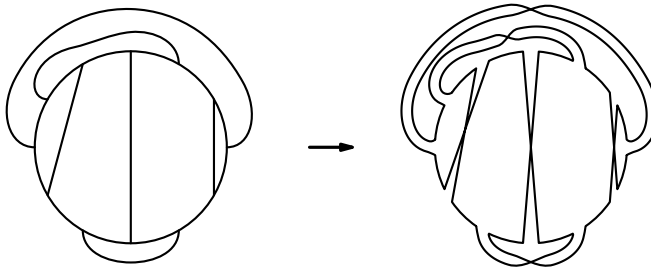


Рис. 8. От диаграммы к крестовому графу

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В лемме 2 можно заменить выражение «для некоторого обхода» на «для любого обхода». Действительно, планарность графа будет гарантировать, что хордовая диаграмма, соответствующая каждому поворачивающему обходу этого графа, является d -диаграммой.

Таким образом, для доказательства основной теоремы нам достаточно доказать следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть крестовый граф Γ обладает седловой ориентацией и пусть при этом для некоторого (и, следовательно, для любого) поворачивающего обхода этого графа соответствующая хордовая диаграмма не является d -диаграммой. Тогда граф Γ обладает препятствием Васильева.

Заметим сначала, что если хордовая диаграмма не является d -диаграммой, то у нее найдется набор хорд, образующий «нечетноугольник», см. рис. 9. Это утверждение остается читателю в качестве упражнения.

Заметим, что если эта хордовая диаграмма $((2n+1)$ -угольник) соответствует поворачивающему обходу некоторого крестового графа Γ , у которого все вершины имеют первый тип, то на этом графе Γ легко выделяется препятствие Васильева: один цикл состоит из тех ребер графа, соответствующих дугам хордовой диаграммы, помеченным на рис. 9 буквой a , а

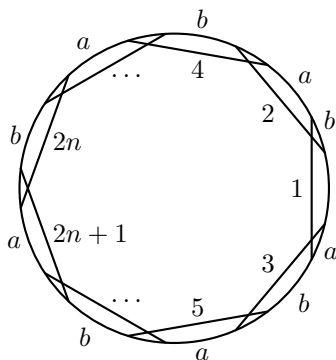


Рис. 9. Хордовая диаграмма $(2n + 1)$ -угольника

другой цикл (симметричный первому) состоит из ребер (дуг), помеченных буквой b . Эти два цикла имеют ровно одну точку пересечения, которая соответствует вершине 1 и является точкой перекрестья.

Рассмотрим теперь произвольный граф Γ' , обладающий седловой ориентацией, хордовая диаграмма некоторого поворачивающего обхода которого содержит $(2n + 1)$ -угольник. Тогда два цикла, имеющие ровно одно перекрестье, легко переносятся на Γ' : в вершинах графа Γ' , которым соответствуют хорды, не принадлежащие $(2n + 1)$ -угольнику, каждый из этих двух циклов будет поворачивать, следовательно, других перекрестий не появится.

Лемма 3 доказана, что завершает доказательство основной теоремы.

4. КУДА ВЛОЖИМЫ ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ГРАФЫ — ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим теперь, что крестовый граф не является планарным. Зададимся вопросом, в поверхность какого рода этот четырехвалентный граф может быть вложен с сохранением крестовой структуры. Этому посвящена работа [4].

5. ДАЛЬНЕЙШИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ И НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Следующая задача является переформулировкой задачи о вложениях крестовых графов.

1. Пусть дана матрица симметричная матрица M размера $n \times n$ над полем из двух элементов. Каково минимальное значение суммы рангов двух матриц $\text{rank}(M_I) + \text{rank}(M_J)$, где два подмножества I, J образуют

разбиение множества индексов исходной матрицы: $I \sqcup J = \{1, \dots, n\}$, а квадратные матрицы M_I и M_J получаются из матрицы M взятием соответствующих множествам I и J наборов строк и столбцов?

Разумеется, эта задача может быть решена прямым перебором 2^{n-1} вариантов, однако, конечно, имеется в виду возможность нахождения ее быстрого (например, полиномиального по n решения).

Как именно эта задача связана с задачей о вложении крестовых графов, мы расскажем в следующей публикации. Скажем лишь, что сумма рангов 0 возможна лишь тогда, когда обе матрицы M_I и M_J нулевые. А это очень похоже на d -диаграммы — два семейства хорд, таких что хорды из одного семейства попарно не пересекаются.

2. Как мы видели, вопрос о планарности крестового графа удобным образом решается в терминах поворачивающего обхода. В терминах трансверсального обхода¹⁾ он также решается, см., напр., [7, 8]. Однако можно предложить следующий способ действий: имея трансверсальный обход, выбираем какой-нибудь поворачивающий обход и по нему определяем, является ли граф планарным.

Но здесь возникает вопрос о том, как представить себе процесс перерисовывания в виде удобной формулы. Оказывается, это можно легко сделать на языке матриц пересечения хордовых диаграмм, чему посвящена статья Д. П. Ильютко [2]. Благодаря формуле Ильютко можно, например, легко указать, как связаны хордовые диаграммы *разных* поворачивающих обходов одной и той же хордовой диаграммы, а также получить ряд важных комбинаторных и чисто алгебраических следствий.

Эти и смежные вопросы мы планируем обсудить в дальнейших публикациях. Продолжение следует.

Автор выражает благодарность В. А. Васильеву и М. Н. Вялому за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Васильев В. А. *Инварианты первого порядка и когомологии пространств вложений самопересекающихся кривых в \mathbb{R}^n* // Известия РАН. Сер. Мат. Т. 69, №5, 2005. С. 3–52.
- [2] Ильютко Д. П. *Оснащенные 4-графы: эйлеровы циклы, гауссовы циклы и поворачивающие обходы* // Матем. сбор., 2010. В печати.

¹⁾Трансверсальный обход определяется так же, как и поворачивающий, с той лишь разницей, что в каждой вершине мы переходим на противоположное ребро. Трансверсальные обходы существуют лишь у уникарсальных графов (тех, которые можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и двигаясь гладко).

- [3] Мантуров В. О. *Доказательство гипотезы Васильева о планарности сингулярных зацеплений* // Известия РАН. Т. 69, 2005. С. 169–178.
- [4] Мантуров В. О. *Вложения оснащенных четырехвалентных графов в двумерные поверхности* // Доклады РАН. Т. 494, №3, 2009. С. 308–310.
- [5] Мантуров В. О. *Теория узлов*. Москва-Ижевск: РХД, 2005. — 512 с.
- [6] Прасолов В. В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*. М.: МЦНМО, 2004. — 352 с.
- [7] Cairns G., Elton D. *The planarity problem for signed Gauss words* // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. Vol. 2, 1993. P. 359–367.
- [8] Cairns G., Elton D. *The planarity problem. II* // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. Vol. 5, 1996. P. 137–144.