

Четырехвалентные графы с крестовой структурой. Вложения в двумерные поверхности

В. О. Мантуров

В предыдущей статье [7] было рассказано о критерии планарности четырехвалентных графов с крестовой структурой. В настоящей работе мы расскажем об обобщении этой задачи: приведем алгоритмы распознавания вложимости графов с крестовой структурой в сферу, проективную плоскость и бутылку Клейна, а также переформулируем задачу для произвольных поверхностей в терминах одной задачи о матрицах над полем из двух элементов.

Одним из важнейших классов графов является класс *крестовых графов*: таковыми мы будем называть четырехвалентные графы, у которых в каждой вершине указывается разбиение четырех полурёбер, инцидентных каждой вершине графа, на две пары «противоположных». Понятие противоположности будет важно при вложениях крестовых графов в поверхности: будем говорить, что вложение графа в двумерную поверхность *согласовано с крестовой структурой*, если полурёбра, противоположные в вершине, являются противоположными на поверхности. Любой четырехвалентный граф, вложенный в поверхность, естественным образом наследует из этой поверхности крестовую структуру. Будем называть не противоположные полурёбра, инцидентные одной вершине, *соседними*.

Отметим, что все используемые в настоящей работе понятия, могут быть определены как комбинаторно, так и топологически. Более того, все утверждения относительно оснащенных четырехвалентных графов можно переформулировать на языке хордовых диаграмм. Этот подход используется в работе Д. П. Ильютко в настоящем сборнике [3]. Дело в том, что результаты работы Д. П. Ильютко позволяют сделать утверждения о матрицах, которые не соответствуют никаким топологическим объектам. Хотя хордовые диаграммы соответствуют оснащённым четырехвалентным графам и кодируются матрицами пересечения, такое кодирование неоднозначно: одной матрице могут соответствовать разные хордовые диаграммы, более того, существуют матрицы, которым хордовые диаграммы не соответствуют. Это позволило Д. П. Ильютко доказать более общие результаты, напрямую не связанные с графами на плоскости и в двумерных поверхностях.

На протяжении всей статьи графы подразумеваются связными и конечными; петли и кратные ребра допускаются (иногда графы с петлями и кратными ребрами называют *мультиграфами*).

ЗАМЕЧАНИЕ. Для определения валентности графа в вершине удобно ввести понятие *полуребра*. Добавляя на каждом ребре графа по новой вершине, мы получим разбиение ребер на *полурёбра*. Полурёбра удобны для подсчета валентности вершин графа: если вершина исходного графа инцидентна некоторому ребру дважды, то это значит, что на преобразованном графе эта вершина инцидентна двум разным полуребрам.

В работе [4] (см. также [7]) была доказана следующая теорема (выдвигнутая В. А. Васильевым в качестве гипотезы в [1]).

ТЕОРЕМА 1. *Граф не вложим в плоскость тогда и только тогда, когда у него имеются два цикла без общих ребер, обладающие единственной точкой перекрестья.*

Здесь *циклом* мы называем непрерывное отображение окружности в граф, взаимно однозначное вне прообразов вершин графов. Этим мы подчеркиваем, что в цикле каждое ребро встречается не более одного раза. Мы говорим, что два цикла без общих ребер имеют *перекрестье* в некоторой вершине v , если один из них содержит одну пару противоположных полуребер в этой вершине, а другой — вторую. При этом в формулировке теоремы не накладывается никаких ограничений на количество (нетрансверсальных) пересечений двух циклов. Далее мы будем называть *препятствием Васильева* два цикла без общих ребер, имеющие единственную точку перекрестья. Ясно, что на плоскости нельзя изобразить две несамопересекающиеся замкнутые кривые, которые бы имели перекрестье в одной точке. С другой стороны, если две кривые «касаются» в нескольких точках, то эти касания можно «развести» в точках нетрансверсального пересечения.

Таким образом, предполагая, что граф вложен в плоскость с сохранением крестовой структуры, мы можем «развести» два цикла во всех точках, где они пересекаются не трансверсально; если окажется, что при этом останется ровно одна точка перекрестья, то это будет противоречить планарности графа.

Настоящая статья будет посвящена вопросу: в какую поверхность можно вложить четырехвалентный граф с крестовой структурой? Для этого нам понадобится техника поворачивающих обходов и хордовых диаграмм.

1. ПОВОРАЧИВАЮЩИЕ ОБХОДЫ. ХОРДОВЫЕ ДИАГРАММЫ

Назовем *хордовой диаграммой* конечный трехвалентный граф, состоящий из цикла, проходящего через все вершины (*окружности хордовой диаграммы*) по одному разу и оставшихся ребер, которые мы будем называть *хордами* хордовой диаграммы. Такие хордовые диаграммы рассматриваются с точностью до эквивалентности — изоморфизма графов, переводящего окружность в окружность. Хордовую диаграмму будем называть *ориентированной*, если ориентирована ее окружность; для ориентированных хордовых диаграмм изоморфизм предполагает сохранение ориентации. Назовем *поворачивающим обходом* такой способ прохождения всех ребер графа с заходом в каждую вершину дважды, при котором в каждой вершине мы переходим с ребра на *не противоположное* ему (его же можно считать отображением f окружности S^1 в граф). Хордовая диаграмма $C(\Gamma)$, соответствующая поворачивающему обходу Γ , строится следующим образом. Окружностью хордовой диаграммы является отображаемая окружность S^1 , а хордами соединяются пары точек, имеющие один и тот же образ относительно отображения f .

УПРАЖНЕНИЕ 1. *Покажите, что у каждого связного крестового графа существует поворачивающий обход.*

При этом хорды хордовой диаграммы, соответствующей поворачивающему обходу, естественно делить на два типа. Хорды *первого типа* соответствуют перекресткам первого типа, которые выглядят следующим образом. В данном перекрестке по двум противоположным (полу)ребрам ориентация обхода направлена к вершине, а по двум другим противоположным (полу)ребрам она ориентирована во внешнюю сторону. В ином случае, если некоторое (полу)ребро ориентировано внутрь вершины, а противоположное ему (полу)ребро ориентировано из вершины, будем говорить, что хорда *имеет второй тип*.

На рис. 1 каждая вершина пронумерована два раза согласно двум моментам прохождения поворачивающего обхода через вершину (на этом примере все хорды имеют первый тип).

Как выглядят хордовые диаграммы, соответствующие четырехвалентным графам с крестовой структурой, вложимым в различные двумерные замкнутые поверхности? Мы ограничимся лишь *шахматными вложениями*. Назовем вложение оснащенного четырехвалентного графа в двумерную поверхность *шахматным*, если дополнение к образу этого графа состоит из двумерных клеток, причем клетки допускают раскраску в черный и белый цвета таким образом, что клетки, соседствующие по ребру, имеют разные цвета. Очевидно, что любое вложение графа в плоскость (в сферу)

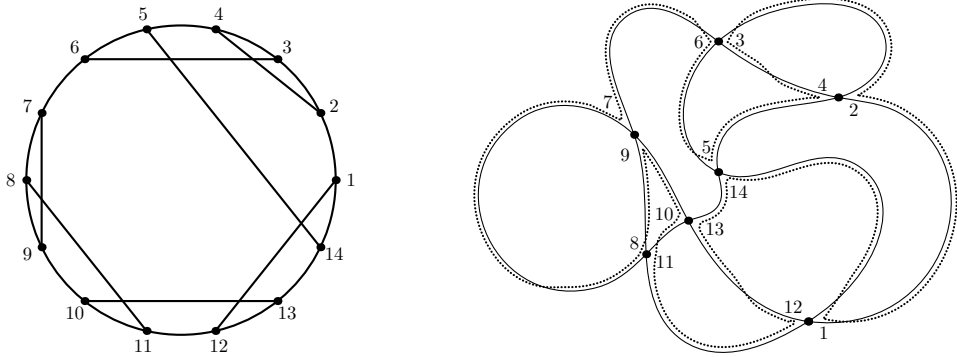


Рис. 1. Поворачивающий обход и поворачивающая хордовая диаграмма

является шахматным. В конце работы мы укажем, что означает условие шахматности для произвольной поверхности.

2. ОРИЕНТИРУЕМЫЙ И НЕОРИЕНТИРУЕМЫЙ СЛУЧАИ

Начнем с простого наблюдения.

Скажем, что крестовый граф обладает *седловой ориентацией*, если можно ориентировать его ребра таким образом, чтобы в каждой вершине V некоторые два противоположных ребра были направлены в сторону вершины V , а другие два — в сторону от вершины V . На рисунке 2 слева изображен планарный крестовый граф и его седловая ориентация, а на рисунке справа — крестовый граф (с двумя вершинами), седловой ориентацией не обладающий.

ТЕОРЕМА 2. Пусть оснащеному четырехвалентному графу Γ с крестовой структурой при некотором его поворачивающем обходе с соответствует хордовая диаграмма $D_{\Gamma,c}$. Тогда у хордовой диаграммы $D_{\Gamma,c}$ найдется хотя одна хорда второго типа, то все поверхности, в которые

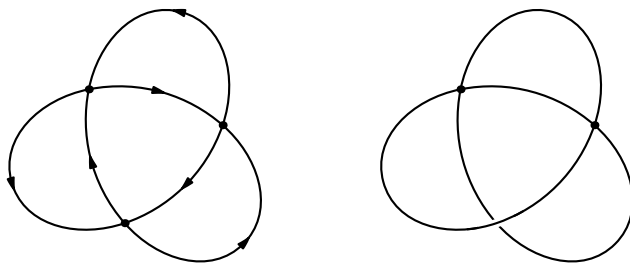


Рис. 2. Граф с седловой ориентацией и граф без седловой ориентации

граф Γ вложим шахматным образом, являются неориентируемыми, а если все хорды хордовой диаграммы имеют первый тип, то все поверхности, в которые граф вложим шахматным образом, являются неориентируемыми.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из формулировки настоящей теоремы, определить то, в какие поверхности — ориентируемые или неориентируемые — настоящий граф можно вложить шахматным образом, можно исходя из *любого* поворачивающего обхода. Это значит, что если для какого-нибудь поворачивающего обхода найдется хорда второго типа, то хорда второго типа найдется и для любого другого поворачивающего обхода.

УПРАЖНЕНИЕ 2. *Докажите это утверждение.*

Указание: показать, что наличие у четырехвалентного графа структуры седловой ориентации равносильно отсутствию у соответствующей хордовой диаграммы (при любом обходе) хорд второго типа.

Как понять, что два поворачивающих обхода задают один и тот же четырехвалентный граф с крестовой структурой? Естественно, эта задача решается явным построением. Оказывается, что есть замечательная формула на языке матриц над полем из двух элементов, связывающая разные поворачивающие обходы одного и того же графа. Эта формула принадлежит Д. П. Ильютко, и ей посвящена следующая статья [3] в настоящем номере.

3. ШАХМАТНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ ГРАФА С КРЕСТОВОЙ СТРУКТУРОЙ В ДВУМЕРНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Скажем, что две хорды p, q хордовой диаграммы D *зацеплены*, если их концы расположены на окружности в чередующемся порядке.

Таким образом, при изображении хордовой диаграммы на плоскости посредством евклидовой окружности и прямолинейных хорд, зацепленные хорды изображаются пересекающимися, как это изображено на рис. 1.

Пусть граф Γ с крестовой структурой вложен в замкнутую двумерную поверхность S шахматным образом.

Рассмотрим произвольный обход графа Γ . Построим вложение соответствующей этому обходу хордовой диаграммы в поверхность S следующим образом. Образ окружности хордовой диаграммы будет совпадать с ребрами графа Γ везде, за исключением окрестностей образов вершин. В окрестностях образов вершин окружность хордовой диаграммы будет локально выглядеть так, как показано на рисунке 3. Две части окружности будут соединены хордой, отвечающей данной вершине.

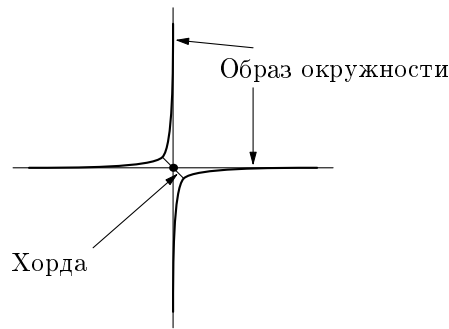


Рис. 3. Локальное построение хордовой диаграммы в окрестности вершины

Обозначим через γ простую замкнутую кривую — образ окружности. Нетрудно заметить, что кривая γ является *разделяющей*: ее дополнение состоит из двух компонент связности.

Действительно, эти компоненты связности почти полностью (за исключением малых фрагментов вершин) совпадают с объединением черных клеток и объединением белых клеток, соответственно.

Таким образом, мы имеем две поверхности с краем: S_B и S_W , склейка которых по их общему краю — окружности — дает исходную поверхность S .

Будем далее использовать следующее определение рода для двумерной замкнутой поверхности: $g(M) = 1 - \frac{\chi(M)}{2}$, где χ — эйлерова характеристика; для компактной поверхности с краем род определяется как род поверхности, получающейся из исходной заклеивкой компонент края дисками.

Так, для листа Мёбиуса и для проективной плоскости род равен $\frac{1}{2}$, а для бутылки Клейна он равен 1. Замкнутая двумерная поверхность определяется своим родом и ориентируемостью/неориентируемостью.

Очевидно, что род поверхности S равен сумме родов поверхностей S_B и S_W .

Наша дальнейшая задача будет состоять в оценке суммы $g(S_B) + g(S_W)$.

Как оказывается, эту оценку можно переформулировать на языке матриц.

Если задано шахматное вложение четырехвалентного графа с крестовой структурой в некоторую двумерную поверхность и задан поворачивающий обход на этом графе, то все хорды соответствующей хордовой диаграммы естественным образом делятся на «черные» и «белые», а именно, черными хордами мы называем те хорды, которые отвечают вершинам

графа, окрестность которых принадлежит черной области, а белыми — те вершины графа, окрестность которых принадлежит белой области.

Так, на рис. 1, если покрасить всю плоскость в черный и белый цвета, хорды 2–4, 5–14, 7–9, 10–13 (внутренние) будут черными, а хорды 1–12, 3–6, 8–11 (внешние) будут белыми.

Таким образом, любая тройка (граф, обход, вложение) задает хордовую диаграмму, хорды которой разбиты на два семейства.

Составим теперь две хордовые диаграммы D_B и D_W , которые получаются из хордовой диаграммы D удалением белых (соответственно, черных) хорд, и объединением дуг, инцидентных вершине удаленной хорды в одну дугу.

4. МАТРИЦА ПЕРЕСЕЧЕНИЙ ОСНАЩЕННОЙ ХОРДОВОЙ ДИАГРАММЫ

Пусть D — хордовая диаграмма с непустым множеством хорд. Сопоставим ей квадратную матрицу над полем из двух элементов следующим образом. Размер матрицы будет равен количеству хорд в хордовой диаграмме. Перенумеруем хорды диаграммы D произвольным образом (в дальнейшем эта нумерация не будет играть для нас никакой роли). При $i \neq j$ на месте (i, j) нашей матрицы будет стоять индекс инцидентности хорд с номерами i и j , равный 1, если хорды зацеплены, и 0, если хорды не зацеплены. На диагонали на месте (i, i) будет стоять элемент, равный нулю, если хорда имеет первый тип и единице, если хорда имеет второй тип. Обозначим соответствующую матрицу через $A(D)$.

Пусть теперь D — хордовая диаграмма, имеющая хорды первого и второго типов, и пусть D_B и D_W — соответствующие ей «черная» и «белая» хордовые диаграммы. Такое разбиение приводит к двум новым матрицам $A(D_1)$ и $A(D_2)$.

Оказывается, что по этим двум матрицам можно вычислить род белой части поверхности и род черной части поверхности, а именно, имеет место

$$\text{ТЕОРЕМА 3. } 2g(S_B) = \text{corank } A(D_B), \quad 2g(D_W) = \text{corank } A(D_W).$$

Здесь коранг матрицы (corank) — это разность между ее размерностью и ее рангом. Род понимается в приведенном выше смысле, в частности, он может быть полуцелым.

Приведенная выше теорема 3 является следствием известной теоремы Конна – Лемпеля – Соболевой – Тральди, [11, 14, 16], суть которой состоит в следующем.

Пусть имеется двумерный диск, на крае которого (окружности) отмечены точки, представляющие собой концы хорд хордовой диаграммы.

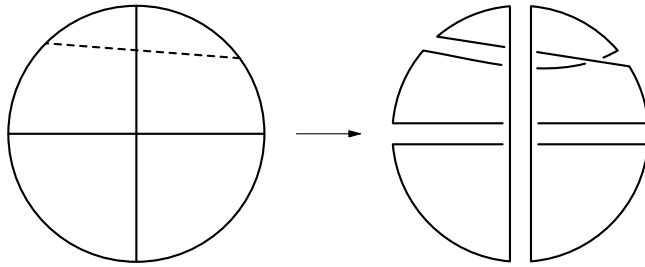


Рис. 4. Хордовая диаграмма и диск с лентами

Приклеим к диску ленты вдоль хорд, причем ленты будут приклеиваться без перекручивания для хорд первого типа, и с перекручиванием для хорд второго типа. В итоге получим двумерное многообразие с краем. Оказывается, что количество компонент края у этого многообразия будет на единицу больше коранга матрицы пересечения соответствующей хордовой диаграммы. На рис. 4 изображена хордовая диаграмма (хорда второго типа изображена пунктирной линией) и соответствующая поверхность.

Диаграмме, изображенной на рис. 4, соответствует следующая матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы по модулю два полный, т. е. равен трем, а коранг равен нулю. Это соответствует тому, что в правой части рис. 4 мы имеем одну компоненту.

Таким образом, в связи с теоремой 3 наша задача о вложимости оснащенного четырехвалентного графа в поверхность рода g (ориентируемую или неориентируемую) сводится к следующей задаче.

ЗАДАЧА. Пусть дана симметричная матрица M размера $n \times n$ над полем из двух элементов. Каково минимальное значение суммы рангов двух матриц $rank(M_I) + rank(M_J)$, где два подмножества I, J образуют разбиение множества индексов исходной матрицы: $I \sqcup J = \{0, 1, \dots, n\}$, а квадратные матрицы M_I и M_J получаются из матрицы M взятием соответствующих множествам I и J наборов строк и столбцов?

Это минимальное значение отвечает за минимальный род поверхности, в которую данный четырехвалентный граф с крестовой структурой может быть вложен шахматным образом.

Разумеется, эта задача может быть решена прямым перебором 2^{n-1} вариантов, однако, конечно, имеется в виду возможность нахождения ее быстрого (например, полиномиального по n решения).

Как оказывается, быстрое решение такой задачи весьма легко может быть получено явно для случая вложений в сферу (или плоскость), проективную плоскость и бутылку Клейна. Во всех остальных случаях вопрос о быстром решении остается открытым.

Уместно сравнить этот результат с работой Линса, Рихтера и Шанка, [12], в которой случаи плоскости, проективной плоскости и бутылки Клейна также решаются просто, а случай тора — нет. Кроме того, нужно отметить, что с алгоритмической точки зрения проблема распознавания того, в какую поверхность вложим тот или иной граф, является NP-трудной [15].

5. РЕШЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПЛОСКОСТИ, ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ И БУТЫЛКИ КЛЕЙНА

Случай \mathbb{R}^2 (S^2). Рассмотрим хордовую диаграмму. Для планарности необходимо, чтобы все хорды имели первый тип: действительно, чтобы сумма рангов двух матриц была равна нулю, на диагонали исходной матрицы не должно быть элементов, равных единице. Пусть это так. Далее нам нужно разбить хорды на 2 семейства таким образом, чтобы хорды из одного семейства были незацеплены (такая диаграмма называется *d-диаграммой*, [6]). В случае связной диаграммы алгоритм таков: мы рассматриваем произвольную хорду и отправляем ее в первое семейство, затем некоторую зацепленную с ней хорду отправляем во второе семейство, некоторую хорду, зацепленную со второй, отправляем в первое семейство и т. д. Исчерпав все хорды, проверяем, не содержит ли одно из семейств зацепленных хорд.

В случае проективной плоскости мы должны найти хорду с оснащением единица. Далее все хорды с оснащением единица должны быть зацеплены с ней, чтобы ранг соответствующей подматрицы не превышал единицы. После этого два семейства должны быть устроены следующим образом: хорды из первого семейства включают в себя все хорды второго типа, зацепленные между собой, а также хорды с оснащением ноль, которые не зацеплены друг с другом, а также с хордами второго типа. Второе семейство состоит из оставшихся хорд первого типа, попарно незацепленных. Дальнейший алгоритм дословно повторяет алгоритм распознавания *d-диаграммы*. В случае распознавания вложения в бутылку Клейна нам понадобится следующая очевидная

ЛЕММА 1. Пусть оснащенный граф Γ вложен шахматным образом в бутылку Клейна, и пусть C — обход графа Γ . Тогда либо обход C разбивает бутылку Клейна на два листа Мёбиуса, либо существует хорда второго типа, такая, что обход C' , полученный изменением обхода C в

вершине, соответствующей этой хорде, разбивает бутылку Клейна на два листа Мёбиуса.

После этого нужно устроить разбиение матрицы пересечений для одной из хордовых диаграмм $D_{\Gamma, C}$ или $D_{\Gamma, C'}$ на два семейства, каждое из которых имело бы ранг один. Алгоритм разбиения и проверка дословно повторяют алгоритм распознавания d -диаграммы, только в случае двух хорд второго типа нужно заменить слово «пересечение» на «непересечение» и наоборот. Нужно также поменять инцидентность на графе пересечений для вершин с оснащением один. Случай, когда граф пересечения будет несвязным, легко сводится к проверке каждой из его компонент.

6. ОБ УСЛОВИИ ШАХМАТНОСТИ

ЗАДАЧА. Докажите, что вложение четырехвалентного графа Γ с крестовой структурой в двумерную поверхность S является шахматным, если и только если любой замкнутый путь на этой поверхности, не проходящий через вершины графа и не касающийся его ребер, пересекает его ребра четное число раз.

Приведенное выше условие математически формулируется так: граф представляет собой нулевой класс одномерных гомологий поверхности в поле из двух элементов.

Над любой двумерной поверхностью S , в которую вложен четырехвалентный граф Γ с крестовой структурой, можно рассмотреть двулистное накрытие $\tilde{S} \rightarrow S$, которое строится следующим образом. Каждый замкнутый путь γ на поверхности S , пересекающий образ графа Γ трансверсально накрывается замкнутым путем, если он пересекает образ графа Γ в четном числе точек. В противном случае он накрывается незамкнутым путем. Таким образом, вопрос о шахматных вложениях тесно связан с вопросом о произвольных вложениях. Подробнее см. [13].

Я благодарен Д. П. Ильютко за полезные обсуждения. Выражаю благодарность М. Н. Вялому, указавшему мне на работу [15].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Васильев. *Инварианты первого порядка и когомологии пространств вложений самопересекающихся кривых в \mathbb{R}^n* // Известия РАН. Сер. Мат. Т. 69, №5. 2005. С. 3–52.
- [2] Д. П. Ильютко. *Оснащенные 4-графы: эйлеровы циклы, гауссовы циклы и поворачивающие обходы* // Матем. сбор., т. 202, №9, 2011. С. 53–76.

- [3] Д. П. Ильютко. *Матрицы пересечений эйлеровых циклов 4-валентных графов с крестовой структурой* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 16. 2012. С. 105–131.
- [4] В. О. Мантуров. *Доказательство гипотезы Васильева о планарности сингулярных зацеплений* // Известия РАН. Т. 69. 2005. С. 169–178.
- [5] В. О. Мантуров. *Вложения оснащенных четырехвалентных графов в двумерные поверхности* // Доклады РАН. Т. 494, №3. 2009. С. 308–310.
- [6] В. О. Мантуров. *Теория узлов*. Москва–Ижевск: РХД. 2005. 512 с.
- [7] В. О. Мантуров. *Четырехвалентные графы с крестовой структурой* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 15. 2011. С. 128–137.
- [8] В. В. Прасолов. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*. М.: МЦНМО, 2004. 352 с.
- [9] G. Cairns, D. Elton. *The planarity problem for signed Gauss words* // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. Vol. 2. 1993. P. 359–367.
- [10] G. Cairns, D. Elton, *The planarity problem*. II // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. Vol. 5. 1996. P. 137–144.
- [11] M. Cohn and A. Lempel. *Cycle decomposition by disjoint transpositions* // J. Combin. Theory Ser. A. Vol. 13. 1972. P. 83–89.
- [12] S. Lins, B. Richter, H. Schank. *The Gauss Code Problem off the plane* // Aequationes Mathematicae. Vol. 33, no 1. 1987. P. 81–95.
- [13] V. O. Manturov. *Embeddings of four-valent framed graphs into two-surfaces* // The Mathematics of Knots: Theory and Applications. Heidelberg: Springer, 2010. P. 169–198.
- [14] E. Soboleva. *Vassiliev Knot Invariants Coming from Lie Algebras and 4-Invariants* // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. Vol. 10, no 1. 2001. P. 161–169.
- [15] C. Thomassen. *The graph genus problem is NP-complete* // J. of Algorithms. Vol. 10. 1989. P. 568–576.
- [16] L. Traldi. *Binary nullity, Euler circuits and interlace polynomials*. 2009. arXiv:math.CO/0903.4405.