

Матрицы пересечений эйлеровых циклов 4-валентных графов с крестовой структурой

Д. П. Ильютко*

В настоящей статье мы рассматриваем связные 4-валентные графы, снабженные крестовой структурой, и обходы на них. Имея крестовую структуру, мы можем определить разные типы обходов: прямые обходы, т. е. мы двигаемся согласно крестовой структуре, и поворачивающие обходы, т. е. в каждой вершине графа мы поворачиваем. Мы предъявляем явную формулу, связывающую матрицы пересечений разных типов обходов на 4-валентных графах с крестовой структурой.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим сначала следующую задачу, которая играет ключевую роль в наших исследованиях.

Пусть дана хордовая диаграмма, т. е. окружность с конечным множеством пар точек на ней, причем каждая пара содержит разные точки, и разные пары не пересекаются. Удобно каждую пару точек представлять хордой, соединяющей их. Разрежем окружность по всем точкам, пробегающим множество всех пар (хорд). В результате такого разрезания каждая хорда даст четыре точки. Разобьем каждую четверку на две новые пары и соединим точки из одной пары друг с другом. Мы получим набор замкнутых, возможно (само)пересекающихся, кривых. Вопрос состоит в следующем: сколько замкнутых кривых мы получим, более точная формулировка дана в теореме 3.

Частный случай такой проблемы, когда все четверки разбиваются на пары одним фиксированным способом, был впервые рассмотрен Коном и Лемпелом в [14]. Позже эта теорема была несколько раз передоказана и обобщена на общий случай, см. [9, 21, 23–25].

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 10-01-00748-а), гранта Президента РФ поддержки Ведущих научных школ (проект НШ-3224.2010.1), программы Развитие научного потенциала высшей школы (проект 2.1.1.3704), Программ Научные и научно-педагогические кадры инновационной России (госконтракты 02.740.11.5213 и 14.740.11.0794).

Ответ на поставленную выше проблему дается простой формулой. С каждой хордовой диаграммой можно связать матрицу пересечений, состоящую из нулей и единиц. Внедиагональные элементы этой матрицы отвечают за пересечение/непересечение хорд (0, если не пересекаются, и 1 в противном случае), а диагональные элементы отвечают за тип соединения точек, полученных в результате разрезания окружности, точные определения см. ниже. Оказывается, что число замкнутых кривых равно корангу матрицы пересечений, рассматриваемой над \mathbb{Z}_2 , плюс один (напомним, что коранг равен размерности матрицы минус ее ранг).

Перейдем теперь к 4-валентным графам и задачам, связанными с ними. Понятие 4-валентного графа с крестовой структурой появляется, например, при кодировании узлов плоскими диаграммами. Напомним, что *узел* представляет собой образ гладкого вложения f окружности S^1 в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 . Причем узлы рассматриваются с точностью до естественной эквивалентности: два узла считаются эквивалентными, если один узел мы можем без (само)пересечений продеформировать в другой. Для построения плоской диаграммы узла мы фиксируем некоторую плоскость в пространстве и рассматриваем проекцию узла на нее. Без ограничения общности можно считать, что проекция узла на плоскость представляет собой вложенный конечный 4-валентный граф, являющийся образом гладкого погружения окружности в плоскость. При этом проекция узла обладает дополнительной структурой: четыре исходящих ребра (точнее, полуребра) из каждой вершины графа разбиваются на две пары (противоположных) ребер: ребра одной пары имеют прообразы на S^1 , стыкующиеся в точке, которая при отображении f переходит в вершину графа. Таким образом, мы имеем 4-валентный граф с крестовой структурой.

Узлы удобно также кодировать с помощью *гауссовых диаграмм* [13, 17], которые представляют собой окружность со стрелками, снабженными знаками. Для этого надо на окружности S^1 отметить точки, проецирующиеся при отображении f в вершины графа, и соединить точки, проецирующиеся в одну и ту же вершину, стрелкой, при этом стрелку снабдив знаком (мы не будем указывать явно, как направлена стрелка и какой знак она имеет), см. рис. 1. Очевидно, что гауссова диаграмма получается рассмотрением на плоской диаграмме узла эйлерова цикла, который в каждой вершине переходит с ребра на противоположное ребро (*гауссов цикл*). Гауссовы диаграммы применяются также при построении инвариантов конечного порядка и инвариантов Васильева [8, 13, 17].

Рассмотрим обратную задачу. А именно, пусть дан произвольный абстрактный связный 4-валентный граф с крестовой структурой. Верно ли, что существует узел, плоская диаграмма которого совпадает с данным графом? Очевидно, что необходимым и достаточным условием существования

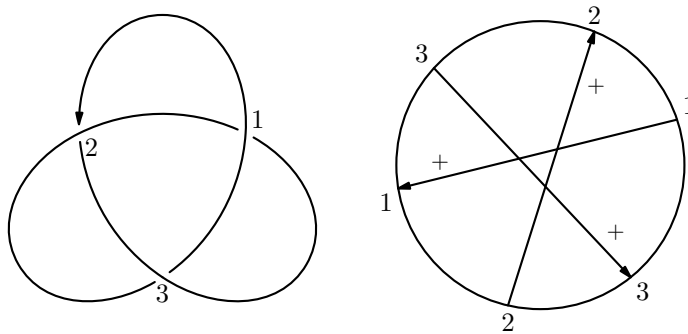


Рис. 1. Гауссова диаграмма трилистника

такого узла является условие вложимости этого графа в плоскость с сохранением крестовой структуры. На рис. 2 изображен 4-валентный граф с крестовой структурой (крестовая структура индуцируется из плоскости), который не вложим в плоскость с сохранением структуры.

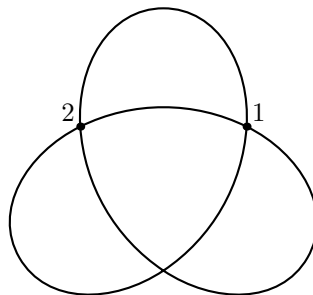


Рис. 2. Невложимый в плоскость 4-валентный граф с крестовой структурой

Для определения планарности 4-валентного графа с крестовой структурой удобно пользоваться *поворачивающим обходом* (эйлеров цикл, который в каждой вершине переходит с ребра на ребро из другой пары), см. [1, 2, 22]. Аналогично гауссовой диаграмме, мы можем построить хордовую диаграмму, т.е. окружность с хордами, соответствующую поворачивающему обходу. Критерий планарности формулируется очень просто: 4-валентный граф с крестовой структурой планарен тогда и только тогда, когда он допускает седловую ориентацию, и хордовая диаграмма произвольного поворачивающего обхода является *d-диаграммой*, т.е. множество всех хорд хордовой диаграммы может быть разбито на два дизъюнктных подмножества, причем хорды из одного множества не зацеплены друг с другом, см. [3, 5, 22]. Две хорды *зацеплены*, если их концы

чередуются при обходе окружности хордовой диаграммы. Существуют также критерии планарности 4-валентного графа с крестовой структурой в терминах гауссовых диаграмм, см. [11, 12].

Если мы хотим обобщить вопрос планарности и рассматривать вопрос о нахождении минимального рода двумерной замкнутой ориентируемой поверхности, в которую может быть вложен заданный 4-валентный граф с крестовой структурой, то подход с помощью поворачивающего обхода тоже более удобен. Существует критерий, дающий ответ на вопрос о минимальности рода, см. [1, 5].

Заметим, что поворачивающий обход существует на любом связном 4-валентном графе с крестовой структурой, и их количество почти всегда больше одного. В то же самое время, гауссов цикл существует не всегда, и если существует, то он единственен. Возникают задачи: найти критерий существования гауссова цикла, и в случае существования понять, как связаны поворачивающие обходы и гауссов цикл. Конечно мы можем ответить на эти вопросы, просто двигаясь вдоль графа согласно крестовой структуре, в каждой вершине мы имеем единственный способ пройти через нее. Если по возвращению в точку отправления мы прошли все ребра графа, то на данном графе существует гауссов цикл. Но этот способ в случае большого количества вершин не очень удобен и не дает явную связь между циклами. В настоящей статье мы даем явную формулу, которая зависит только от матрицы пересечений эйлерова цикла: беря произвольный эйлеров цикл и строя его матрицу пересечений, мы можем понять, имеет ли данный 4-валентный граф с крестовой структурой гауссов цикл, и в случае его существования найти его матрицу пересечений. Используя данную формулу, в последней части нашей работы мы получим интересные факты о симметрических матрицах.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает благодарность за внимание к работе А. Т. Фоменко, В. О. Мантурову, И. М. Никонову и Л. Тральди.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. 4-Графы и ЭЙЛЕРОВЫ ЦИКЛЫ

Термин «граф» впервые появился в книге венгерского математика Д. Кёнига в 1936 г., хотя задачи по теории графов восходят еще к Л. Эйлеру (XVIII в.).

Напомним, что *граф* задается множеством вершин и множеством ребер, соединяющих эти вершины, при этом, ребро может соединять одну и ту же вершину (*петля*), и два ребра могут соединять одну и ту же пару вершин

(кратные ребра). Множество вершин графа G обозначается через $V(G)$, а множество ребер — $E(G)$. Каждое ребро можно снабдить ориентацией, в результате мы получим *ориентированный* граф. На протяжении всей статьи все рассматриваемые графы являются *конечными*, т. е. множества вершин и ребер предполагаются конечными.

Графы удобно изображать в виде рисунков, состоящих из точек и линий, соединяющих некоторые из этих точек. При этом точки соответствуют вершинам графа, а соединяющие пары точек линии — ребрам.

На рис. 3 изображены разные графы. На втором графе рисунка 3 мы имеем два кратных ребра, а на третьем графе рисунка 3 мы имеем петлю.

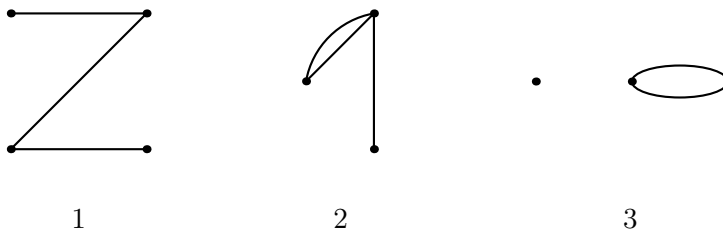


Рис. 3. Графы

Ребро, соединяющее вершины u и v , мы будем записывать в виде $e = uv$ или $e = vu$. В этом случае также говорят, что вершина u (вершина v) *инцидентна* ребру e .

При определении степени вершины удобно считать, что каждое ребро состоит из двух полуребер. Вершина v имеет *степень*, равную k , если v инцидентна k полуребрам. Граф, все вершины которого имеют степень k , называется k -валентным или просто k -графом. *Свободная петля*, т. е. граф без вершин с одним циклическим ребром, рассматривается как k -граф для любого k . На рис. 4 изображены 2-граф и 3-граф, имеющие по четыре вершины.

Чередующаяся последовательность

$$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_l, v_{l+1}$$

вершин и ребер такая, что $e_i = v_i v_{i+1}$, $i = 1, \dots, l$, называется *маршрутом*,



Рис. 4. 2-Граф и 3-граф

соединяющим вершины v_l и v_{l+1} . Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны. Цепь, у которой $v_1 = v_{l+1}$, называется *циклом*. Цикл в графе называется *эйлеровым*, если он содержит все ребра графа. Цикл в графе называется *гамильтоновым*, если он проходит через все вершины графа по одному разу, за исключением первой и последней вершин.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. По определению цикл имеет ориентацию. Для неориентированных графов мы почти всегда (если явно не указано другое) отождествляем два цикла, отличающихся ориентацией, т. е. мы рассматриваем неориентированные циклы.

Граф называется *связным*, если любые две его несовпадающие вершины соединены маршрутом.

Хорошо известна следующая

ТЕОРЕМА 1 (Л. ЭЙЛЕР, 1736 г.). *Связный граф имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.*

Пусть H — произвольный связный 4-граф с множеством вершин $V(H)$, и пусть U — эйлеров цикл на H . Опишем связь между двумя эйлеровыми циклами на данном графе H .

Определим *k-преобразование* 4-графов, которое было введено Коцигом [20]. Для каждой вершины $v \in V(H)$ существуют в точности два (неориентированных) цикла P_v и Q_v на U , не имеющих общих ребер, начинающихся и заканчивающихся в вершине v , и каждый из которых содержит по крайней мере по одному ребру. Существует единственный эйлеров цикл, отличный от U , также содержащий циклы P_v и Q_v (если мы зададим произвольную ориентацию на эйлеровом цикле U , то на новом эйлеровом цикле мы двигаемся вдоль P_v согласно ориентации на U , а вдоль Q_v — в противоположном направлении). Обозначим через $U * v$ новый эйлеров цикл, полученный из U . Преобразование $U \mapsto U * v$ называется *k-преобразованием*.

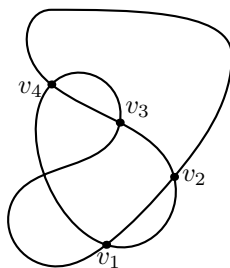


Рис. 5. Граф

ТЕОРЕМА 2 (см. [20]). *Любые эйлеровы циклы на 4-графе связаны конечной последовательностью k -преобразований.*

Мы оставим теорему 2 без доказательства.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 5. Найти на нем все эйлеровы циклы и для каждой пары различных эйлеровых циклов найти конечную последовательность k -преобразований, связывающую их.

2.2. ЭЙЛЕРОВЫ ЦИКЛЫ, ЦИКЛИЧЕСКИЕ СЛОВА И ХОРДОВЫЕ ДИАГРАММЫ

Эйлеровы циклы удобно записывать словами над алфавитом, состоящим из вершин данного 4-графа. Дадим необходимые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $w = x_1x_2 \dots x_{k-1}x_k$ — произвольное слово, т. е. конечная последовательность букв некоторого конечного алфавита. *Зеркальный образ слова w* — это слово $\tilde{w} = x_kx_{k-1} \dots x_2x_1$. Мы рассматриваем не просто слова, а классы эквивалентности слов, где любое слово из класса, порожденного словом $x_1 \dots x_k$, является или циклической перестановкой $w_i = x_ix_{i+1} \dots x_kx_1 \dots x_{i-1}$, $1 \leq i \leq k$, слова $x_1 \dots x_k$, или зеркальным образом слова w_i . Мы обозначим этот класс через $(x_1 \dots x_k)$ и назовем его *циклическим словом*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Слово называется *словом с двойным вхождением*, если каждая его буква встречается в нем ровно два раза.

ПРИМЕР 1. Например слово $abcsba$ является словом с двойным вхождением, а слово $abcsb$ не является словом с двойным вхождением.

Очевидно, что зеркальный образ и циклическая перестановка слова с двойным вхождением являются словами с двойным вхождением. Поэтому имеет смысл говорить о циклическом слове с двойным вхождением.

Каждое циклическое слово с двойным вхождением удобно изображать хордовой диаграммой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Хордовая диаграмма* — это 3-граф, состоящий из выбранного неориентированного гамильтонового цикла (*окружность*) и неориентированных ребер (*хорд*), соединяющих точки на окружности.

Представление слова в виде хордовой диаграммы строится следующим образом. Пусть t — произвольное циклическое слово с двойным вхождением. Хордовая диаграмма, соответствующая слову t строится последовательным расположением букв слова t вдоль окружности S^1 , выбором точек на S^1 около каждого появления буквы слова и соединением хордой каждой пары точек, соответствующих двум одинаковым буквам слова. Нетрудно видеть, что мы получаем взаимно однозначное соответствие

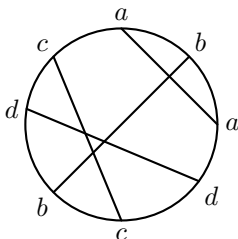


Рис. 6. Хордовая диаграмма слова $(abacdbcd)$

между множеством циклических слов с двойным вхождением и множеством хордовых диаграмм (рассматриваемых с точностью до изоморфизма, переводящего гамильтоновы циклы друг в друга).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим слово $m = (abacdbcd)$. Слово m имеет представление с помощью хордовой диаграммы, изображенной на рис. 6.

Определим операцию $*$ на циклических словах с двойным вхождением, которая будет соответствовать k -преобразованию. Пусть $m = (vAvB)$, где A, B — подслова слова m , и буквы принадлежат некоторому конечному алфавиту. Тогда положим $m * v = (v\tilde{A}vB)$, \tilde{A} — зеркальный образ подслова A . На рис. 7 преобразование $m \mapsto m * v$ изображается для хордовых диаграмм (пунктирные дуги хордовых диаграмм содержат концы всех хорд, отличных от v). Для каждого преобразования хордовых диаграмм мы считаем, что только фиксированные фрагменты хордовых диаграмм меняются. Части хордовых диаграмм, не содержащие хорд, участвующих в преобразованиях, изображаются пунктирными дугами.

Пусть U — произвольный эйлеров цикл на 4-графе H с множеством вершин $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$, которое будет играть роль алфавита. Зададим произвольную ориентацию на U . Двигаясь вдоль U , мы встречаем каждую вершину дважды. Последовательно записывая встречающиеся вершины, мы получим слово с двойным вхождением над $V(H)$.

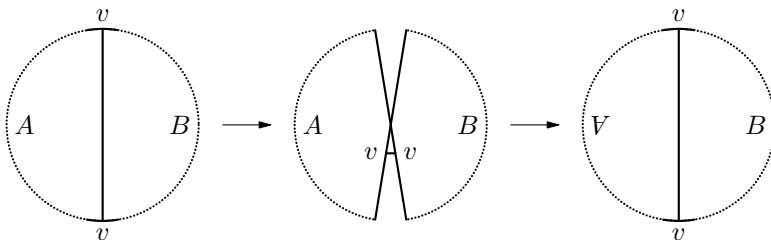


Рис. 7. Операция $*$ на хордовых диаграммах

Следовательно, (неориентированные) эйлеровы циклы кодируются циклическими словами с двойным вхождением. Обозначим соответствующее циклическое слово с двойным вхождением через $m(U)$.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Покажите, что $m(U*v) = m(U)*v$, и если мы имеем циклическое слово m с двойным вхождением, то мы можем построить 4-граф, имеющий такой эйлеров цикл U , что $m(U) = m$.

2.3. 4-ГРАФЫ С КРЕСТОВОЙ СТРУКТУРОЙ И ЭЙЛЕРОВЫ ЦИКЛЫ

В данном разделе мы рассмотрим 4-графы с дополнительной структурой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. 4-Граф называется *графом с крестовой структурой*, если в каждой вершине графа четыре исходящих из нее полурёбра разбиты на две пары полурёбер. Полурёбра из одного семейства называются *противоположными*.

Пусть H — произвольный 4-граф с крестовой структурой, и U — эйлеров цикл на нем. Построим *оснащенное* циклическое слово $m(U)$ с двойным вхождением (соответственно, *оснащенную* хордовую диаграмму), соответствующее эйлерову циклу U . В каждой вершине v графа H мы имеем следующие три возможности прохождения вдоль U (не зависимо от ориентации U) через вершину v .

- 1) Мы переходим с полурёбра на противоположное ему полурёбро, см. рис. 8 а). Вершина v в этом случае будет называться *гауссовой вершиной для U* , и хорда, соответствующая этой вершине, также будет называться *гауссовой*.
- 2) Мы переходим с полурёбра на непротивоположное ему полурёбро, причем ориентации противоположных ребер различны, см. рис. 8 б). Вершина v в этом случае будет называться *негауссовой вершиной с оснащением 0 для U* , и хорда, соответствующая этой вершине, также будет называться *негауссовой хордой с оснащением 0*.
- 3) Мы переходим с полурёбра на непротивоположное ему полурёбро, причем ориентации противоположных ребер совпадают, см. рис. 8 в). Вершина v в этом случае будет называться *негауссовой вершиной с оснащением 1 для U* , и хорда, соответствующая этой вершине, также будет называться *негауссовой хордой с оснащением 1*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Эйлеров цикл, имеющий только гауссовы вершины, называется *гауссовым циклом*. Эйлеров цикл, содержащий только негауссовы вершины, называется *поворачивающим обходом*, см. [1, 2, 7, 18, 22].

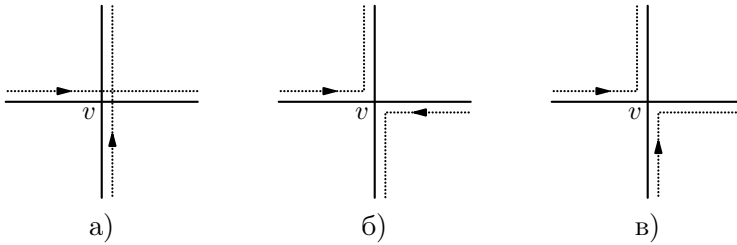


Рис. 8. Переход через вершину

Двигаясь вдоль эйлера цикла U , мы встречаем каждую вершину графа H дважды. Перейдем к построению *оснащенного* циклического слова $m(U)$ с двойным вхождением, соответствующего эйлерову циклу U . Слова будут рассматриваться над алфавитом $X = V(H) \cup V(H)^{-1} \cup V(H)^G$, где множество $V(H)^{-1}$ состоит из элементов вида v^{-1} для каждой вершины $v \in V(H)$, а множество $V(H)^G$ состоит из элементов вида v^G для каждой вершины $v \in V(H)$. Каждой гауссовой вершине будут соответствовать в $m(U)$ две одинаковые буквы из множества $V(H)^G$, т.е. каждому вхождению соответствующей вершины мы припишем верхний индекс G . Например, $m(U) = (Av^G Bv^G)$, если вершина v является гауссовой. Каждой негауссовой вершине с оснащением 0 будут соответствовать в $m(U)$ две одинаковые буквы из множества $V(H) \cup V(H)^{-1}$, т.е. каждому вхождению соответствующей вершины мы либо ничего не припишем, либо припишем оба раза верхний индекс -1 . Например, $m(U) = (AvBv)$ или $m(U) = (Av^{-1}Bv^{-1})$, если вершина v является негауссовой вершиной с оснащением 0. Каждой негауссовой вершине с оснащением 1 будут соответствовать в $m(U)$ две разные буквы из множества $V(H) \cup V(H)^{-1}$, т.е. двум вхождениям соответствующей вершины мы, произвольным образом, приписываем разные верхние индексы. Например, $m(U) = (Av^{-1}Bv)$ или $m(U) = (AvBv^{-1})$, если вершина v является негауссовой вершиной с оснащением 1 (мы не делаем различия между этими двумя словами). Таким образом, мы рассматриваем не просто оснащенные циклические слова, а классы эквивалентности оснащенных циклических слов, где эквивалентность порождается автоморфизмами алфавита, которые меняют буквы v и v^{-1} местами для некоторой буквы v . Для простоты изложения мы называем эти классы оснащенными циклическими словами.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Построенное оснащенное слово не всегда будет являться словом с двойным вхождением каждой буквы. Мы можем рассмотреть проекцию $\pi: V(H) \cup V(H)^{-1} \cup V(H)^G \rightarrow V(H) \cup V(H)^G$, заданную правилом $v^{\pm 1} \mapsto v$ и $v^G \mapsto v^G$. Образ построенного оснащенного слова при этой проекции является уже словом с двойным вхождением каждой

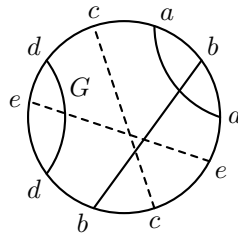


Рис. 9. Оснащенная хордовая диаграмма для $(ab^{-1}acd^G e^{-1}d^G b^{-1}c^{-1}e)$

буквы. Мы называем оснащенное слово *словом с двойным вхождением*, если образ слова при проекции π является словом с двойным вхождением.

Изображая оснащенное циклическое слово с двойным вхождением посредством оснащенной хордовой диаграммы, мы будем использовать хорды трех типов: хорды с меткой G для гауссовых вершин, «жирные» хорды без меток для негауссовых вершин с оснащением 0 и пунктирные хорды для негауссовых вершин с оснащением 1.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим оснащенное циклическое слово с двойным вхождением $m = (ab^{-1}acd^G e^{-1}d^G b^{-1}c^{-1}e)$. Имеем: d — гауссова вершина, a, b — негауссовы вершины с оснащением 0 и c, e — негауссовы вершины с оснащением 1. Соответствующая оснащенная хордовая диаграмма изображена на рис. 9.

Пусть V — произвольное конечное множество. Имея оснащенное циклическое слово m с двойным вхождением (оснащенную хордовую диаграмму) над $V \cup V^{-1} \cup V^G$, мы можем построить 4-граф с крестовой структурой на множестве V , имеющий такой эйлеров цикл U , что оснащенное слово $m(U)$ совпадает с m . Мы сначала построим 4-граф, а затем зададим крестовую структуру, используя тип каждой вершины.

Определим операцию *оснащенная звездочка* на множестве оснащенных циклических слов с двойным вхождением. Мы обозначим эту операцию тем же самым символом $*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Мы использовали то же самое обозначение для «простых» циклических слов с двойным вхождением. Далее мы будем рассматривать только оснащенные циклические слова с двойным вхождением и то же самое обозначение не приведет к противоречию.

Сначала мы определим операцию \bar{w} , где w — произвольное подслово (необязательно слово с двойным вхождением) оснащенного циклического слова с двойным вхождением. Пусть $w = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_k^{\varepsilon_k}$. Тогда $\bar{w} = x_k^{\varepsilon_k} \dots x_1^{\varepsilon_1}$, где $\bar{x}_l^{\varepsilon_l} = x_l^{\varepsilon_l}$, если $\varepsilon_l = G$, $\bar{x}_l^{\varepsilon_l} = x_l^{-\varepsilon_l}$, если $\varepsilon_l = \pm 1$.

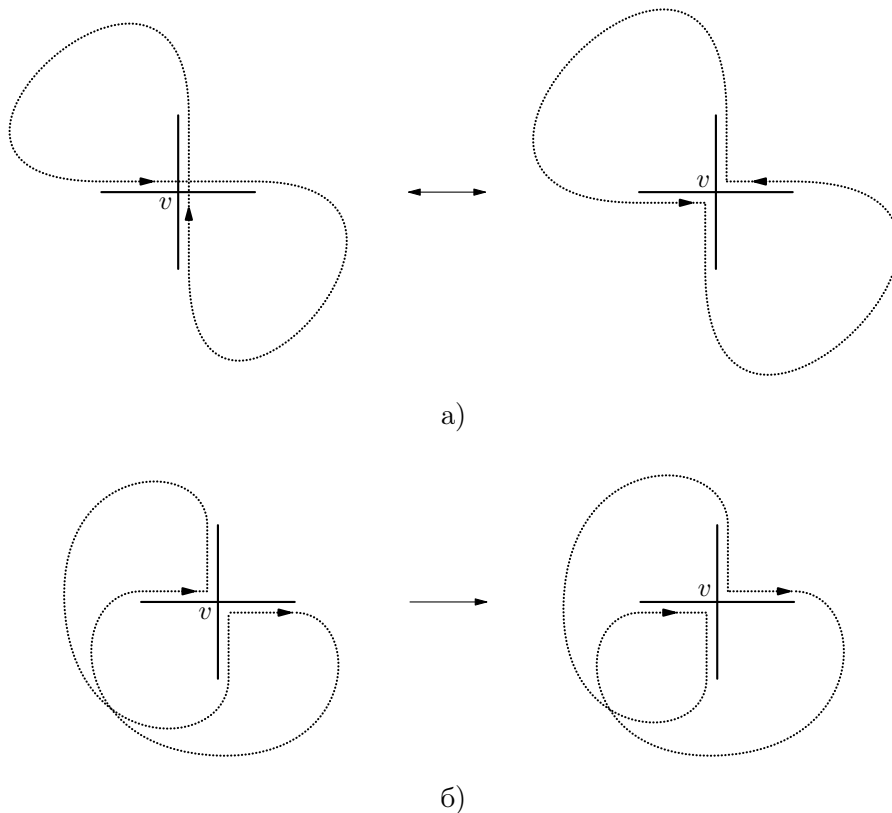


Рис. 10. Операция оснащенная звездочка

Далее, $m = (a^\varepsilon m_1 a^{\varepsilon'} m_2)$ — оснащенное циклическое слово с двойным вхождением. Положим $m * a = (a \overline{m}_1 a m_2)$, если $\varepsilon = \varepsilon' = G$ (рис. 10 а)); $m * a = (a^G \overline{m}_1 a^G m_2)$, если $\varepsilon = \varepsilon' \neq G$ (рис. 10 а)); $m * a = (a \overline{m}_1 a^{-1} m_2)$, если $\varepsilon = -\varepsilon'$ (рис. 10 б)). Таким образом, в результате применения операции оснащенная звездочка к букве a мы получаем: если a являлась гауссовой буквой, то в новом слове она будет негауссовой буквой с оснащением 0; если a являлась негауссовой буквой с оснащением 0 (соотв., 1), то в новом слове она будет гауссовой буквой (соотв., негауссовой буквой с оснащением 1).

Следующие три утверждения мы оставляем в качестве упражнений.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Любые два оснащенных циклических слова с двойным вхождением, полученные из 4-графа с крестовой структурой, связаны между собой последовательным применением операции оснащенная звездочка.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Каждый 4-граф с крестовой структурой имеет поворачивающий обход.

Очевидно, что существует много поворачивающих обходов и что не каждый 4-граф с крестовой структурой имеет гауссов цикл (если имеет гауссов цикл, то он единствен).

УПРАЖНЕНИЕ 5. Любые два поворачивающих обхода, заданные с помощью оснащенных циклических слов с двойным вхождением, получаются друг из друга последовательностью следующих операций: оснащенная звездочка, примененная к негауссовым буквам с оснащением 1, и $((t * a) * b) * a$, где t — оснащенное циклическое слово с двойным вхождением, a, b — негауссовы буквы с оснащением 0, причем они чередуются в слове t , т. е. $t = (\dots a \dots b \dots a \dots b \dots)$.

3. ГАУССОВЫ ЦИКЛЫ

В данном разделе мы даем явную формулу, позволяющую найти матрицу пересечений гауссова цикла из матрицы пересечений произвольного эйлерова цикла (конечно при условии, что гауссов цикл существует).

3.1. СУЩЕСТВОВАНИЕ ГАУССОВА ЦИКЛА

Нам потребуются два понятия для формулирования критерия существования гауссова цикла: *матрица пересечений* оснащенной хордовой диаграммы (оснащенного циклического слова с двойным вхождением) и *перестройка* множества хорд.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть D — оснащенная хордовая диаграмма, и пусть S^1 — ее окружность. Мы назовем две хорды *зацепленными*, если концы одной хорды лежат в разных связных компонентах множества, полученного из S^1 выбрасыванием концов другой хорды.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если мы нарисуем хордовую диаграмму и расположим все хорды внутри окружности, то зацепленные хорды будут пересекать друг друга на картинке.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. На языке оснащенных циклических слов с двойным вхождением определение зацепленных хорд формулируется следующим образом. Две буквы a, b называются *чередующимися*, если мы их встречаем последовательно $(\dots a^{\alpha_1} \dots b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_2} \dots b^{\beta_2} \dots)$ при прочтении слова циклически.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. *Матрица пересечений* хордовой диаграммы D с пронумерованными n хордами — это $n \times n$ матрица $A(D) = (a_{ij})$, удовлетворяющая следующим условиям

- 1) элемент a_{ii} равен оснащению хорды с номером i , т. е. или G , или 0 , или 1 ;
- 2) $a_{ij} = 1, i \neq j$, если и только если хорды с номерами i и j зацеплены;
- 3) $a_{ij} = 0, i \neq j$, если и только если хорды с номерами i и j не зацеплены.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Буква G , фигурирующая в определении матрицы пересечений, — это формальная переменная. В последующих конструкциях она будет указывать на строки и столбцы, которые удаляются. В результате мы будем иметь матрицу, состоящую только из нулей и единиц и рассматриваемую над \mathbb{Z}_2 .

ПРИМЕР 4. Пусть D — оснащенная хордовая диаграмма, изображенная на рис. 9. Пронумеруем все хорды из D : хорда aa имеет номер 1, хорда bb — номер 2 и т. д. Тогда

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & G & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что нам дана оснащенная хордовая диаграмма D , все хорды которой имеют оснащение 0 или 1 (без гауссовых хорд).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Определим *перестройку вдоль хорд* хордовой диаграммы D следующим образом. Для каждой хорды, имеющей оснащение 0 (соответственно, 1), мы рисуем параллельную (соответственно, пересекающую) хорду около первоначальной хорды и удаляем дуги окружности между соседними концами, как показано на рис. 11. Незначительным шевелением картинка в \mathbb{R}^2 перестраивается в одномерное многообразие в \mathbb{R}^3 . Это многообразие $M(D)$ и есть *результат перестройки*, см. рис. 12.

Оказывается, число компонент связности многообразия $M(D)$ может быть определено из матрицы пересечений $A(D)$ диаграммы D .

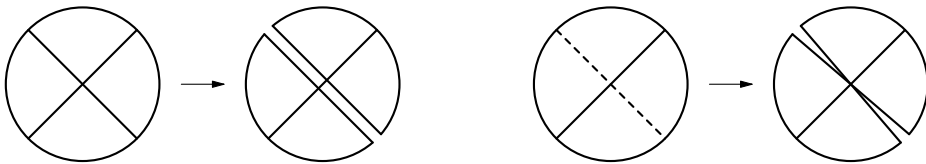


Рис. 11. Перестройка окружности по хордам

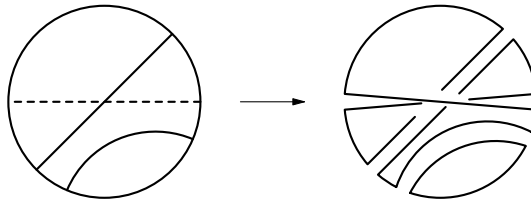


Рис. 12. Многообразии $M(D)$

ТЕОРЕМА 3 (см. [9, 14, 21, 23, 25]). Пусть D – оснащенная хордовая диаграмма, не содержащая гауссовых хорд. Тогда число компонент связности многообразия $M(D)$ равно $\text{corank } A(D) + 1$, где $A(D)$ – матрица пересечений диаграммы D над \mathbb{Z}_2 и коранг corank вычисляется над \mathbb{Z}_2 .

Напомним, что коранг равен размерности матрицы минус ее ранг.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим хордовую диаграмму D , изображенную на рис. 13 слева. Совершив перестройку вдоль всех хорд, мы получим многообразие $M(D)$, см. рис. 13 справа. Легко видеть, что число компонент многообразия $M(D)$ равно двум.

С другой стороны мы имеем

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \text{corank } A(D) = 3 - \text{rank } A(D) = 3 - 2 = 1.$$

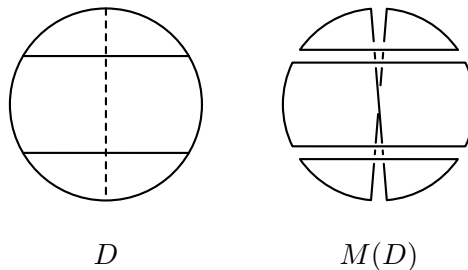


Рис. 13. Хордовая диаграмма D и многообразии $M(D)$

УПРАЖНЕНИЕ 6. Для хордовой диаграммы D , изображенной на рис. 14, найти число компонент связности многообразия $M(D)$, совершив перестройку вдоль всех хорд, и число $\text{corank } A(D) + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Докажем теорему по индукции, следуя статье [25].

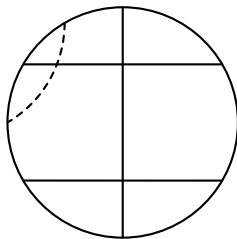


Рис. 14. Оснащенная хордовая диаграмма

База индукции. Пусть оснащенная хордовая диаграмма содержит только одну хорду, и оснащение данной хорды равно 1. Тогда $A(D) = (1)$ и $\text{corank } A(D) + 1 = 1$. Легко видеть, что в результате перестройки вдоль хорды мы получим одну компоненту связности. Таким образом, в данном случае формула имеет место.

Легко также показать по индукции справедливость теоремы для хордовых диаграмм, все хорды которых не зацеплены друг с другом и имеют оснащение 0. Справедливость этого утверждения мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Предположение индукции. Пусть утверждение теоремы справедливо для всех оснащенных хордовых диаграмм, количество хорд которых меньше n .

Шаг индукции. Пусть D — оснащенная хордовая диаграмма, содержащая ровно n хорд. Возможны следующие два случая.

(1) Пусть D содержит хорду a с оснащением 1. Рассмотрим оснащенную хордовую диаграмму D' , получающуюся из D применением операции оснащенная звездочка к хорде a и последующим удалением этой хорды, т. е. мы совершили перестройку вдоль a .

Легко видеть, что числа компонент связности многообразий $M(D)$ и $M(D')$ совпадают.

С другой стороны мы имеем (после подходящей нумерации)

$$A(D) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 \end{pmatrix}, \quad A(D') = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_1^\top & A_2 + (1) \end{pmatrix},$$

здесь жирные $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ указывают на вектор-столбцы, полностью состоящие из 0 и 1 соответственно; (1) — это матрица, полностью состоящая из единиц, и A_i — какие-то матрицы.

Покажем, что коранги матриц $A(D)$ и $A(D')$ совпадают. Применяя элементарные преобразования к строкам матрицы $A(D)$, мы получим

$$A(D) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{0} & A_1^\top & A_2 + (1) \end{pmatrix},$$

т. е. $\text{corank } A(D) = \text{corank } A(D')$. Хордовая диаграмма D' содержит $n - 1$ хорд, т. е. для нее утверждение теоремы справедливо. Справедливость утверждения теоремы для D следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \text{число компонент многообразия } M(D) &= \\ &= \text{число компонент многообразия } M(D') = \\ &= \text{corank } A(D') + 1 = \text{corank } A(D) + 1. \end{aligned}$$

(2) Пусть все хорды оснащенной хордовой диаграммы D имеют оснащение, равное нулю. Если все хорды попарно не зацеплены, то справедливость утверждения для D следует из базы индукции. Пусть хорды a и b зацеплены. Рассмотрим оснащенную хордовую диаграмму D' , получающуюся из D последовательным применением операции оснащенная звезда к хордам a , b и снова a , и последующим удалением этих хорд, т. е. мы совершили перестройку вдоль a и b .

Доказательство этого случая аналогично доказательству первого случая, мы оставляем его в качестве упражнения.

Пусть D — оснащенная хордовая диаграмма с матрицей пересечений $A(D)$. Построим матрицу $\hat{A}(D)$, выкидывая строки и столбцы матрицы $A(D)$, соответствующие гауссовым хордам.

ТЕОРЕМА 4 ((см. [7, 18])). *Пусть H — 4-граф с крестовой структурой, и пусть U — эйлеров цикл на H . Тогда H имеет гауссов цикл тогда и только тогда, когда $\text{corank}(\hat{A}(D) + E) = 0$, где D — оснащенная хордовая диаграмма, построенная из U , и E — единичная матрица.*

УПРАЖНЕНИЕ 7. Используя теорему 3 и рис. 15, докажите теорему 4.

3.2. ГАУССОВ ЦИКЛ

Пусть H — 4-граф с крестовой структурой, имеющий гауссов цикл, и пусть U — эйлеров цикл на H . Будем считать, что $m(U)$ (соотв., хордовая диаграмма D) не имеет гауссовых вершин (соотв., гауссовых хорд), т. е. U — поворачивающий обход.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{kl})$ равны с точностью до диагональных элементов, если $a_{ij} = b_{ij}$ при $i \neq j$.

Основной результат статьи — следующая теорема.

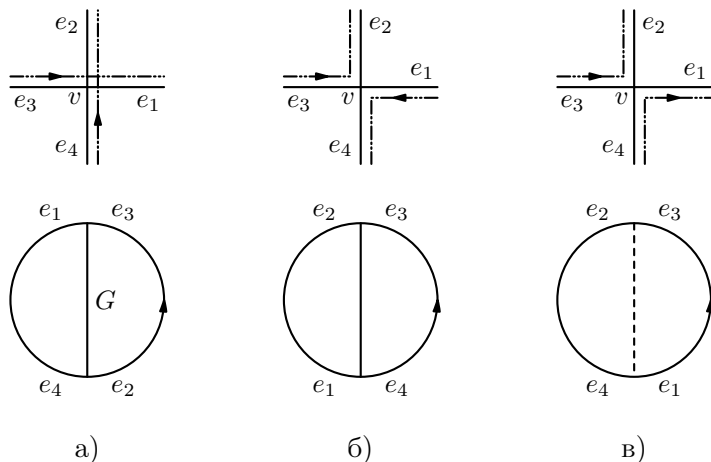


Рис. 15. Структура оснащенной хордовой диаграммы

ТЕОРЕМА 5 ([6]). *Матрица пересечений гауссова цикла, рассматриваемая над \mathbb{Z}_2 , с точностью до диагональных элементов равна $(A(D) + E)^{-1}$.*

Перед доказательством теоремы мы сформулируем утверждение, на котором базируется доказательство теоремы, в виде упражнения.

УПРАЖНЕНИЕ 8. Рассмотрим две операции, которые мы будем называть *уменьшающими*:

- 1) оснащенная звездочка, примененная к негауссовой хорде с оснащением 0, см. рис. 10 а);
- 2) $m \mapsto (((m*a)*b)*a)$, где m — оснащенное циклическое слово с двойным вхождением, a, b — негауссовы буквы (хорды) с оснащением 1 и они чередуются в m (зацеплены), см. рис. 16.

Докажите, что, применяя эти две операции к диаграмме D , мы за конечное число шагов получим хордовую диаграмму, содержащую только гауссовы хорды.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Пусть $A(D)$ — матрица пересечений хордовой диаграммы D , не содержащей гауссовых хорд. Будем применять уменьшающие операции. Без ограничения общности можно считать, что уменьшающие операции применяются к хордам с наименьшими номерами в нашей нумерации. Тогда первая уменьшающая операция, примененная к первому элементу, на

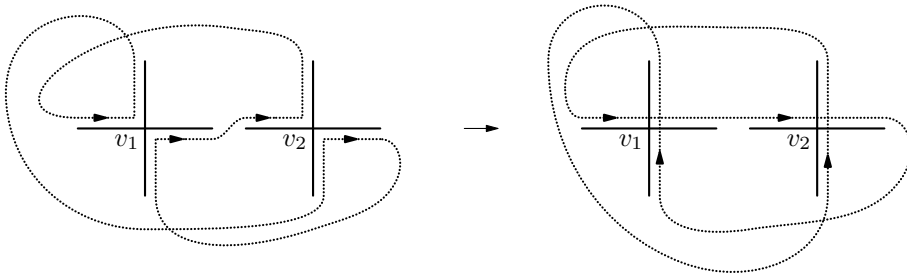


Рис. 16. Уменьшающая операция

языке матриц выглядит следующим образом

$$A(D) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow A(D') = \begin{pmatrix} G & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 + (1) \end{pmatrix},$$

а вторая, примененная к двум первым элементам, —

$$A(D) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_1^\top & A_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_2^\top & A_5^\top & A_7 & A_8 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & A_9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \rightsquigarrow A(D') = \begin{pmatrix} G & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & G & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_1^\top & A_4 & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & A_7 & A_8 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & A_9 \end{pmatrix}.$$

Мы будем последовательно применять эти операции к хордовой диаграмме D . Наша следующая цель — показать, что после применения уменьшающих операций к оснащенной хордовой диаграмме D , не имеющей гауссовых хорд, мы в итоге получим оснащённую хордовую диаграмму, содержащую только гауссовы хорды и имеющую с точностью до диагональных элементов матрицу $(A(D) + E)^{-1}$ своей матрицей пересечений.

Матрицу $(A(D) + E)^{-1}$ мы будем находить, совершая элементарные преобразования над строками матрицы $B(D) = A(D) + E$ с $\det(A(D) +$

$+E) = 1$. Построим матрицу $(A(D)+E|E)$ размера $n \times 2n$. Обозначим через $\widehat{M}_{ij\dots k}$ матрицу, полученную из матрицы M удалением строк и столбцов с номерами i, j, \dots, k .

Так как $\det B(D) = 1$, то или существует диагональный элемент равный 1, или два таких номера i и j , что $b_{ii} = b_{jj} = 0$, $b_{ij} = b_{ji} = 1$.

В первом случае без ограничения общности можно предположить, что $b_{11} = 1$. Совершая элементарные преобразования над матрицей $B(D)$ с помощью первой строки, получаем

$$\begin{aligned} B(D) = A(D) + E &= \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 + E \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow B'(D) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 \\ \mathbf{0} & A_1^\top & A_2 + E + (1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (B(D)|E) &\rightsquigarrow (B'(D)|E') = \\ &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & \mathbf{0} & E & 0 \\ \mathbf{0} & A_1^\top & A_2 + E + (1) & \mathbf{1} & 0 & E \end{array} \right). \end{aligned}$$

После применения первой уменьшающей операции к хордовой диаграмме D хорда, соответствующая вершине v_1 , становится гауссовой хордой, и пересечения негауссовых хорд определяются матрицей $\widehat{B'(D)}_1$, а другие пересечения определяются первым столбцом матрицы E' (с точностью до диагональных элементов).

Во втором случае без ограничения общности можем предположить, что $b_{11} = b_{22} = 0$, $b_{12} = b_{21} = 1$. Совершая элементарные преобразования с помощью первых двух строк матрицы $B(D)$, мы получим

$$\begin{aligned} B(D) = A(D) + E &= \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_1^\top & A_4 + E & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_2^\top & A_5^\top & A_7 + E & A_8 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & A_9 + E \end{pmatrix} \rightsquigarrow \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow B'(D) = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_1^\top & A_4 + E & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & A_7 + E & A_8 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & A_9 + E \end{array} \right)$$

и

$$\begin{aligned} & (B(D)|E) \rightsquigarrow (B'(D)|E') = \\ & = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_0 + E & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_1^\top & A_4 + E & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & A_7 + E & A_8 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & A_9 + E \end{array} \right) \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ 1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & E & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & E & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & E \end{array} \right). \end{aligned}$$

После применения второй уменьшающей операции к хордовой диаграмме D хорды, соответствующие вершинам v_1 и v_2 , становятся гауссовыми хордами, пересечения негауссовых хорд определяются матрицей $\widehat{B'(D)}_{12}$, а оставшиеся пересечения определяются первыми двумя столбцами матрицы E' .

Предположим, что мы совершили k уменьшающих операций. После этих преобразований матрица $(B(D)|E)$ преобразуется в матрицу

$$(B'(D)|E') = \left(\begin{array}{cc|cc} E & C & F & 0 \\ 0 & R & S & E \end{array} \right),$$

где F — это $(l \times l)$ -матрица, R — симметрическая матрица. Тогда новая оснащенная хордовая диаграмма содержит l гауссовых хорд, пересечения негауссовых хорд определяются матрицей R , а все оставшиеся пересечения — первыми l столбцами матрицы E' . Так как $\det B'(D) = 1$, то $\det R = 1$, и в матрице R существуют или диагональный элемент, равный 1, или два таких номера p и q , что $r_{pp} = r_{qq} = 0$, $r_{pq} = r_{qp} = 1$.

Рассмотрим первый случай. Без ограничения общности считаем, что $r_{11} = 1$. В этом случае мы применим первую уменьшающую операцию. Мы получим

$$\begin{aligned}
 (B'(D)|E') &= \left(\begin{array}{ccc|cc} E & C & & F & 0 \\ 0 & R & & S & E \end{array} \right) = \\
 &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} E & C_1 & C_2 & C_3 & F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & S_1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & R_1 & R_2 & S_2 & \mathbf{0} & E & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & R_2^\top & R_3 & S_3 & \mathbf{0} & 0 & E \end{array} \right) \rightsquigarrow \\
 &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} E & 0 & C'_2 & C'_3 & F'_1 & F'_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & S_1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & R_1 & R_2 & S_2 & \mathbf{0} & E & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & R_2^\top & R_3 + (1) & S'_3 & \mathbf{1} & 0 & E \end{array} \right) = \\
 &= \left(\begin{array}{ccc|cc} E & C' & & F' & 0 \\ 0 & R' & & S' & E \end{array} \right) = (B''(D)|E''),
 \end{aligned}$$

где F' — это $((l+1) \times (l+1))$ -матрица, R' — это симметрическая матрица. Число гауссовых хорд равно $l+1$, пересечения негауссовых хорд определяются матрицей R' , а все оставшиеся пересечения — первыми $l+1$ столбцами матрицы E'' . Второй случай рассматривается аналогично первому.

В конце мы получим матрицу

$$\left(E \mid (A(D) + E)^{-1} \right)$$

и оснащенную хордовую диаграмму только с гауссовыми хордами. Матрица пересечений полученной хордовой диаграммы с точностью до диагональных элементов равна $(A(D) + E)^{-1}$.

Мы доказали теорему для недиагональных элементов, но мы знаем, что на диагонали будут стоять буквы G . \square

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Пусть H — произвольный (связный и содержащий хотя бы одну вершину) ориентированный 4-граф, причем в каждую вершину входят и выходят ровно два полуребра (ориентации полуребер, соответствующих одному ребру, совпадают). Легко видеть, что на графе H существует ориентированный эйлеров цикл U . Зададим крестовую структуру на H таким образом, чтобы U являлся поворачивающим обходом на уже новом графе с крестовой структурой, и в каждой вершине пара противоположных полуребер состоит из входящего и исходящего из нее полуребер. Если на полученном ориентированном 4-графе с крестовой структурой существует ориентированный гауссов цикл, то теорема 5 дает формулу для

матрицы пересечений гауссова цикла. Таким образом, последнее утверждение о существовании гауссова цикла является теоремой 3.4 из [19], и, следовательно, теорема 3.4 из [19] является частным случаем теоремы 5.

4. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ 5

Используя разные критерии планарности 4-графа с крестовой структурой и теорему 5, мы в данном разделе сформулируем интересные факты, касающиеся симметрических матриц. На самом деле не каждая симметрическая матрица является матрицей пересечений некоторого эйлерова цикла [10], но как было показано в [6] аналогичные утверждения можно сформулировать для всех симметрических матриц над полем \mathbb{Z}_2 .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть U_1 и U_2 — два поворачивающих обхода одного и того же 4-графа с крестовой структурой, и пусть D_1 и D_2 — их оснащенные хордовые диаграммы такие, что $\det(A(D_i) + E) = 1$. Тогда матрицы $(A(D_1) + E)^{-1}$ и $(A(D_2) + E)^{-1}$ совпадают с точностью до диагональных элементов.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим 4-граф с крестовой структурой, состоящий из 4 вершин v_i , рис. 5 (структура индуцируется из плоскости). Пусть U_1 и U_2 — два поворачивающих обхода, заданные оснащенные циклическими словами с двойными вхождениями

$$m(U_1) = (v_1 v_4 v_2 v_1^{-1} v_2 v_3 v_4 v_3) \quad \text{и} \quad m(U_2) = (v_1 v_4 v_3 v_4 v_2 v_3 v_1 v_2^{-1}),$$

соответственно. Тогда

$$A(m(U_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(m(U_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы получаем

$$(A(m(U_1)) + E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(A(m(U_2)) + E)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$A = \begin{pmatrix} G & 0 & 1 & 1 \\ 0 & G & 1 & 1 \\ 1 & 1 & G & 1 \\ 1 & 1 & 1 & G \end{pmatrix}$$

— матрица пересечений гауссова цикла, заданного с помощью слова
 $(v_1 v_4 v_3 v_1 v_2 v_4 v_3 v_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Оснащенная хордовая диаграмма называется *d-диаграммой* [4], если все ее хорды являются негауссовыми хордами с оснащением 0, и множество всех ее хорд может быть разбито на два дизъюнктивных подмножества, причем хорды из одного множества не зацеплены друг с другом.

Следующее следствие сразу следует из критерия планарности 4-графа с крестовой структурой, сформулированного на языке поворачивающих обходов, и из теории атомов, см. [3, 15].

СЛЕДСТВИЕ 2 (В. О. МАНТУРОВ). Пусть D — оснащенная хордовая диаграмма, все хорды которой являются негауссовыми с оснащением 0, и $\det(A(D) + E) = 1$. Если числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}_2$ таковы, что

$$\det((A(D) + E)^{-1} + \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = 1,$$

то матрица

$$((A(D) + E)^{-1} + \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^{-1}$$

имеет единицы на диагонали. Кроме того, если D является *d-диаграммой*, то матрица

$$((A(D) + E)^{-1} + \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^{-1}$$

является матрицей пересечений *d-диаграммы*. Здесь через

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

обозначена диагональная матрица с числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на диагонали.

Геометрически первая часть следствия 2 означает следующее. Имея 4-граф H с крестовой структурой и некоторый поворачивающий обход U на нем, мы можем задать ориентацию на H : ориентируем обход U произвольным образом и зададим с помощью него ориентацию на H . Мы скажем, что обход U задает *седловую ориентацию*, если каждая пара противоположных ребер состоит из двух входящих в вершину или двух исходящих из нее полуредер, см. рис. 17. Заметим, что наличие седловой ориентации не зависит от ориентации обхода U . Оказывается, если какой-то поворачивающий обход задает седловую ориентацию на 4-графе с

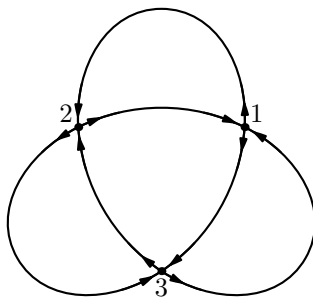


Рис. 17. Седловая ориентация

крестовой структурой, то и любой другой поворачивающий обход тоже будет задавать седловую ориентацию. Вторая часть следствия относится к вопросу планарности. Если у нас имеется планарный 4-граф с крестовой структурой, т. е. вложенный в плоскость граф с сохранением структуры, то все поворачивающие обходы задают d -диаграммы.

Хорошо известно необходимое условие планарности 4-графа с крестовой структурой в терминах матрицы пересечений гауссова цикла.

ТЕОРЕМА 6 (ТЕОРЕМА ГАУССА [16]). Пусть H — 4-граф с крестовой структурой, имеющий гауссов цикл, и пусть D — гауссова диаграмма. Тогда если граф H планарен, то сумма элементов в каждой строке (каждом столбце) матрицы $A(D)$, за исключением диагонального элемента, равна нулю по модулю два.

Отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть D — d -диаграмма, и $\det(A(D) + E) = 1$. Тогда сумма элементов в каждой строке (каждом столбце) матрицы $(A(D) + E)^{-1}$, за исключением диагонального элемента, равна нулю по модулю два.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. О. Мантуров. Вложения четырехвалентных оснащенных графов в двумерные поверхности // Доклады РАН. Т. 424, №3. 2009. Р. 308–310.
- [2] В. О. Мантуров. Доказательство гипотезы В. А. Васильева о планарности сингулярных зацеплений // Известия РАН: Сер. Мат. Т. 69, №5. 2005. Р. 169–178.
- [3] В. О. Мантуров. Теория узлов. Москва–Ижевск: РХД. 2005.

- [4] В. О. Мантуров. *Скобочная полугруппа узлов* // Мат. Заметки. Т. 67, №4. 2000. P. 449–462.
- [5] В. О. Мантуров. *Четырехвалентные графы с крестовой структурой. Вложения в двумерные поверхности* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 16. 2012. С. 94–104.
- [6] Д. П. Ильютко. *Оснащенные 4-графы: эйлеровы циклы, гауссовы циклы и поворачивающие обходы* // Матем. сб. Т. 202, №9. 2011. P. 53–76.
- [7] Д. П. Ильютко, В. О. Мантуров. *Граф-зацепления* // Доклады РАН. Т. 428, №5. 2009. P. 591–594.
- [8] D. Bar-Natan. *On the Vassiliev Knot Invariants* // Topology. Vol. 34. 1995. P. 423–472.
- [9] D. Bar-Natan, S. Garoufalidis. *On the Melvin – Morton – Rozansky conjecture* // Inv. Math. Vol. 125. 1996. P. 103–133.
- [10] A. Bouchet. *Circle graph obstructions* // J. Combinatorial Theory, ser. B. Vol. 60. 1994. P. 107–144.
- [11] G. Cairns, D. Elton. *The planarity problem for signed Gauss words* // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. Vol. 2. 1993. P. 359–367.
- [12] G. Cairns, D. Elton. *The planarity problem. II* // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. Vol. 5. 1996. P. 137–144.
- [13] S. V. Chmutov, S. V. Duzhin, S. K. Lando. *Vassiliev Knot Invariants. I, II, III* // Adv. Sov. Math. Vol. 21. 1994. P. 117–147.
- [14] M. Cohn, A. Lempel. *Cycle decomposition by disjoint transpositions* // J. Combin. Theory, ser. A. Vol. 13. 1972. P. 83–89.
- [15] A. T. Fomenko. *The theory of multidimensional integrable hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom* // Adv. Sov. Math. Vol. 6. 1991. P. 1–35.
- [16] C. F. Gauss *Werke*. Band 8. Göttingen: Teubner. 1900.
- [17] M. Goussarov, M. Polyak, O. Viro. *Finite type invariants of classical and virtual knots* // Topology. Vol. 39. 2000. P. 1045–1068.
- [18] D. P. Илютко, В. О. Мантуров. *Introduction to graph-link theory* // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. Vol. 18. 2009. P. 791–823.

- [19] J. Jonsson. *On the number of Euler trails in directed graphs* // Math. Scand. Vol. 90. 2002. P. 191–214.
- [20] A. Kotzig. *Eulerian lines in finite 4-valent graphs and their transformations* // Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966). New York: Academic Press. 1968. P. 219–230.
- [21] G. Moran. *Chords in a circle and linear algebra over $GF(2)$* // J. Combin. Theory, ser. A. Vol. 37. 1984. P. 239–247.
- [22] R. C. Read, P. Rosenstiehl. *On the Gauss crossing problem* // Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai. Amsterdam and New-York: North-Holland. 1976. P. 843–876.
- [23] E. Soboleva. *Vassiliev Knot Invariants Coming from Lie Algebras and 4-Invariants* // Journal of Knot Theory and Its Ramifications. Vol. 10. 2001. P. 161–169.
- [24] S. Stahl. *On the product of certain permutations* // Europ. J. Combin. Vol. 8. 1987. P. 69–72.
- [25] L. Traldi *Binary nullity, Euler circuits and interlace polynomials*. 2009. [arXiv:math.CO/0903.4405](https://arxiv.org/abs/math/0903.4405)
- [26] V. G. Turaev *Cobordisms of Words*. 2005. [arXiv: math.CO/0511513v2](https://arxiv.org/abs/math/0511513v2)