Задача часовщика

Е. А. Горин

1. Задача, о которой пойдёт речь, вероятно, принадлежит к математическому фольклору. Она выглядит как безобидный вопрос, с которым «человек с улицы» может обратиться к профессионалу, и услышать в ответ «ну, конечно, конечно», однако, через 2–3 минуты прозвучит что-то, вроде, смущённого «почему-то сразу не получается, но я обязательно, и т. д.»

В своё время Б. Я. Левин рассказал мне, что в такую ситуацию попал Н. И. Ахиезер, которого часовщик после выяснения профессии клиента, спросил, не покажет ли он такое число, которое увеличится в 6 раз, если его последнюю цифру переставить на первое место. Выражаясь несколько более изысканно, требуется указать число в десятичной записи, которое увеличится в 6 раз при простейшей циклической перестановке его цифр (или вращении, если считать цифры расположенными равномерно вдоль окружности).

Пикантность ситуации состоит в том, что такие числа есть, их бесконечно много, но минимальное из них имеет 58 десятичных знаков. Я расскажу об этой задаче и её вариантах.

Вариант этой задачи, в котором 6 меняется на 2 (и 2 указывается в качестве правой десятичной цифры), фигурирует ещё в классической книге С. П. Боброва «Волшебный двурог» (что напомнил мне Ю. А. Брудный), первое издание которой под редакцией И. В. Арнольда вышло в 1948 г. Недавно она была переиздана [1] тиражом 500 экз., но зато теперь доступна в Интернете. Доступна в Интернете и нестареющая брошюра В. Литцмана «Великаны и карлики в мире чисел» [2].

Сравнительно недавно вариант с числом 2 (которое также заранее поставлено справа) был среди прочего детально исследован в заметке [3] (на которую мне указал Б. Н. Кукушкин). В этой заметке используется связь между перестановками цифр и разложением простых дробей в периодические десятичные. Изящное описание связей между разложениями простых дробей в десятичные дано в небольшом эссе, составляющем раздел в [4, п. 23, с. 174], практически с теми же простейшими примерами, что и в [3] (правда, там авторы отступают от способа Гаусса, который использовал общие теоремы Эйлера о сравнениях). Тем, кто в своё время пропустил эту тему, имеет смысл просматривать эти тексты параллельно.

Некоторым из опрошенных, как оказалось, «задача часовщика» известна, однако никто не сказал мне, где она обсуждается в печати (в отличие от задачи, в которой вместо числа 6 фигурирует 2). Например, А. М. Вершик, как мне стало понятно из переписки, давно знает практически всё, о чем я собираюсь рассказать.

Решение этой и близких задач может быть основано исключительно на первообразных корнях и индексах, что при небольших «коэффициентах растяжения» позволяет предъявить алгоритмы получения числа с точной оценкой числа шагов. В некоторых случаях время можно заметно сэкономить, если использовать квадратичный закон взаимности и готовую программу превращения правильной дроби в десятичную, в других — довести дело «до числа» возможно лишь ценой длинных вычислений. Я использую здесь только элементарные факты теории чисел (в частности, квадратичный закон привлекать не обязательно), о которых можно прочесть в классических учебниках, например, в [5] или [6]. Кроме того, почти в каждом номере «Математического просвещения» кто-нибудь по ходу дела непременно объясняет, что такое функция Эйлера φ и зачем она нужна.

Сначала мы введём обозначения, уточним вопрос и посмотрим, до чего можно добраться в более общих случаях.

2. Пусть k и l — натуральные числа, причём, $1 < k < l$ и $l \geqslant 3$. Число l — основание системы счисления, k — «коэффициент растяжения». В исходной задаче $k = 6$, $l = 10$. Латинские буквы и стандартные комбинации арабских цифр в обычном написании, скажем, 2, 13, и т. п., и без дополнительных пометок используются для обозначения неотрицательных целых чисел. С другой стороны, например, $(12)_7$ изображает натуральное число 9. Впрочем, ниже выражения вроде $(12)_7$ не используются.

Мы будем использовать позиционную систему с основанием l. Цифры в этой системе обозначаются греческими буквами, например, $X = \beta_1\beta_2\ldots\beta_r$. Считается, что первая цифра *в искомом решении* (не поставленной пока задачи!) не является нулевой. Поэтому для искомого числа $l^{r-1} \leqslant X < l^r$.

Убирая из записи искомого числа X последнюю цифру, мы получим запись некоторого числа A с $r-1$ знаками, причём первый знак не меняется. Поэтому $l^{r-2} \leqslant A < l^{r-1}$.

Пусть b — число, изображаемое цифрой β_r. Тогда число X получает представление $X = Al+b$, и условие задачи *нахождения числа X, которое при вращении увеличивается в k раз*, принимает вид

$$(Al + b)k = bl^{r-1} + A. \qquad (1)$$

Из условия (1) и неравенства $A \geqslant l^{r-2}$ легко вытекает, что $b > k - 1$. Ввиду целочисленности отсюда следует, что $b \geqslant k$. Итак, $k \leqslant b < l$. Заметим, что левое неравенство возникает ввиду желания не рассматривать числа, запись которых *начинается* нулевой цифрой (хотя в ряде других случаев лучше вместо этого фиксировать длину записи). Этим же исключается $l = 2$. Сформулированная задача, как оказывается, имеет бесконечно много решений, которые не трудно описать целиком, но мы, если противное не ясно из контекста, имеем в виду минимальное решение (впрочем, последнюю цифру, вообще говоря, можно изменять, и тогда число изменяется, однако длина записи может изменяться или нет).

3. Положим $t = kl - 1$. Тогда соотношение (1) можно переписать в виде

$$At = (l^{r-1} - k)b. \tag{2}$$

Теорема. *Предположим дополнительно, что* $\gcd(b,t) = 1$. *Тогда соотношение* (2) *может выполняться в том и только в том случае, если выполняется сравнение*

$$l^r \equiv 1 \pmod t. \tag{3}$$

Сравнение (3) *заведомо выполняется, если* $r = \varphi(t)$, *где* φ *— функция Эйлера. Минимальному* X *соответствуют минимальное* r *и минимальное* (*допустимое*) b.

Доказательство. Умножим равенство (2) на l. Тогда получится, что $Atl = (l^r - kl)b$. По условию, число b обратимо по модулю t. Кроме того, $kl = 1 + t$. Таким образом, соотношение (2) влечёт за собой (3). Этот путь легко пройти в обратном направлении.

Тот факт, что значение $r = \varphi(t)$ годится, — следствие теоремы Эйлера, поскольку $\gcd(l,t) = 1$. Утверждение о минимальности вытекает из монотонности по r и b правой части в (2). В любом случае r — делитель порядка группы обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}/(t)$, т. е. числа $\varphi(t)$. ☐

Условие $\gcd(b,t) = 1$ не очень существенно: достаточно зачеркнуть общий множитель в равенстве (2), и доказательство можно повторить. Однако, формулировка теоремы усложнится, хотя в некоторых примерах ответ может упроститься. С такими примерами мы встретимся уже при составлении небольшой таблицы с $l = 10$.

4. Будем рассматривать (3) в качестве уравнения относительно (натурального) r при фиксированных (натуральных) l и t с условием $\gcd(l,t) = 1$.

По теореме Эйлера, $r = \varphi(t)$ является решением, а каждое меньшее решение — делитель этого.

Это позволяет предъявить алгоритм поиска X с оценкой $\leqslant \varphi(t)$ числа шагов.

Поясним это на стандартном примере, в котором $l = 10$, $k = b = 2$. Пусть

$$X = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_{r-1}\beta_r,$$

так что $\beta_r = 2$. Очевидно, что последней цифрой числа $2X$ будет 4. Поэтому $\beta_{r-1} = 4$. Имея эту информацию, мы можем определить β_{r-2}, и т. д. В данном случае $t = 19$, так что $r \leqslant \varphi(t) = t - 1 = 18$, и процесс остановится быстро (но не очень: фактически в данном случае $r = 18$).

Хотя процесс вычисления r, не говоря уже о вычислении X, если не применять дополнительных средств, может заметно затянуться даже при небольших k, последний пример укладывается в следующую таблицу.

$l = 10$				
k	b	t	$\varphi(t)$	r
2	2–9	19	18	18
3	3–9	29	28	28
4	4–9	39	24	6
5	$\neq 7$	49	42	42
5	7	49	42	6
6	6–9	59	58	58
7	7–9	69	44	22
8	8, 9	79	78	13
9	9	89	88	44

Эту таблицу нелишне прокомментировать.

При $k = 2$ и $k = 3$ имеем $t = 19$ и $t = 29$ соответственно. В обоих случаях получаются простые t, так что группы обратимых элементов соответствующих полей $\mathbb{Z}/(t)$ циклические. Для простых < 100 в [6] предъявлены таблицы *всех* первообразных корней и индексов (по избранному корню; обычно других корней не указывают), т. е. образующих в группах обратимых элементов и показателей степеней образующих, дающих данный класс вычетов. В обоих случаях $l = 10$ оказывается в числе образующих, откуда сразу следует, что в этих двух случаях $r = \varphi(t) = t - 1$.

Для $k = 4$ получается $t = 39 = 3 \cdot 13$. Если $b = 6$ или $b = 9$, то условие $\gcd(b, t) = 1$ *нарушается*, однако это не играет роли, так как 3 является делителем числа $10^r - 1$ при каждом r. Таким образом, при всех b дело сводится к делимости на 13. При простом 13 число $l = 10$ *не попадает* в список первообразных корней. Однако, привлекая дополнительно таблицу индексов, легко довести дело до конца, и выходит, что при $k = 4$ и всех b будет $r = 6$. Глядя на таблицу, появлению такого «универсального» карлика, можно удивиться не меньше, чем появлению великана. Вычисления оказываются совсем коротким (по поводу вычислений см. также следующий раздел), и в качестве наименьшего (при $b = 4$) будет $X =$

$$\mathbf{102564}$$

(точку в конце мы намеренно не ставим).

Если $k = 5$, то $t = 49 = 7 \cdot 7$. В этом случае группа обратимых элементов снова циклическая (так как порядок кольца вычетов — степень нечётного простого), но $\varphi(t) = 42$. Если $b \neq 7$, то $\gcd(b, t) = 1$. Мы утверждаем, что в этом случае $r = \varphi(t)$. Действительно, при $r < \varphi(t)$ для r фактически оставались бы возможности 6, 14 и 21 (так как r делит $\varphi(t)$). Но эти возможности легко исключаются при помощи сравнения $100 \equiv 2 \pmod{49}$.

Итак, при $b \neq 7$ будет $r = 42$. Простое вычисление показывает, что в случае $b = 7$ будет $r = 6$ и $X =$

$$\mathbf{142857}$$

Если $k = 6$, то можно дословно повторить рассуждение, касающееся двух первых значений. Однако этот случай в понятном смысле особенный, и мы покажем, как обойтись без таблиц, используя общие соображения (включая квадратичный закон взаимности). Существенно в приводимом ниже рассуждении только то, что t и $(t-1)/2$ оба простые. Заметим, что X мы предъявим позже.

Случай $r = 2$ легко исключается. Следовательно, остаётся выяснить, что $29 = (t-1)/2$ не годится в качестве r. Заметим, что при $t = 59$ число квадратичных вычетов (и невычетов) равно 29. Вместе с тем, число образующих в группе обратимых элементов равно $\varphi(58) = 28$. Для каждой из образующих a, по теореме Эйлера, будет $\lambda_{59}(a) = -1$, где λ (с индексом) — символ Лежандра. Удаляя -1 из множества невычетов, мы получим, что остальные невычеты — образующие. Таким образом, остаётся убедиться, что $\lambda_{59}(10) = -1$, и, по модулю квадратичного закона взаимности, дело сводится к элементарной арифметике.

Последние три строчки заполняются аналогично (какой-нибудь из предыдущих), и мы эту процедуру опустим.

5. Поскольку нас интересует наименьшее число, отвечающее данному k, мы будем считать в дальнейшем, что $b = k$.

Правильная дробь k/t имеет чисто периодическое l-ичное разложение, так как $\gcd(l, t) = 1$. Для десятичных разложений это детально обсуждается в [4], и этот случай ничем не отличается от общего. В частности, длина r периода есть как раз наименьшее положительное решение сравнения (3).

Пусть теперь X — искомое число (т. е. число, отвечающее значениям $l = 10$, $k = b = 6$). Имея в виду l-ичное представление, запишем число в каноническом виде, $X = \beta_1\beta_2\ldots\beta_{r-1}\beta_r$. Положим $Y = \beta_r\beta_1\ldots\beta_{r-2}\beta_{r-1}$. Тогда $Y = kX$.

Рассмотрим периодические дроби

$$x = 0.(\beta_1\beta_2\ldots\beta_{r-1}\beta_r) \text{ и } y = 0.(\beta_r\beta_1\ldots\beta_{r-2}\beta_{r-1}).$$

Используя представления x и y в виде сумм геометрических прогрессий и равенство $Y = kX$, легко усмотреть, что $y = kx$. Вместе с тем, из «графических» соображений ясно, что $y = (x + k)/l$. Таким образом,

$$x = k/t, \text{ где } t = kl - 1.$$

Следовательно, для получения X достаточно числитель разделить «уголком» на знаменатель, собрать с сохранением порядка цифры минимального периода и полученную картинку прочесть как запись числа. Кстати, при делении «уголком» число X будет выписываться слева направо (в отличие от описанного выше способа), а процесс остановится в точности тогда, когда повторится остаток (на самом деле это *основная* периодическая последовательность).

В частности, для получения «великана» используется правильная дробь 6/59. Воспользовавшись, например, вычислительными возможностями онлайн-оракула VolframAlpha, получаем ответ $X =$

101.69491.52542.37288.13559.32203.38983.05084.74576.27118.64406.77966

(здесь точки поставлены для удобства восприятия).

Я благодарю М. Н. Вялого за разнообразную помощь в подготовке этой статьи. Кроме того, я хотел бы подчеркнуть его терпение и тактичность, с которыми он относится к моим текстам.

Список литературы

[1] Бобров С.П. *Волшебный двурог*. М.: МЦНМО, 2006.

[2] Литцман В. *Великаны и карлики в мире чисел*. М.: Физмагиз, 1959.

[3] Ерошин А.Е. *Периодические десятичные дроби* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 8. 2004. С. 239–245.

[4] Радемахер Г., Теплиц О. *Числа и фигуры*. М.: Наука, 1966.

[5] И.М.Виноградов. *Основы теории чисел*. М.: Гостехиздат, 1953.

[6] Сушкевич А.К. *Теория чисел*. Харьков: Изд. Харьковского ун-та, 1956.

Е. А. Горин, Московский педагогический государственный университет
Email: evgeny.gorin@mtu-net.ru