Дробная форма натурального числа и ее применение в задачах на циклические перестановки цифр

В. И. Войтицкий

1. Введение

Среди олимпиадных, исследовательских и занимательных задач по теории чисел нередко встречаются арифметические задачи на циклические перестановки цифр. Некоторые из таких задач достаточно легко решаются элементарными школьными методами, а некоторые требуют довольно долгого кропотливого подсчета. В связи с этим встает естественный вопрос, не существует ли какого-то общего подхода, который позволил бы по единому алгоритму достаточно быстро решать задачи на циклические перестановки цифр? Оказывается, такой подход существует. Его описание и применение к решению различных задач является предметом данной работы.

Суть подхода в том, что каждому натуральному числу можно естественным образом поставить в соответствие единственное дробное выражение (дробную форму), которая превращает соотношения между числами, получающимися друг из друга в результате циклических перестановок цифр, в соотношения между числителями соответствующих дробных форм. Аналогичные соотношения для циклических перестановок цифр периода бесконечной дроби известны (см. [1–3]). Основываясь на этой связи, арифметическая задача превращается в задачу решения сравнения по неизвестному модулю. Решая данную задачу и подбирая из простых соображений коэффициенты дробной формы, удается сравнительно легко решать различные задачи на циклические перестановки цифр в любой p-ичной системе счисления. В статье рассматриваются некоторые обобщения стандартных задач на циклические перестановки цифр и несколько авторских задач, которые решаются предложенным методом. В частности, решается задача отыскания в произвольной p-ичной системе счисления всех нетривиальных *циклидов*, т. е. всех таких чисел C, состоящих по крайней мере из двух различных цифр, что любая циклическая перестановка цифр числа

C образует числа, кратные C. Эта задача несколько отличается от известной задачи поиска в десятичной системе счисления всех так называемых циклических чисел $A = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$. Они характеризуются тем, что число $k\cdot A$ для всех натуральных $k \in [1;n]$ образуется из числа A путем циклических перестановок цифр. Циклические числа обладают одним интересным свойством. Если число цифр n кратно двум или трем, то, разбивая число A на два или три блока одинаковой длины и вычисляя сумму полученных чисел, мы всегда будем получать число из повторяющихся девяток (для четырех блоков это уже не верно). Данный результат является следствием так называемых обобщенных теорем Миди́. Оказывается, аналогичное свойство часто остается справедливым для решений многих задач на циклические перестановки цифр в любой p-ичной системе счисления.

2. Дробная форма натурального числа

Для начала введем часто используемые в статье обозначения. Наибольший общий делитель двух чисел a и b будем записывать как (a,b), p-ичную запись числа A будем обозначать как $A = \overline{a_1a_2\ldots a_n}$, где цифры $a_i \in \{0,1,\ldots,p-1\}$, период p-ичной дроби будем выделять круглыми скобками. Показатель числа p по модулю m, т. е. такое минимальное натуральное число δ, что $p^\delta \equiv 1 \pmod m$, будем обозначать через $\delta = P_m(p)$. Напомним, что $a \equiv b \pmod m$ (числа a и b сравнимы по модулю m), если m является делителем числа $a-b$ (будем использовать обозначение $m \mid a-b$).

Со школы всем хорошо известно, что любую обыкновенную несократимую дробь можно единственным образом представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби, причем у данной дроби отсутствует предпериод тогда и только тогда, когда знаменатель взаимно прост с числом 10. Аналогичный факт имеет место и в произвольной p-ичной системе счисления (данное утверждение можно найти, например, в [2, с. 74–78]). Приведем его здесь без доказательства.

Теорема 2.1. *Любая несократимая дробь* $\dfrac{r}{m}$, $r \leqslant m$, $(r,m) = 1$, $r,m \in \mathbb{N}$, *представима и притом единственным образом в виде бесконечной p-ичной дроби* $\overline{0,b_1\ldots b_k(a_1\ldots a_\delta)}$. *Данная дробь имеет вид* $\overline{0,(a_1\ldots a_\delta)}$ *(предпериод отсутствует) тогда и только тогда, когда* $(m,p) = 1$, *при этом* $\delta = P_m(p)$. *Если* $(m,p) = 1$, *то цифра* $a_1 > 0$ *тогда и только тогда, когда* $pr > m$.

На сформулированную терему можно посмотреть с другой стороны. Пусть нам дано произвольное натуральное число $A = \overline{a_1\ldots a_n}$. Тогда несложно видеть, что имеет место равенство

$$\frac{\overline{a_1 \ldots a_n}}{p^n - 1} = \overline{0,(a_1 \ldots a_n)} = \frac{r}{m}\,, \tag{1}$$

где последняя дробь является несократимой. Отсюда для числа A получаем единственное представление

$$A = \overline{a_1 \ldots a_n} = \frac{r(p^n - 1)}{m}\,, \tag{2}$$

которое назовем *дробной формой* n-значного числа A.

Согласно теореме 2.1 для дробной формы выполняются соотношения $r \leqslant m$, $(r, m) = 1$, $(p, m) = 1$. Несложно заметить что числам, состоящим только из одной повторяющейся цифры, соответствует дробная форма с $m \mid p - 1$. Этот случай является тривиальным и в задачах на циклические перестановки цифр легко может быть проверен отдельно. Далее будем рассматривать ситуацию, когда $m \nmid p - 1$, т. е. по меньшей мере $m > 1$.

Следует также оговориться, что согласно традиции число $A = \overline{a_1 \ldots a_n}$ считается n-значным, если $a_1 > 0$. Далее, если не оговорено противное, будем искать именно такие числа, им соответствует условие на дробную форму $pr > m$. Отказываясь от него, можно по тому же алгоритму работать с числами, имеющими в начале p-ичной записи один или несколько нулей.

Исходя из соотношения (1), легко заметить интересную деталь. Если числу $A = \overline{a_1 \ldots a_n}$ соответствует дробная форма $\dfrac{r(p^n - 1)}{m}$, то числу $B = \overline{a_1 \ldots a_n a_1 \ldots a_n}$ соответствует дробная форма $\dfrac{r(p^{2n} - 1)}{m}$. Обобщая эту закономерность, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Пусть число* $B = \overline{a_1 \ldots a_n}$ *имеет дробную форму* $\dfrac{r(p^n - 1)}{m}$. *Тогда натуральное число* $s = n/\delta$, *где* $\delta = P_m(p)$, *определяет число повторяющихся блоков цифр* $A = \overline{a_1 \ldots a_\delta}$ *в записи* $\overline{a_1 \ldots a_n}$, *т. е.* $\overline{a_1 \ldots a_n} = \overline{a_1 \ldots a_\delta a_1 \ldots a_\delta \ldots a_1 \ldots a_\delta}$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{a_1 \ldots a_n} = \dfrac{r(p^{s\delta} - 1)}{m}$.

Доказательство. Имеем $B = \overline{a_1 \ldots a_n} = \dfrac{r(p^{s\delta} - 1)}{m}$, тогда и только тогда, когда $B = \dfrac{r(p^{\delta} - 1)}{m}(p^{\delta(s-1)} + p^{\delta(s-2)} + \ldots + 1) = Ap^{\delta(s-1)} + Ap^{\delta(s-2)} + \ldots + A = \overline{a_1 \ldots a_\delta a_1 \ldots a_\delta \ldots a_1 \ldots a_\delta}$.

Известно (см., например, [1, с. 208] и [2, с. 178–182]), что бесконечные периодические дроби, образованные циклическими перестановками цифр периода, являются обыкновенными дробями с одинаковыми знаменателями, причем их числители связаны друг с другом определенными соотношениями. Отсюда получаем такой результат.

Теорема 2.3. *Пусть число* $A_1 = \overline{a_1 \dots a_n}$ *имеет дробную форму* $\dfrac{r_1(p^{\delta s}-1)}{m}$. *Тогда все натуральные числа, получающиеся в результате циклической перестановки цифр числа* A_1 *имеют дробную форму*

$$A_i = \overline{a_i \dots a_n a_1 \dots a_{i-1}} = \frac{r_i(p^{\delta s}-1)}{m}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{3}$$

где $r_i \equiv r_1 p^{i-1} \pmod{m}$, $r_i \leqslant m$, $(r_i, m) = 1$.

Доказательство. По определению дробной формы имеем $\dfrac{r_1}{m} = \overline{0,(a_1 \dots a_n)}$. Отсюда $\dfrac{r_1}{m} p^{i-1} = \overline{a_1 \dots a_{i-1},(a_i \dots a_{i-1})}$, следовательно $\overline{0,(a_i \dots a_{i-1})} = \dfrac{r_1 p^{i-1} - m\overline{a_1 \dots a_{i-1}}}{m}$. С другой стороны, если соотношение (3) определяет дробную форму, то $\overline{0,(a_i \dots a_{i-1})} = \dfrac{r_i}{m}$, где $r_i \leqslant m$, $(r_i, m) = 1$. Поскольку равны левые части, то равны и правые части, т. е. $r_i = r_1 p^{i-1} - m\overline{a_1 \dots a_{i-1}}$, отсюда получаем, что $r_i \equiv r_1 p^{i-1} \pmod{m}$.

Сформулированных выше теорем достаточно, чтобы решить многие арифметические задачи на циклические перестановки цифр. При этом ключевой идеей поиска является отыскание не самих чисел, а их дробных форм.

3. Теорема Миди́ и циклические числа

Еще в 1836 году французский математик Е. Миди́ доказал интересную теорему, которая утверждает, что если несократимая дробь содержит в десятичном периоде четное число цифр и знаменатель является степенью простого числа, отличного, от 2 и 5, то сумма первой и второй половины цифр периода всегда дает число, составленное из одних девяток. Например, $1/13 = \overline{0,(076923)}$, $076 + 923 = 999$.

До начала 21 века этот результат мало интересовал математиков, однако, совсем недавно в период с 2003 по 2007 гг. были получены далеко идущие обобщения этого результата (см., например, [5, 6, 8, 9]). Оказалось, что если $r = 1$, m — простое число и число цифр в периоде десятичной дроби $1/m$ кратно трем, т. е. $\delta = 3\kappa$, то сумма трех частей цифр периода равной длины всегда дает число из девяток. Для четырех блоков цифр это свойство, вообще говоря, не выполняется, мы можем констатировать лишь тот факт, что полученная сумма кратна числу из девяток. В [6], однако, доказано, что если m является простым числом Мерсенна, т. е. $m = 2^l - 1$, где число l — простое, то, разбивая период дроби $1/m$ на l блоков равной длины, всегда получается число из девяток.

В статьях [8] и [5] доказано обобщение этого интересного свойства для двух или трех блоков цифр в произвольной p-ичной системе счисления. В частности, из результатов этих работ следует такое утверждение.

Теорема 3.1. *Обозначим через $M_d(p)$ множество p-ичных чисел $\overline{a_1a_2\ldots a_{d\kappa}}$, таких что сумма чисел*

$$\overline{a_1a_2\ldots a_\kappa}+\overline{a_{\kappa+1}a_{\kappa+2}\ldots a_{2\kappa}}+\ldots+\overline{a_{d(\kappa-1)+1}a_{d(\kappa-1)+2}\ldots a_{d\kappa}}=$$
$$=\underbrace{\overline{(p-1)(p-1)\ldots(p-1)}}_{\kappa\ \text{цифр}}.$$

Пусть в p-ичной системе счисления обыкновенная несократимая дробь $r/m=\overline{0,(a_1a_2\ldots a_\delta)}$ имеет четное число цифр $\delta=2\kappa$ в периоде и число m является степенью простого числа, отличного от делителей p, либо $(m,p^\kappa-1)=1$. Тогда имеет место свойство $\dfrac{r(p^\delta-1)}{m}=\overline{a_1a_2\ldots a_\delta}\in M_2(p)$.

Если m является простым числом, отличным от делителей p, и $\delta=3\kappa$, $r=1$ или $r=2$, то $\dfrac{r(p^\delta-1)}{m}=\overline{a_1a_2\ldots a_\delta}\in M_3(p)$. При $r=3$ результат верен для всех простых m, которые дополнительно не равны трем и семи.

Отметим, что сформулированные условия являются лишь достаточными, т. е. можно найти дробные формы, не удовлетворяющие условиям теоремы, которые, однако, принадлежат одному из множеств $M_d(p)$ $(d\geqslant 2)$. Для дробных форм с $r\geqslant 4$ или $d\geqslant 3$ в общем случае установлена лишь кратность моноцифровому числу $\overline{(p-1)\ldots(p-1)}$. При применении теоремы 3.1 следует иметь ввиду, что в случае $pr\leqslant m$ в начале числа следует поставить несколько нулей так, чтобы количество цифр в числе совпадало с длиной периода обыкновенной дроби.

Особый интерес представляют дробные формы вида

$$A=\frac{p^{m-1}-1}{m}\,, \tag{4}$$

где m — простое, причем $\delta=P_m(p)=m-1$ (повторяющиеся блоки чисел здесь не учитываем). Несложно доказать, что такие и только такие дробные формы задают в p-ичной системе счисления все циклические числа (см., например, [7]). Число $A=\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ $(n=m-1)$ называется *циклическим числом*, если для всех натуральных $k\in[1;n]$ числа $k\cdot A$ образуются из числа A путем циклических перестановок цифр (здесь допускаем, что число A может иметь в начале несколько нулей).

В силу теоремы 3.1 любое циклическое число принадлежит классам $M_2(p)$ или $M_3(p)$ как только число $m-1$ кратно двум или трем. При умножении циклических чисел на знаменатель m образуются числа, составленные из цифры $p-1$. Вообще, при умножении циклического числа A на любые «не очень большие» числа k получаются либо числа, в середине которых есть блок $\overline{(p-1)\ldots(p-1)}$, либо циклические перестановки цифр числа A. Динамика цифровой структуры чисел $k \cdot A$ с ростом k до настоящего времени не рассматривалась.

Остановимся более подробно на привычном случае $p=10$. До сих пор остается открытым вопрос: бесконечно или нет количество простых m таких, что $P_m(10)=m-1$ (т. е. неизвестно бесконечно или нет множество десятичных циклических чисел). Этому свойству удовлетворяют многие (но далеко не все) простые числа. Например, $P_{13}(10)=6$, поэтому $m=13$ не удовлетворяет данному свойству. Среди $m<200$ знаменателями дробных форм циклических чисел являются следующие m:

$$7,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 47,\ 59,\ 61,\ 97,\ 109,\ 113,\ 131,\ 149,\ 167,\ 179,\ 181,\ 193.$$

Первым трем значениям m соответствуют числа

$$142857,\ 0588235294117647,\ 052631578947368421.$$

Очевидно, единственным $(m-1)$-значным циклическим числом в десятичной системе счисления является замечательное число 142857, остальные числа содержат вначале один или несколько нулей. Ниже будет доказано, что это же число является единственным нетривиальным базисным циклидом в десятичной системе. Число 142857 хорошо известно любителям занимательной арифметики. Много его интересных свойств можно найти в книге [8, с. 179–183]. Например, равенства $142+657=999$ и $14+28+57=99$ подтверждают теорему 3.1. Далее, имеем сумму $1+4+2+8+5+7=27$, при этом сумма всех циклических перестановок числа 142857 равна 2999997. Число 142857 является числом Капрекара, что выражается свойством

$$142857^2 = 020408122449 = (20408+122449)^2.$$

4. Решение некоторых арифметических задач

Задача 4.1. *Пусть k, l и t — данные натуральные числа. В p-ичной системе счисления найти все числа $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$, такие что $\overline{a_1a_2\ldots a_n}\cdot k = = \overline{a_l\ldots a_n\ldots a_{l-1}}\cdot t$.*

Решение (алгоритм). Задача сводится к отысканию дробных форм $\dfrac{r_1(p^{\delta s}-1)}{m}$ и $\dfrac{r_l(p^{\delta s}-1)}{m}$, таких что

$$\begin{cases} 1.\ (r_1, m) = (r_l, m) = 1, \\ 2.\ r_1 \leqslant m,\ r_l \leqslant m, \\ 3.\ pr_1 > m,\ pr_l > m, \\ 4.\ kr_1 = tr_l,\ r_l \equiv r_1 p^{l-1} \pmod m. \end{cases}$$

Из условия 4 следует, что $kr_1 \equiv tr_1 p^{l-1} \pmod m$. В силу 1 отсюда имеем $k \equiv tp^{l-1} \pmod m$ или $m \mid tp^{l-1} - k$. С помощью простого перебора легко найти все $m \geqslant 1$, которые взаимно просты с p и делят число $tp^{l-1} - k$. Их может быть лишь конечное число. Зная знаменатель m, мы находим n в виде δs, где $\delta = P_m(p),\ s \in \mathbb{N}$. Чтобы закончить решение, необходимо перебрать все числа r_1 от 1 до m такие, что $(r_1, m) = (r_l, m) = 1$, $r_1 \leqslant m,\ kr_1 \leqslant tm,\ pr_1 > m,\ kpr_1 > tm$. Таких чисел может быть также не больше конечного числа. Представляя теперь все получающиеся формы в виде натуральных чисел, получаем окончательное решение задачи. Условие 3 можно опустить, если допускать числа с нулями в начале. □

Частные случаи задачи 4.1 рассматривались в [11, с. 518–519], а также в [4, с. 17–18]. Решим несколько конкретных задач такого вида.

Задача 4.2. *Найти все десятичные числа $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ такие, что $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} \cdot 3 = \overline{a_2 \ldots a_n a_1}$.*

Решение. В искомых дробных формах знаменатель m должен являться делителем числа $10^{2-1} - 3 = 7$, т. е. $m = 7$ или $m = 1$. Последний случай является тривиальным, поскольку соответствует числам $\overline{9\ldots9}$, которые, очевидно, не удовлетворяют условию задачи. Для $m = 7$ имеем $P_7(10) = 6$, поэтому искомые числа имеют вид $\dfrac{r_1(10^{6s} - 1)}{7}$. Условиям 1–4 удовлетворяют лишь $r_1 \in \{1, 2\}$ (при больших r_1 будем иметь: $3r_1 > 7$).

Таким образом, решениями данной задачи являются: циклическое число 142857, его циклическая перестановка 285714, а также все числа вида $\underbrace{142857\ldots142857}_{6s\ \text{цифр}}$, $\underbrace{285714\ldots285714}_{6s\ \text{цифр}}$, где $s \in \mathbb{N}$. □

Задача 4.3. *Найти все десятичные числа $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ такие, что $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} = \overline{a_2 \ldots a_n a_1} \cdot 2$.*

Решение. В искомых дробных формах знаменатель m должен являться делителем числа $2 \cdot 10^{2-1} - 1 = 19$, поскольку это число простое, то остается лишь одно нетривиальное значение для знаменателя дробной формы — это $m = 19$. Имеем $P_{19}(10) = 18$, поэтому искомые числа имеют вид $A_i = \dfrac{r_1(10^{18s} - 1)}{19}$. Условиям 1–4 удовлетворяют все четные r_1 из промежутка $[4; 18]$ или $r_1 = 2r$, $r = 2, 3, \ldots, 9$.

Для наглядности приведем ответ для $r_1 = 4$, $s = 1$:

$$A_1 = 210526315789473684 = 105263157894736842 \cdot 2.$$

Знаменателем дробной формы является $m = 19$, поэтому всеми возможными ответами данной задачи являются циклические перестановки десятичного циклического числа $A_3 = 052631578947368421$. Проиллюстрируем на примере данного ответа выполнение теоремы 3.1. С помощью непосредственной проверки убеждаемся, что каждое $A_i \in M_2(10)$. При этом $A_i \in M_3(10)$, если соответствующее $r_i \leqslant 4$. Например, при $r_1 = 4$ имеем $210526315 + 789473684 = 999999999$, $210526 + 315789 + 473684 = 999999$, $210 + 526 + 315 + 789 + 473 + 684 = 2997$. Однако уже при $r_i = 5$ получаем $263157894 + 736842105 = 999999999$, но $263157 + 894736 + 842105 = 1999998$. Заметим, что теорема 3.1 гарантирует выполнение свойства $A_i \in M_3(10)$ для $r_i \leqslant 3$. $\square$

Рассмотрим еще несколько авторских задач на циклические перестановки цифр.

Задача 4.4. *Найти все десятичные числа $A = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ такие, что $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n} + \overline{a_2 \ldots a_n a_1} = \underbrace{\overline{bb \ldots b}}_{n\text{цифр}}$.*

Решение. Несложно найти некоторые частные решения данной задачи. Именно, если b — четное число, тогда задача имеет тривиальное решение $A = \dfrac{b}{2} \cdot \dfrac{10^n - 1}{9}$ — число, состоящее из n цифр $b/2$. Если $n = 2$, то решениями являются все двузначные числа $A = \overline{a_1 a_2}$, для которых $a_1 + a_2 = b$. Оказывается, что с точностью до повторяющихся блоков цифр мы описали все решения поставленной задачи. Чтобы доказать этот факт, будем использовать метод дробных форм. Пусть $A = \dfrac{r_1(10^{\delta s} - 1)}{m}$, тогда задача сводится к уравнению

$$r_1 \cdot \frac{10^{\delta s} - 1}{m} + r_2 \cdot \frac{10^{\delta s} - 1}{m} = b \cdot \frac{10^{\delta s} - 1}{9}\,.$$

Из него заключаем, что $r_2 = \dfrac{bm}{9} - r_1$. С другой стороны, известно, что $r_2 \equiv$ $\equiv 10 r_1 \pmod{m}$. Следовательно $bm \equiv 99 r_1 \pmod{m}$, $m \mid 99 r_1$. Поскольку m взаимно просто с r_1, то $m \mid 99$. Показатель δ любого делителя числа 99 равен 1 либо 2, т. е. решениями поставленной задачи являются одно- либо двузначные числа, а также все числа, получающиеся из них в результате повторов одинакового блока цифр. Для двузначного числа соотношение $a_1 + a_2 = b$, очевидно, следует из равенства $10a_1 + a_2 + 10a_2 + a_1 = 10b + b$. Что и требовалось доказать. $\square$

Аналогично решается задача $\overline{a_1a_2\dots a_n}+\overline{a_2\dots a_na_1}+\overline{a_3\dots a_na_1a_2}=\overline{bb\dots b}$. Она может иметь тривиальные решения $A=\frac{b}{3}\cdot\frac{10^n-1}{9}$, а также решения, состоящие из повторяющихся блоков цифр $\overline{a_1a_2a_3}$, где $a_1+a_2+a_3=b$. Например, $234234+342342+423423=999999$, поскольку $2+3+4=9$.

Задача 4.5. *Найти все десятичные числа $\overline{a_1a_2\dots a_n}$ такие, что $\overline{a_1a_2\dots a_n}+\overline{a_2\dots a_na_1}=\overline{a_3\dots a_1a_2}$.*

Решение. Будем искать дробную форму числа $\overline{a_1a_2\dots a_n}$ в виде $\frac{r_1(10^{\delta s}-1)}{m}$. Тогда $\overline{a_2\dots a_na_1}=\frac{r_2(10^{\delta s}-1)}{m}$, $\overline{a_3\dots a_na_1a_2}=\frac{r_3(10^{\delta s}-1)}{m}$. Условие задачи сводится к тому, что $r_1+r_2=r_3$.

По свойствам дробных форм имеем $r_1\cdot 10\equiv r_2 \pmod m$ и $r_1\cdot 10^2\equiv r_3 \pmod m$. Отсюда

$$r_1\cdot 10^2\equiv r_1+r_2\equiv r_1+r_1\cdot 10 \pmod m.$$

Поскольку $(r_1,m)=1$, то $10^2\equiv 1+10 \pmod m$, $89\equiv 0 \pmod m$. Так как 89 является простым числом, то $m=89$ (тривиальный случай $m=1$, очевидно, не подходит). Известно, что $P_{89}(10)=44$, отсюда решения задачи имеют вид $\frac{r_1(10^{44s}-1)}{89}$. Установим теперь, какие значения может принимать r_1.

В силу условия $10r_1>m$ имеем $r_1\in\{9,10,\dots,87,88\}$.

Если $r_1\in[9,17]$, тогда $r_2=10r_1-89$. В силу условий $10r_2>m$ и $r_3<m$ должны выполняться неравенства

$$r_2=10r_1-89>8,\qquad r_3=11r_1-89<89.$$

Им удовлетворяют натуральные $r_1\in[10,16]$.

Если $r_1\in[18,26]$, тогда $r_2=10r_1-178$. Имеем неравенства

$$r_2=10r_1-178>8,\qquad r_3=11r_1-178<89.$$

Им удовлетворяют натуральные $r_1\in[19,24]$.

Если $r_1\in[27,35]$, тогда $r_2=10r_1-267$. Имеем неравенства

$$r_2=10r_1-267>8,\qquad r_3=11r_1-267<89.$$

Им удовлетворяют натуральные $r_1\in[28,32]$.

Аналогичным образом можно показать, что условиям $10r_2>m$ и $r_3<m$ удовлетворяют также натуральные r_1 из промежутков $[37,40]$, $[46,48]$ и $r_1\in\{55,56,64\}$. Таким образом, все подходящие значения r_1 найдены, а значит найдены и все возможные искомые числа. При $r_1=10$ и $s=1$ получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned}
&11235955056179775280898876404494382022471910\ + \\
&12359550561797752808988764044943820224719101 = \\
&23595505617977528089887640449438202247191011.
\end{aligned}$$

Удивительно, что меньших десятичных чисел с таким свойством не существует (за исключением чисел, начинающихся с цифры ноль)! Поскольку число $m = 89$ является простым и показатель $\delta = 44$ кратен двум, то все решения задачи принадлежат множеству $M_2(10)$. $\square$

Аналогичным методом решаются и другие задачи на циклические перестановки цифр. Например, можно приравнивать два одночлена одинаковой степени от чисел, отличающихся друг от друга циклическими перестановками цифр. В частности, можно рассмотреть такую задачу: $\overline{a_1 \dots a_n}^2 = \overline{a_2 \dots a_1} \cdot \overline{a_3 \dots a_2}$. Для решения подобных задач можно составлять компьютерные программы.

5. Задача о нахождении всех нетривиальных p-ичных циклидов

Определение 5.1. Натуральное число C будем называть p-ичным циклидом, если p-ичная запись этого числа $C = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ такова, что любая циклическая перестановка цифр образует в точности n-значное число $\overline{a_i a_{i+1} \dots a_{i-1}}$, которое кратно C. Очевидно, что все моноцифровые числа являются циклидами, которые мы будем называть тривиальными. Если же в числе C имеются хотя бы две различные цифры, то такой циклид назовем нетривиальным.

Отметим, что формально данному определению удовлетворяют упоминаемые выше циклические числа (см. пункт 3). Однако при простых $m > p$ числа $(10^{m-1} - 1)/m$ не являются $(m-1)$-значными. Поэтому среди циклических чисел нетривиальными p-ичными циклидами будут являться лишь те, значность которых не превосходит $p - 1$ (циклиды с нулями в начале не рассматриваем в силу их бесконечного количества). Ниже будет показано, что множество нетривиальных циклидов может быть пустым, состоять из циклических чисел или иметь более сложную структуру в зависимости от p.

Итак, рассмотрим дробную форму нетривиального циклида $C = \dfrac{r_1(p^{\delta s} - 1)}{m}$. Любая циклическая перестановка цифр данного числа образует число $D = \dfrac{r_i(p^{\delta s} - 1)}{m}$, $i = 1, 2, \dots, \delta$. Согласно определению должно выполняться свойство $C \mid D$, откуда следует, что $r_1 \mid r_i$ или НОД$\{r_i\} = r_1$.

Условие нетривиальности будет выполнено, если m не является делителем числа $p-1$. Очевидно, циклидами являются все дробные формы, в которых $r_1 = 1$. Если предположить, что $r_1 = g > 1$, тогда число g обязано быть делителем каждой цифры циклида $C = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{\delta s}}$. Действительно, в доказательстве теоремы 2.3 установлено, что $r_i = r_1 p^{i-1} - m\overline{a_1 \ldots a_{i-1}}$, $i = 1, 2, \ldots, \delta$. Отсюда получаем цепочку равенств

$$r_2 = pr_1 - ma_1, \qquad r_3 = pr_2 - ma_2,$$
$$r_4 = pr_3 - ma_3, \ \ldots \ r_n = pr_{n-1} - ma_{n-1}.$$

Поскольку каждое из чисел r_i кратно $r_1 = g$ и $(m, r_i) = 1$, то каждая цифра a_i кратна g. Следовательно $g \mid \text{НОД}\{a_i\}$. Допустим, мы нашли циклид $C = \dfrac{g(p^{\delta s} - 1)}{m} = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{\delta s}}$. Тогда в силу доказанного $\overline{a_1 a_2 \ldots a_{\delta s}} = \overline{(ga'_1)(ga'_2)\ldots(ga'_{\delta s})} = g \cdot \overline{a'_1 a'_2 \ldots a'_{\delta s}}$. Отсюда следует, что число $C' = \dfrac{(p^{\delta s} - 1)}{m} = \overline{a'_1 a'_2 \ldots a'_{\delta s}}$ также является циклидом.

Таким образом, найден алгоритм поиска всех возможных нетривиальных p-ичных циклидов.

Теорема 5.1. *Все нетривиальные p-ичные циклиды следует искать среди чисел $C = \dfrac{p^{\delta s} - 1}{m}$, где m не делит $p-1$, $(m, p) = 1$ и $m < p$ (ищем в точности δs-значные числа). Если получаемые по этой формуле числа $C = \overline{a_1 a_2 \ldots a_{\delta s}}$ таковы, что существуют натуральные числа $g \in \{2, \ldots, p-1\}$ такие, что $g \cdot \max\{a_i\} < p$, то циклидами являются также числа $C' = \dfrac{g(p^{\delta s} - 1)}{m}$.*

Несложно заметить, что в 2-ичной, 3-ичной, 4-ичной, 6-ичной системах нетривиальных циклидов не существует! Покажем, чему равны нетривиальные базисные циклиды (при $s = 1$) в других системах счисления.

При $p = 5$ единственным допустимым знаменателем дробной формы является $m = 3$. Отсюда $C_3^5 = \dfrac{5^2 - 1}{3} = \overline{8}_{10} = \overline{13}_5$, $D = \overline{31}_5 = \overline{16}_{10} = 2C_3^5$ (верхний индекс здесь и далее означает основание системы счисления, а нижний — знаменатель дробной формы). Поскольку $3 \cdot 2 > 5$, то все $g > 1$ не удовлетворяют свойству $g \cdot \max\,\{a_i\} < 5$. Аналогично $g > 1$ не подходят при $p = 7, 8, 9, 10$.

При $p = 7$ имеем $m_1 = 4, m_2 = 5$. Отсюда

$$C_4^7 = \frac{7^2 - 1}{4} = \overline{12}_{10} = \overline{15}_7, \quad C_5^7 = \frac{7^4 - 1}{5} = \overline{480}_{10} = \overline{1254}_7.$$

При $p = 8$ имеем $m_1 = 3,\ m_2 = 5$. Отсюда

$$C_3^8 = \frac{8^2 - 1}{3} = \overline{21}_{10} = \overline{25}_8, \quad C_5^8 = \frac{8^4 - 1}{5} = \overline{819}_{10} = \overline{1463}_8.$$

При $p = 9$ имеем $m_1 = 5,\ m_2 = 7$. Отсюда

$$C_5^9 = \frac{9^2-1}{5} = \overline{16}_{10} = \overline{17}_9, \quad C_7^9 = \frac{9^3-1}{7} = \overline{104}_{10} = \overline{125}_9.$$

При $p = 10$ имеем $m = 7$, т. е. единственным нетривиальным циклидом в десятичной системе счисления является упоминавшееся ранее циклическое число $C_7^{10} = \dfrac{10^6-1}{7} = \overline{142857}_{10}$.

При $p = 11$ имеем 6 различных нетривиальных базисных циклидов, им соответствуют знаменатели дробных форм $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $m_3 = 6$, $m_4 = 7$, $m_5 = 8$ $(g = 1)$, $m_6 = 8$ $(g = 2)$, $m_7 = 9$. Отсюда

$$C_3^{11} = \frac{11^2-1}{3} = \overline{40}_{10} = \overline{37}_{11}, \quad C_4^{11} = \frac{11^2-1}{4} = \overline{30}_{10} = \overline{28}_{11},$$

$$C_6^{11} = \frac{11^2-1}{6} = \overline{20}_{10} = \overline{19}_{11}, \quad C_7^{11} = \frac{11^3-1}{7} = \overline{190}_{10} = \overline{163}_{11},$$

$$C_8^{11} = \frac{11^2-1}{8} = \overline{15}_{10} = \overline{14}_{11}, \quad \left(C_8^{11}\right)' = \frac{2(11^2-1)}{8} = \overline{30}_{10} = \overline{28}_{11},$$

$$C_9^{11} = \frac{11^6-1}{9} = \overline{196840}_{10} = \overline{124986}_{11}.$$

Проверка того, что все приведенные выше числа являются циклидами, является хорошим упражнением на перевод чисел из одной системы счисления в другую. Естественно, можно искать нетривиальные циклиды для бо́льших p. По-видимому, они будут существовать, причем в среднем их количество с ростом p будет расти.

Заметим, что сумма двух или трех частей цифр циклида зачастую дает число $\overline{(p-1)\dots(p-1)}$. Это всегда так, если знаменатель дробной формы является простым числом. Если же знаменатель является составным, то данное свойство в случае трех блоков цифр как правило не выполняется, например, $\overline{124986}_{11} \neq \overline{12}_{11} + \overline{49}_{11} + \overline{86}_{11}$. При этом, примеры показывают, что в случае двух блоков свойство выполняется довольно часто (даже если знаменатель не удовлетворяет теореме 3.1). Например, в 13-ичной системе счисления имеем циклид $C_{10}^{13} = \dfrac{13^4-1}{10} = \overline{2856}_{10} = \overline{13(11)9}_{13}$, для которого $\overline{13}_{13} + \overline{(11)9}_{13} = \overline{(12)(12)}_{13}$, хотя 10 не является степенью простого числа и $(10, 13^2-1) = 2 \neq 1$. В то же время для циклида $C_8^{13} = \dfrac{13^2-1}{8} = \overline{21}_{10} = \overline{18}_{13}$ сумма $1 + 8 \neq \overline{(12)}_{13}$, аналогично для $C_8^{11} = \overline{14}_{11}$ имеем $1 + 4 \neq \overline{(10)}_{11}$.

Теорема 5.2. *Пусть* $C = \dfrac{g(p^\delta - 1)}{m}$ *является циклидом, где* $\delta = 2\kappa$, $(m, p-1) = 1$. *Тогда* $C \in M_2(p)$ *как только* m *или* κ *являются нечетными числами.*

Доказательство. Согласно теореме 3.1 условие $(m, p^\kappa - 1) = 1$ является достаточным для выполнения свойства $C \in M_2(p)$. Пусть $(m, p^\kappa - 1) = a$, тогда в силу $(m, p-1) = 1$ имеем $(m, P) = a$, где $P = p^{\kappa-1} + p^{\kappa-2} + \ldots + p + 1$. Поскольку число $\delta = 2\kappa = P_m(10)$, то $p^\kappa \equiv -1 \pmod m$, т. е. $m \mid p^\kappa + 1$. Отсюда $a \mid p^\kappa + 1$. С другой стороны, $a \mid p^\kappa - 1$, из чего заключаем, что $a \mid (p^\kappa + 1) - (p^\kappa - 1) = 2$, т. е. $a = 1, 2$. Очевидно, $a \neq 2$, если m — нечетное число. Аналогично $a \neq 2$, если m — четное, но P — нечетное. Последнее выполнено, если κ — нечетное. Действительно, поскольку C — циклид, то выполнено условие $(m, p) = 1$, откуда p — нечетное. Тогда P — также нечетное число, как сумма нечетного количества κ нечетных чисел p^i, $i = 0, 1, \ldots, \kappa - 1$.

Из теоремы следует, что если выполнено $(m, p-1) \neq 1$ либо m и κ — четные, то возможно $C \notin M_2(p)$. Эти свойства не являются достаточными, поскольку $C_{10}^{13} \in M_2(p)$. Формулировка условия, которое гарантировало бы, что $C \notin M_2(p)$ или $C \notin M_3(p)$ остается открытым вопросом как для циклидов, так и для периода произвольной p-ичной дроби r/m. Отметим, что для дробной формы $(10^\delta - 1)/m$ необходимые и достаточные условия ее принадлежности к классу $M_2(10)$ найдены в [9]. Было бы интересно узнать о наличии у нетривиальных p-ичных циклидов других интересных свойств. Тут имеется открытое поле для деятельности.

Список литературы

[1] Бухштаб А.А. *Теория чисел.* М.: Просвещение, 1966.

[2] Радемахер Г., Теплиц О. *Числа и фигуры* (*опыты математического мышления*). М.: ГИФМЛ, 1962.

[3] Хассе Г. *Лекции по теории чисел.* М.: Из-во иностранной литературы, 1953.

[4] Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики*: *арифметика и алгебра.* М.: Наука, 1977.

[5] Gil J.B., Weiner M.D. *On Cyclic Numbers and an Extension of Midy's Theorem.* arXiv:math/0605347v1 (12 May 2006).

[6] Gupta A., Sury B. *Decimal Expansion of* $1/p$ *and Subgroup Sums* // Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, Vol. 5, 2005.

[7] Guttman S. *On Cyclic Numbers* // Amer. Math. Monthly, Vol. 44, 1934. P. 159–166.

[8] Lewittes J. *Midy's Theorem for Periodic Decimals*. arXiv:math/0605182v1 (7 May 2006).

[9] Martin H.W. *Generalizations of Midy's Theorem on Repeating Decimals* // Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, Vol. 7, 2007.

[10] Well D. *The Penguin Book of Curious and Interesting Numbers*. Penguin Books, 1986.

[11] Yiu P. *Recreational Mathematics*. Florida Atlantic Universuty Press, 2003.

Войтицкий Виктор Иванович, к.ф.-м. н., ассистент кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В. И. Вернадского (Симферополь, АР Крым, Украина)

Почтовый адрес: Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, просп. Акад. В. И. Вернадского, 4, Симферополь, 95007, Украина

Email: victor.voytitsky@gmail.com