О формуле Брахмагупты в геометрии Лобачевского

А. Д. Медных*

1. Введение

Из школьного курса всем хорошо известна формула Герона, выражающая площадь треугольника S через длины его сторон a, b и c. Представим ее в следующем виде

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)p, \tag{1}$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.

Индийский математик и астроном Брахмагупта (VII век) нашел удивительное обобщение этой формулы для четырехугольника, вписанного в окружность. В этом случае она имеет вид

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d), \tag{2}$$

где a, b, c, d — стороны четырехугольника, а $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ — его полупериметр.

Отметим еще один важный вклад Брахмагупты в развитие математики. Он впервые ввел в рассмотрение число 0.

Формула (1), очевидно, является частным случаем формулы (2) при $d = 0$. Доказательство формулы Брахмагупты можно найти в книге Я. П. Понарина [1, с. 90].

Дальнейшие обобщения формул Герона и Брахмагупты на случай произвольных n-угольников, вписанных в окружность можно найти в замечательной работе И. Х. Сабитова [2]. Там же содержится обзор близких результатов, полученных другими авторами. Отметим, что вписанные многоугольники, рассматриваемые в [2], не обязательно являются выпуклыми.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00255) и грантом АВЦП развития научного потенциала Высшей школы (проект №2.1.1/3707) и грантом поддержки ведущих научных школ НШ-6613.2010.1

Они могут допускать самопересечение сторон. В частности, площадь вписанного четырехугольника с самопересечениями является корнем некоторого биквадратного уравнения, коэффициенты которого — целочисленные полиномы от длин сторон a, b, c, d. В данной статье мы будем рассматривать только выпуклые четырехугольники без самопересечений.

Перейдем теперь к геометрии Лобачевского или, что то же самое, к гиперболической геометрии. Элементарные сведения из гиперболической геометрии приведены в книгах [3] и [4]. Все результаты настоящей работы сформулированы для плоскости Лобачевского с гауссовой кривизной равной $k = -1$.

В последнее время появилось много работ, посвященных неевклидовым аналогам теорем из классической евклидовой геометрии. Эти результаты, во многом, стали возможны благодаря использованию современных компьютеров, способных выполнять сложные символьные вычисления с тригонометрическими формулами. Общие сведения о неевклидовых многоугольниках, вписанных в окружность, можно найти в статьях [5] и [6]. В частности, в [5] показано, что вписанный n-угольник однозначно, с точностью до изометрии, определяется длинами своих сторон. В работе [6] установлено, что среди всех гиперболических многоугольников с заданными длинами сторон, наибольшую площадь имеет многоугольник, вписанный в окружность, орицикл или эквидистанту.

Классические теоремы из евклидовой геометрии могут допускать несколько различных вариантов их обобщений в гиперболической геометрии. Это справедливо, в частности, и для формулы Герона. На плоскости Лобачевского она имеет три следующих аналога.

Теорема 1. *Площадь S гиперболического треугольника со сторонами a, b и c находится по одной из трех следующих формул*:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{S}{4} = \operatorname{th} \frac{p-a}{2} \operatorname{th} \frac{p-b}{2} \operatorname{th} \frac{p-c}{2} \operatorname{th} \frac{p}{2}\,, \tag{3}$$

$$\sin^2 \frac{S}{2} = \frac{\operatorname{sh}(p-a)\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)\operatorname{sh} p}{4\operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2}}\,, \tag{4}$$

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{sh} \frac{p-a}{2} \operatorname{sh} \frac{p-b}{2} \operatorname{sh} \frac{p-c}{2} \operatorname{sh} \frac{p}{2}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2}}\,, \tag{5}$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.

Формулы (3) и (4) можно найти в книге [3, с. 36], а формула (5) получается извлечением квадратного корня из их произведения.

Цель настоящей работы — найти аналоги приведенных формул для площади гиперболического четырехугольника, вписанного в окружность, орицикл или эквидистанту. Тем самым будут установлены три различных варианта классической формулы Брахмагупты для плоскости Лобачевского.

Развитый здесь подход, без сомнения, может быть использован для установления подобных теорем в сферической геометрии.

2. Предварительные сведения из евклидовой и гиперболической геометрий

Напомним несколько хорошо известных фактов о четырехугольниках, вписанных в окружность.

Евклидов четырехугольник с внутренними углами A, B, C, D является вписанным в окружность тогда и только тогда, когда выполняется равенство $A+C = B+D = \pi$. Доказательство этого утверждения можно найти в [1, с. 52].

В то же время, в геометрии Лобачевского указанное свойство записывается еще более просто. Следуя Ф. В. Петрову [7], будем называть гиперболический четырехугольник *вписанным*, если он вписан в окружность, орицикл или эквидистанту. Все необходимые определения содержатся в работе [7], где, в частности, получен следующий результат.

Предложение 2. *Гиперболический четырехугольник с внутренними углами A, B, C, D является вписанным тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$A + C = B + D.$$

Поскольку сумма углов в любом гиперболическом четырехугольнике меньше 2π, для вписанного четырехугольника всегда имеем неравенство $A + C = B + D < \pi$.

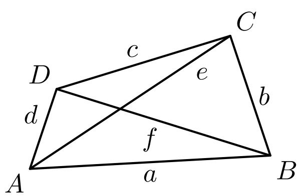

Рис. 1.

Предположим теперь, что углы четырехугольника неизвестны, а длины его сторон и диагоналей, изображенные на рис. 1, равны a, b, c, d, e, f. Тогда необходимые и достаточные условия для евклидова четырехугольника быть вписанным в окружность выражаются равенством $ef = ac+bd$.

Это утверждение хорошо известно как теорема Птолемея (см., например, [1, с. 61]).

Аналогичные условия для гиперболического четырехугольника получены в работе [8]. В терминах длин сторон они выражаются следующим вариантом теоремы Птолемея.

Предложение 3. *Гиперболический четырехугольник с длинами сторон a, b, c, d и диагоналями e, f является вписанным тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\operatorname{sh}\frac{e}{2}\operatorname{sh}\frac{f}{2}=\operatorname{sh}\frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{c}{2}+\operatorname{sh}\frac{b}{2}\operatorname{sh}\frac{d}{2}\,.$$

Важным дополнением к теореме Птолемея служит следующее свойство вписанного четырехугольника на евклидовой плоскости. Длины его сторон и диагоналей связаны соотношением

$$\frac{e}{f}=\frac{a\,d+b\,c}{a\,b+c\,d}. \tag{6}$$

(См. [1, с. 62].) Вместе с теоремой Птолемея указанное равенство позволяет выразить длины диагоналей четырехугольника через длины его сторон.

В работе [9] замечено, что основные соотношения между длинами сторон и диагоналями вписанного евклидова многоугольника остаются справедливыми и в гиперболической геометрии. Для их формулировки, как правило, достаточно во всех формулах заменить длину стороны a на величину $s(a)=\operatorname{sh}\frac{a}{2}$. В частности, соотношение (6) записывается следующим образом.

Предложение 4. *Длины сторон и диагонали вписанного гиперболического четырехугольника связаны соотношением*

$$\frac{s(e)}{s(f)}=\frac{s(a)s(d)+s(b)s(c)}{s(a)s(b)+s(c)s(d)}\,.$$

Из предложений 3 и 4 находятся следующие формулы для длин диагоналей вписанного гиперболического четырехугольника

$$s^2(e)=\frac{s(a)s(d)+s(b)s(c)}{s(a)s(b)+s(c)s(d)}(s(a)s(c)+s(b)s(d)), \tag{7}$$

$$s^2(f)=\frac{s(a)s(b)+s(c)s(d)}{s(a)s(d)+s(b)s(c)}(s(a)s(c)+s(b)s(d)). \tag{8}$$

Важно отметить, что полученные формулы верны также в евклидовой и сферической геометриях, если в качестве $s(a)$ взять функции $s(a)=a$ и $s(a)=\sin\frac{a}{2}$ соответственно.

Сформулированные утверждения потребуются нам ниже для доказательства теоремы Брахмагупты для гиперболического четырехугольника.

3. Формулировки теоремы Брахмагупты и ее следствия

В этом параграфе мы рассмотрим три формулировки теоремы Брахмагупты для гиперболического четырехугольника. Они являются аналогами соответствующих утверждений теоремы 1 для треугольника. Кроме того, будут получены два следствия из указанных теорем. Одно из них устанавливает верхнюю и нижнюю оценки на площадь вписанного четырехугольника через длины его сторон, а второе выражает площадь одновременно вписанного и описанного четырехугольника.

Аналог формулы (3) имеет следующий вид.

Теорема 5. *Площадь S вписанного гиперболического четырехугольника со сторонами a, b, c и d находится по формуле*

$$\operatorname{tg}^2\frac{S}{4}=\frac{1}{1-\varepsilon}\operatorname{th}\frac{p-a}{2}\operatorname{th}\frac{p-b}{2}\operatorname{th}\frac{p-c}{2}\operatorname{th}\frac{p-d}{2}\,,$$

где $\varepsilon=\dfrac{\operatorname{sh}\frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{b}{2}\operatorname{sh}\frac{c}{2}\operatorname{sh}\frac{d}{2}}{\operatorname{ch}\frac{p-a}{2}\operatorname{ch}\frac{p-b}{2}\operatorname{ch}\frac{p-c}{2}\operatorname{ch}\frac{p-d}{2}}$, *а* $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Отметим, что при $d=0$ число ε обращается в ноль и мы снова имеем формулу (3). Формула (4) для случая четырехугольника переписывается в виде следующей теоремы.

Теорема 6. *Площадь S вписанного гиперболического четырехугольника со сторонами a, b, c и d находится по формуле*

$$\sin^2\frac{S}{2}=\frac{\operatorname{sh}(p-a)\operatorname{sh}(p-b)\operatorname{sh}(p-c)\operatorname{sh}(p-d)}{4\operatorname{ch}^2\frac{a}{2}\operatorname{ch}^2\frac{b}{2}\operatorname{ch}^2\frac{c}{2}\operatorname{ch}^2\frac{d}{2}}(1-\varepsilon),$$

где p и ε — те же, что и в теореме 5.

Заметим, что при перемножении формул площади, приведенных в теоремах 5 и 6, величины $1-\varepsilon$ взаимно сокращаются. После извлечения квадратного корня из полученного произведения приходим к следующему утверждению. Оно является прямым аналогом формулы (5).

Теорема 7. *Площадь S вписанного гиперболического четырехугольника со сторонами a, b, c и d находится по формуле*

$$\sin^2\frac{S}{4}=\frac{\operatorname{sh}\frac{p-a}{2}\operatorname{sh}\frac{p-b}{2}\operatorname{sh}\frac{p-c}{2}\operatorname{sh}\frac{p-d}{2}}{\operatorname{ch}\frac{a}{2}\operatorname{ch}\frac{b}{2}\operatorname{ch}\frac{c}{2}\operatorname{ch}\frac{d}{2}}\,,$$

где $p=\dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Из формулировки теоремы 5 непосредственно заключаем, что при a, b, c, $d \neq 0$ имеют место неравенства $\dfrac{1}{1-\varepsilon} > 0$ и $\varepsilon > 0$. Откуда $0 < \varepsilon < 1$. Учитывая это обстоятельство, получим приведенное ниже следствие из теорем 5 и 6.

Следствие 8. *Для невырожденного гиперболического четырехугольника со сторонами $a, b, c, d \neq 0$ имеют место следующие неравенства*

$$\operatorname{tg}^2 \frac{S}{4} > \operatorname{th} \frac{p-a}{2} \operatorname{th} \frac{p-b}{2} \operatorname{th} \frac{p-c}{2} \operatorname{th} \frac{p-d}{2},$$
$$\sin^2 \frac{S}{2} < \frac{\operatorname{sh}(p-a) \operatorname{sh}(p-b) \operatorname{sh}(p-c) \operatorname{sh}(p-d)}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{d}{2}}.$$

Четырехугольник, описанный около окружности, очевидно, удовлетворяет следующему свойству

$$a + c = b + d = (-|-) + (-\|-) + (-|||-) + (-\circ-).$$

(См. рис. 2.) В этом случае, $p-a=c$, $p-b=d$, $p-c=a$, $p-d=b$.

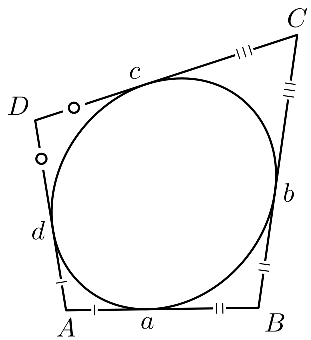

Рис. 2.

Это позволяет установить следующее интересное следствие из теоремы 7.

Следствие 9. *Пусть гиперболический четырехугольник со сторонами a, b, c и d является одновременно вписанным и описанным. Тогда его площадь S находится по формуле*

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \operatorname{th} \frac{a}{2} \operatorname{th} \frac{b}{2} \operatorname{th} \frac{c}{2} \operatorname{th} \frac{d}{2}.$$

Классический аналог этой теоремы хорошо известен [1, с. 91]. Если евклидов четырехугольник является одновременно вписанным и описанным, то его площадь определяется равенством $S^2 = abcd$.

4. Доказательство теорем Брахмагупты для гиперболического четырехугольника

Рассмотрим вписанный гиперболический четырехугольник, длины сторон которого и углы указаны на рис. 1. Обозначим через S площадь этого четырехугольника. Тогда по классической формуле Гаусса – Бонне имеем

$$S = 2\pi - A - B - C - D.$$

Выразим величину $\sin^2 \dfrac{S}{4}$ через длины сторон a, b, c и d. Учитывая равенство $A + C = B + D$ (см. предложение 2), получим

$$2\sin^2 \frac{S}{4} = 1 - \cos\frac{S}{2} = 1 - \cos(\pi - (A + C)) = 1 + \cos(A + C).$$

Откуда

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{1 + \cos A \cos C - \sin A \sin C}{2}\,. \tag{9}$$

Покажем, что величины $\cos A$, $\cos C$, а также произведение $\sin A \sin C$ выражаются через элементарные функции от длин сторон, и найдем эти выражения в явном виде.

Прежде всего, выразим $\cos A$ через длины сторон a, b, c, d. Для этого воспользуемся теоремой косинусов для гиперболического треугольника ABD:

$$\operatorname{ch} f = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} d - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} d \cos A.$$

Откуда

$$\cos A = \frac{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} d - \operatorname{ch} f}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} d}\,. \tag{10}$$

Поскольку $\operatorname{ch} f = 2s^2(f)+1$, а также $\operatorname{ch} a = 2s^2(a)+1$ и $\operatorname{ch} d = 2s^2(d)+1$, мы можем воспользоваться формулами (8) и (10) для нахождения $\cos A$ через a, b, c и d.

Поручая необходимые упрощения компьютеру, получим

$$\cos A = \frac{(2s^2(a)+1)(2s^2(d)+1) - (2s^2(f)+1)}{2s(a)\operatorname{ch}\frac{a}{2} \cdot 2s(d)\operatorname{ch}\frac{d}{2}} =$$
$$= \frac{s^2(a) - s^2(b) - s^2(c) + s^2(d) + 2s(a)s(b)s(c)s(d) + 2s^2(a)s^2(d)}{2(s(a)s(d) + s(b)s(c))\operatorname{ch}\frac{a}{2}\operatorname{ch}\frac{d}{2}}\,. \tag{11}$$

Аналогично устанавливается формула

$$\cos C = \frac{-s^2(a) + s^2(b) + s^2(c) - s^2(d) + 2s(a)s(b)s(c)s(d) + 2s^2(b)s^2(c)}{2(s(a)s(d) + s(b)s(c))\operatorname{ch}\frac{b}{2}\operatorname{ch}\frac{c}{2}}\,. \tag{12}$$

Извлекая положительный квадратный корень из выражения

$$\sin^2 A \sin^2 C = (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 C),$$

где $\cos A$ и $\cos C$ найдены по формулам (11) и (12), имеем

$$\sin A \sin C = \\ 4 \operatorname{ch} \frac{a+b-c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b+c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b-c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a+b+c+d}{4} \\ \operatorname{sh} \frac{-a+b+c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a-b+c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a+b-c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a+b+c-d}{4} \Big/ \\ ((\operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{d}{2} + \operatorname{sh} \frac{b}{2} \operatorname{sh} \frac{c}{2})^2 \operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}). \tag{13}$$

Подставляя формулы (11), (12) и (13) в (9), после упрощений на компьютере получим

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{sh} \frac{-a+b+c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a-b+c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a+b-c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a+b+c-d}{4}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}}\,. \tag{14}$$

Это доказывает теорему 7.

Аналогично, замечая, что $2\cos^2 \frac{S}{4} = 1 + \cos \frac{S}{2} = 1 - \cos(A+C)$, имеем

$$\cos^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{ch} \frac{a+b-c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b+c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b-c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a+b+c+d}{4}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}}\,. \tag{15}$$

Доказательство следующей леммы представляет из себя легкое упражнение для компьютера.

Лемма 10. *Величина*

$$Q = \frac{\operatorname{ch} \frac{a+b-c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b+c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b-c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a+b+c+d}{4}}{\operatorname{ch} \frac{-a+b+c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b+c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a+b-c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a+b+c-d}{4}}$$

представима в виде $Q = 1 - \varepsilon$, *где*

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2} \operatorname{sh} \frac{c}{2} \operatorname{sh} \frac{d}{2}}{\operatorname{ch} \frac{p-a}{2} \operatorname{ch} \frac{p-b}{2} \operatorname{ch} \frac{p-c}{2} \operatorname{ch} \frac{p-d}{2}}\,, \ \ a\ p = \frac{a+b+c+d}{2}\,.$$

Взяв учетверенное произведение формул (14) и (15), имеем

$$\sin^2 \frac{S}{2} = \frac{\operatorname{sh} \frac{-a+b+c+d}{2} \operatorname{sh} \frac{a-b+c+d}{2} \operatorname{sh} \frac{a+b-c+d}{2} \operatorname{sh} \frac{a+b+c-d}{2}}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{d}{2}} \cdot Q, \tag{16}$$

где Q то же, что и в лемме 10.

Из формулы (16), пользуясь леммой 10 и очевидными тождеством $p - a = \dfrac{-a+b+c+d}{2}$, получим утверждение теоремы 6.

Аналогично, поделив (14) на (15), имеем

$$\operatorname{tg}^2\frac{S}{4} = \frac{\operatorname{sh}\frac{-a+b+c+d}{4}\operatorname{sh}\frac{a-b+c+d}{4}\operatorname{sh}\frac{a+b-c+d}{4}\operatorname{sh}\frac{a+b+c-d}{4}}{\operatorname{ch}\frac{a+b-c-d}{4}\operatorname{ch}\frac{a-b+c-d}{4}\operatorname{ch}\frac{a-b-c+d}{4}\operatorname{ch}\frac{a+b+c+d}{4}}. \qquad (17)$$

Откуда, еще раз применяя лемму 10, установим справедливость теоремы 5.

Список литературы

[1] Понарин Я. П. *Элементарная геометрия. Т.1. Планиметрия.* М.: МЦНМО. 2004. 312 с.

[2] Сабитов И. Х. *Решение циклических многоугольников* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 14. 2010. С. 149–154.

[3] Прасолов В. В. *Геометрия Лобачевского.* 3-е изд. М.: МЦНМО. 2004. 88 с.

[4] Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С. *Геометрия пространств постоянной кривизны* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ. Т. 29. 1988. С. 1–146.

[5] Walter R. *Polygons in hyperbolic geometry* 1*: Rigidity and inversion of the* n*-inequality*. 2010. arXiv:1008.3404v1 [math.MG]

[6] Walter R. *Polygons in hyperbolic geometry* 2: *Maximality of area*. 2010. arXiv:1008.3821v1 [math.MG]

[7] Петров Ф. В. *Вписанные четырехугольники и трапеции в абсолютной геометрии* // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 13. 2009. С. 149–154.

[8] Valentine J. E. *An analogue of Ptolemy's theorem and its converse in hyperbolic geometry* // Pacific J. Math. Vol. 34. 1970. P. 817–825.

[9] Ren Guo, Nilgün Sönmez. *Cyclic polygons in classical geometry* // Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences. Vol. 64, no. 2. 2011. P. 185–194. arXiv:1009.2970v1 [math.MG].

А. Д. Медных, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет

Email: `smedn@mail.ru`