Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются).

1. Найти первообразную $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x\sin(x)+\cos(x))^2}$.

2. В Черноморске во время обсуждения вопроса о том, когда же наконец Черноморск объявят вольным городом, сложилась занятная ситуация. Все черноморцы разбились на партии, а все партии на фракции так, что: 1) существует партия, в которой объединились все n жителей города; 2) каждая партия состояла ровно из двух непересекающихся фракций; 3) каждая фракция численностью более одного человека считала себя партией. Каждый житель города платит членский взнос (1 руб.) в каждой партии, членом которой является. Как им надо было организоваться, чтобы сумма взносов была: а) максимальной; б) минимальной? (*Д. В. Дерягин*)

3. Пусть у функции, определенной на отрезке [или на прямой], в каждой точке этого отрезка [прямой] есть конечный предел (не обязательно совпадающий со значением в точке). Насколько такая функция может отличаться от непрерывной? Более точно, каким может быть множество точек разрыва у такой функции? (*М. Прасолов*)

4. Ограничена ли последовательность $\{a_n\}$, заданная рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_2 = x$, $a_{n+1} = (a_{n-1} \cdot a_n - 1)/a_{n-1}$, если $1 < x < 2$? (*К. Н. Игнатьев*)

5. Двумерная фигура в четырёхмерном пространстве имеет площадь S. Ее проекция на первые две координаты имеет площадь S_1, а проекция на последние две координаты имеет площадь S_2. Докажите, что $S \geqslant S_1 + S_2$. (*неравенство Виртингера*)

6. Дана инъекция $F\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Когда из нее извлекается функциональный корень, т. е. существует отображение $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такое, что $G \circ G = F$? Когда множество функциональных корней конечно? Ответ дать в терминах строения множества двусторонних орбит элементов. *Двусторонняя орбита* элемента x — это множество элементов вида $\{f^k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. (*Н. Николов, Б. Станков*)

7. В единичный шар вписано тело T, все ребра которого имеют длину не более 10^{-3}, а площадь его поверхности больше 10^3. Докажите, что у него не менее 10^9 граней. (*А. Я. Белов*)

8. Даны два подмножества $\mathbb{Z}_2^n$ — A и B. Известно, что $|A| + |B| > 2^k$. Докажите, что $|A + B| \geqslant 2^k$. ($A + B$ — это сумма Минковского двух множеств.) (*Д. Фон-Дер-Флаас*)

9. В алфавите Анчурского языка есть лишь три буквы: A, B и C. Два разных слова обозначают одно и то же понятие, если одно из них может быть получено из другого с помощью следующих операций, которые можно проводить в любой последовательности и в любых количествах:

   а) в любом месте слова можно заменять друг на друга следующие комбинации букв: ABA на BAB, ACA на CAC или BC на CB (и наоборот).

   б) из любого места можно выкидывать две одинаковые буквы, идущие подряд, а также в любое место можно вставлять две одинаковые буквы.

   а) Конечное или бесконечное количество понятий можно выразить с помощью этого языка? Если конечное, то сколько?

   б) Тот же вопрос, если замена BC на CB запрещена, однако разрешена замена BCB на CBC.

   в) Тот же вопрос, если в алфавите две буквы A и B, свойство 2 сохраняется и из любого места можно выкидывать $(AB)^n$ и в любое место это вставлять.

   (*В. О. Бугаенко*)

10. Дан выпуклый n-угольник. Двое по-очереди проводят его стороны или диагонали. Запрещается проводить отрезок, имеющий общую точку с ранее проведенными (в том числе и общий конец). Проигрывает тот, кому некуда ходить. При каких n выигрывает начинающий?

11. При каких натуральных n число $\dfrac{3^n - 1}{2}$ есть квадрат целого числа? (*Э. Б. Винберг*)

12. а) Куб $n \times n \times n$ разбит на n^3 единичных кубиков, каждый раскрашен в один из трех цветов. Докажите, что найдется одноцветный путь, соединяющий противоположные грани большого кубика. Соседними считаются кубики имеющие хотя бы одну общую точку. (*Теорема Лебега о покрытиях*)

    б) k-мерный куб $n \times n \cdots \times n$ разбит на n^k единичных кубиков, каждый раскрашен в один из l цветов. Докажите, что найдется связный кластер объема $C(k)n^{k+1-l}$. (*Г. В. Кондаков, А. Я. Белов*)