Еще одно доказательство «из Книги»: теорема Менгера

А. Б. Скопенков*

«Теорема Менгера является одним из краеугольных камней теории графов.» [2] Она изучается в большинстве кружков и летних школ. Предлагаемые доказательства, как правило, основаны на простой идее, но содержат много технических деталей, ср. [1, 3, 4]. Здесь приводится простое доказательство, полученное незначительным упрощением из [2]. (Это доказательство близко к приведенным в [1, 3, 4] и, возможно, к другим; однако, трюк со стягиванием ребра позволяет избежать технических трудностей.)

В этой заметке графы могут иметь петли и кратные ребра.

Теорема Менгера. *Если вершины a и b графа G, не соединенные ребром, остаются в одной компоненте связности после удаления любых $k-1$ других вершин, то a и b можно соединить k путями, любые два из которых пересекаются только в концах.*

Доказательство. Докажем теорему для $k = 3$; для произвольного k доказательство аналогично. Назовем *тройкой $a - b$ путей* тройку путей из a в b, любые два из которых пересекаются только в концах.

Пусть G — минимальный по числу ребер контрпример к теореме Менгера (для $k = 3$). Тогда *вершины a и b оказываются в разных компонентах после удаления некоторых трех вершин x, y, z, две из которых соединены ребром.*

(Действительно, если любое ребро графа G содержит a или b, то это утверждение очевидно. Иначе обозначим через e ребро графа G, не содержащее ни a, ни b. Обозначим через G/e граф, полученный из G стягиванием ребра e. Так как в G нет тройки $a - b$ путей, то в G/e нет тройки $(a/e) - (b/e)$ путей. Ввиду минимальности графа G граф G/e содержит две вершины, разделяющие a/e и b/e. Среди них есть вершина e/e, ибо в G нет двух вершин, разделяющих a и b. Значит, прообразы в G этих двух вершин являются искомыми тремя вершинами.)

*Поддержан грантом фонда Саймонса.

Обозначим через G_a граф, состоящий из

- $\triangleright$ компоненты A связности графа $G-\{x,y,z\}$, содержащей вершину a,
- $\triangleright$ вершин x,y,z и ребер, соединяющих их с вершинами из A,
- $\triangleright$ новой вершины b' и ребер $b'x$, $b'y$ и $b'z$.

Вершины a и b' графа G_a остаются в одной компоненте связности после удаления любых двух вершин графа G_a. Так как степень вершины b в графе G не менее 3, то в графе G_a меньше ребер, чем в графе G. Значит, в G_a есть тройка $a-b'$ путей.

Аналогично определяем граф G_b и находим в нем тройку $a'-b$ путей. Построенные шесть путей дают тройку $a-b$ путей в G. $\square$

Список литературы

[1] А. Я. Белов. *Метод минимального контрпримера и спуск в графах* // Математика в задачах. Под ред. А. Заславского, Д. Пермякова, А. Скопенкова, М. Скопенкова и А. Шаповалова. М.: МЦНМО, 2009.

[2] R. Diestel. *Graph Theory*. Electronic Edition. New York: Springer Verlag. 2000.

[3] Д. В. Карпов. *Теория графов*. `http://logic.pdmi.ras.ru/ dvk/211/graphs_dk.pdf`

[4] А.Ю. Эвнин. *Вокруг теоремы Холла*: *учебное пособие* // Мат. Образование, №3, 2005. С. 2–23.

А. Б. Скопенков, механико-математический факультет Московского государственного университета, Независимый московский университет и Московский институт открытого образования
Email: `skopenko@mccme.ru`
Инфо: `http://dfgm.math.msu.su/people/skopenkov/papersc.ps`