Биективное доказательство дискретного закона арксинуса

Э. Э. Лернер, Э. Ю. Лернер

Найдено геометрическое преобразование, устанавливающее явное взаимно однозначное соответствие между траекториями одномерного случайного блуждания длины $2n$: а) начинающимися и заканчивающимися в нуле и проходящими через него в момент времени $2i$; б) начинающимися в нуле и пребывающими $2i$ единиц времени на положительной полуоси. Равномощность множеств этих траекторий хорошо известна. Преобразование, излагаемое в статье, является обобщением конструкции Э. Нелсона, рассмотревшего случай $i = n$.

1. Увидев картинку с колоколообразной кривой, типичный математик узнает в рисунке не шляпу и не змею, проглотившую слона, а плотность нормального (гауссовского) распределения. К сожалению, менее идентифицируема сообществом плотность распределения, изображаемая кривой с «пузом вниз». Лишь искушённый человек узнает в таком рисунке функцию

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\,, \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

— плотность знаменитого закона арксинуса, служащего философским оправданием продолжительности «светлых» (а также и «тёмных») полос жизни. В этой заметке будет представлено геометрическое доказательство комбинаторной основы этого закона (в дальнейшем изложении отсутствуют какие-либо формулы, за исключением формулы (2)).

Симметричное одномерное случайное блуждание — это белая мышь теории вероятностей. Медики и биологи проводили много экспериментов на белых мышах, вероятностники же изучение сложных законов начинали с анализа следующей модели. В игровом её варианте (см. [3]) рассматривается пьяница, идущий по дороге и делающий каждый раз шаг вперёд или назад с равными вероятностями. Ответ на вопрос о том, далеко ли он уйдёт от дома, двигаясь таким образом, хорошо известен (см., например, [2]).

Более интригующий вопрос — свалится ли пьяница с обрыва, если таковым заканчивается дорога с одной из сторон, — также очень популярен и ему посвящено много литературы (см. [2, 3]).

В этой заметке рассмотрена другая задача — какова доля времени, которое пьяница будет проводить слева или справа от дома (начала координат), двигаясь по бесконечной в обе стороны дороге (целочисленной прямой, на которой он и передвигается). Естественно, ответы на все эти вопросы есть в учебниках по теории вероятностей (см. [2, 6]), в них, в частности, есть описание результатов экспериментов, подтверждающих, что распределение доли времени, проведённым пьяницей слева (справа) от дома описывается функцией (1). Неожиданность такого распределения состоит в том, что согласно ему в большинстве экспериментов значение доли времени будет далеко от среднего, равного $1/2$, чаще оно будет близко либо к нулю, либо к единице. Мы будем рассматривать дискретный закон арксинуса, дающий распределение доли времени при фиксированном общем числе шагов, равном $2n$. Согласно этому закону (см. [2, 6]), справедлива следующая формула для вероятности того, что доля времени проведённого на положительной полуоси, не превышает x:

$$\sum_{i\colon\, i/n\leqslant x} \frac{\binom{2i}{i}\binom{2n-2i}{n-i}}{2^{2n}}\ . \tag{2}$$

При $n\to\infty$ сумма (2) стремится к функции распределения $2\arcsin(\sqrt{x})/\pi$. Случайной величине с такой функцией распределения и соответствует плотность (1).

Заметим, что числитель каждого слагаемого в сумме (2) представляет собой количество траекторий длины $2n$, проходящих через начало координат в нулевой, $2i$-й и $2n$-й моменты времени. С другой стороны (как фактически утверждается в формуле (2)), то же выражение описывает количество траекторий длины $2n$, пребывающих на положительной полуоси $2i$ единиц времени. Цель заметки — описать геометрическое преобразование, устанавливающее взаимно однозначное соответствие между множествами этих траекторий. Задача поиска такого соответствия между элементами двух равномощных множеств традиционна для перечислительной комбинаторики (см. [4, 5]).

Во всех окончательных результатах дальнейшего (несколько более формального) изложения мы будем рассматривать траектории одномерного случайного блуждания, начинающиеся в нуле. Если при этом траектория в нуле заканчивается, то будем называть её замкнутой. Траектория, проходящая лишь по положительной полуоси (включая ноль), называется неотрицательной. Как обычно в таких случаях, будем рассматривать геометрическое представление траекторий в виде ломаной в плоскости (t, x), соединяющей точки с целочисленными координатами, указывающими положение x пьяницы после t шагов.

2. Преобразование Нелсона. Сначала напомним придуманное Э. Нелсоном взаимно однозначное соответствие между неотрицательными траекториями длины $2n$, начинающимися в нуле, и замкнутыми траекториями той же длины (это частный случай того биективного соответствия, которое мы хотим получить, для $i = n$).

Вот ([6, с. 115]) описание преобразования, переводящего замкнутую траекторию в неотрицательную: «Обозначим *самую левую* точку минимума заданного пути, ведущего из начала координат в точку $(2n, 0)$, через $M = (k, m)$. Отразим участок, ведущий из начала координат в точку M, относительно вертикальной прямой $t = k$ и передвинем отражённый участок так, чтобы его начальная точка совпала с точкой $(2n, 0)$. Если M принять за начало координат, то в новой системе координат новый путь ведёт из начала в точку $(2n, 2m)$ и все его вершины лежат выше оси или на ней.»

Обратное преобразование неотрицательной траектории, заканчивающейся в точке $(2n, 2m)$, в траекторию, заканчивающуюся в $(2n, 0)$, очевидно, происходит так: отсечём участок от *самого правого* пересечения траектории с горизонтальной прямой $x = m$, отразим его зеркально относительно соответствующей вертикальной прямой и приставим перед началом траектории, перенеся начало координат (см. рис. 1). Заметим, что при последнем преобразовании траектория перейдёт сама в себя, если $m = 0$.

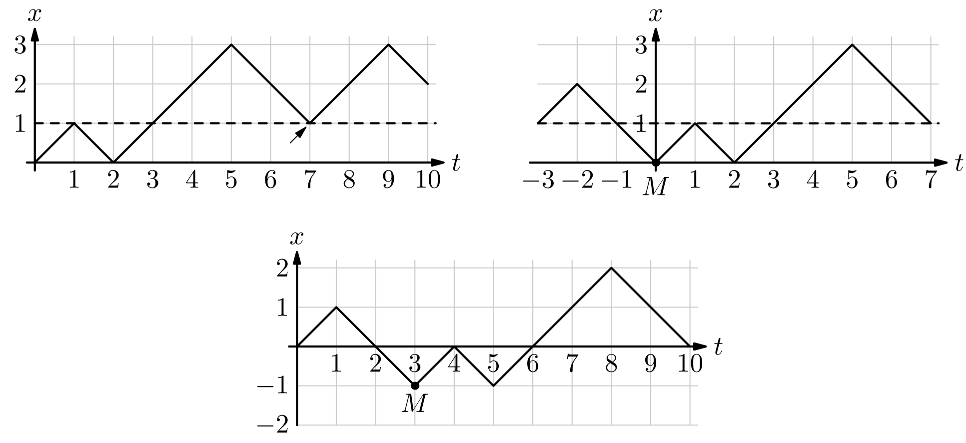

Рис. 1. Соответствие между неотрицательной траекторией (слева сверху) и замкнутой траекторией (нижний график)

Если же $m > 0$, то получится траектория, часть которой будет отрицательна (последнее означает, что имеется часть ломаной, расположенная ниже горизонтальной оси).

Все рассуждения выше после очевидных замен могут быть применены для установления биективного соответствия между неположительными траекториями длины $2n$ и замкнутыми траекториями той же длины (это другой частный случай общего результата для $i = 0$).

3. Соответствие между замкнутыми траекториями. Опишем теперь соответствие между траекториями, пребывающими $2i$ $(0 < i < n)$ единиц времени на положительной полуоси, а $2n - 2i$ — на отрицательной полуоси, и траекториями, проходящими через ноль в моменты времени $2i$ и $2n$. Рассмотрим сначала частный случай, когда первый вид траектории также заканчивается в нуле. Соответствие в этом частном случае строится достаточно просто и естественно.

Назовём куском часть траектории, начинающуюся и заканчивающуюся в нуле и нигде больше в ноль не заходящую. Знаком куска назовём знак неконцевых его точек. Очевидно, что симметрия относительно горизонтальной оси координат устанавливает взаимно однозначное соответствие между положительными и отрицательными кусками. Знаковой последовательностью замкнутой траектории назовём последовательность знаков всех кусков этой траектории.

Преобразование, которое переводит замкнутую траекторию длины $2n$, являющуюся неотрицательной $2i$ шагов, в замкнутую траекторию, проходящую через ноль в момент $2i$ (не любую такую траекторию, точное описание образа дано ниже), устроено следующим образом. Пусть A_+ — совокупность всех положительных кусков исходной траектории, A_- — отрицательных кусков. Пусть S — знаковая последовательность исходной

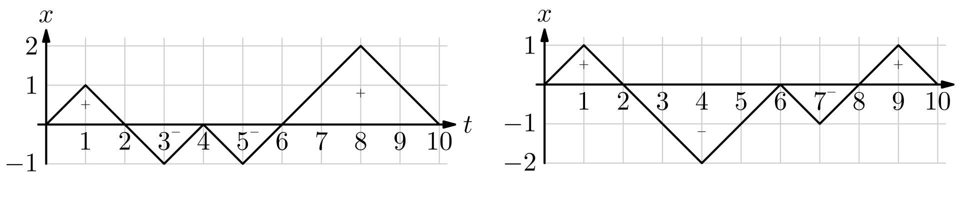

Рис. 2. Соответствие между замкнутой траектории длины 10, неотрицательной в течении 6 шагов (слева) и замкнутой траекторией той же длины, проходящей через $(6, 0)$ (справа). Куски из множеств A_+, A_- отмечены соответствующими знаками на левом графике. На правом графике эти куски расположены слева (справа) от точки $(6, 0)$. Знаковая последовательность $S = (+, -, -, +)$

траектории. Рассмотрим теперь замкнутую траекторию, у которой набор кусков совпадает с точностью до симметрии относительно горизонтальной оси с конкатенацией A_+, A_-, а знаковая последовательность совпадает с S. Очевидно, что эта траектория проходит через ноль в момент времени $2i$. Это и будет результат преобразования (см. рис. 2).

Опишем обратное преобразование. Нам известно, что в момент времени $2i$ траектория проходит через ноль. Помещаем в A_+ все куски траектории, соответствующие моментам времени до $2i$ включительно, в A_- — оставшиеся. Затем с помощью симметрии относительно горизонтальной оси ориентируем все куски в A_+ так, чтобы они приобрели положительный знак, в A_- — отрицательный. Так как знаковые последовательности рассматриваемых траекторий совпадают, последовательность S известна. Берём по очереди куски либо из A_+, либо из A_- в зависимости от очередного знака элемента S, и приставляем их друг к другу. Получаем замкнутую траекторию, которая $2i$ единиц времени положительна и $2n - 2i$ единиц времени отрицательна.

Очевидно, что обратное преобразование определено не в любом случае, а только если количество положительных знаков в S совпадает с мощностью A_+, а отрицательных — с A_-. Это свойство и определяет совокупность рассмотренных траекторий, проходящих через ноль в момент времени $2i$. В общем случае мы нуждаемся в доопределении обратного преобразования. При этом результирующая траектория уже будет незамкнутой.

4. Соответствие в общем случае. Итак, пусть у нас имеется произвольная замкнутая траектория, проходящая через ноль в момент времени $2i$. Сформируем множества A_+, A_-, S как описано выше. Будем строить траекторию, подсоединяя кусок к куску в соответствии с вышеописанным алгоритмом. Пусть при рассмотрении очередного знака S алгоритм не срабатывает — куски в соответствующем множестве A уже все изъяты (рассмотрены). Пусть, для определённости, очередной знак S отрицателен, а из множества A_- изъяты все куски. Тогда уберём из уже сформированной траектории все куски, взятые после последнего куска из A_-. Из этих кусков (они были взяты, очевидно, из множества A_+) и всех оставшихся неизъятыми кусков множества A_+ сформируем вспомогательную замкнутую траекторию, знаковая последовательность которой совпадает со взятыми в нужном количестве последними элементами из S (отрицательные куски этой вспомогательной траектории получаются из исходных с помощью симметрии относительно горизонтальной оси).

Далее преобразуем эту вспомогательную траекторию в неотрицательную траекторию той же длины алгоритмом Нелсона, описанным в начале этой работы. Заметим, что получившаяся неотрицательная траектория

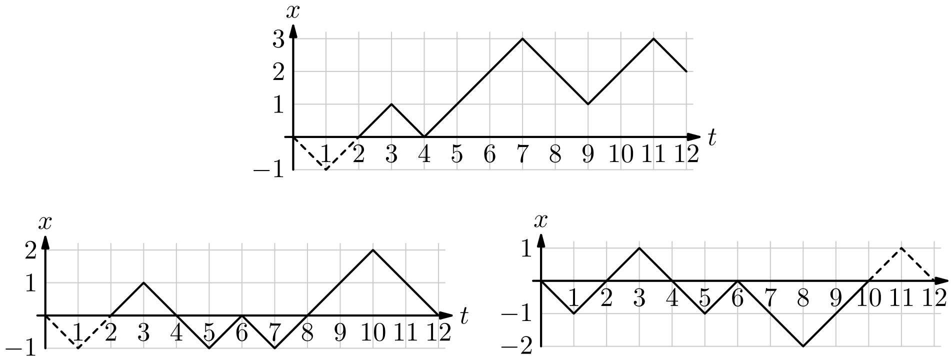

Рис. 3. Соответствие между траекторией длины 12, *неотрицательной в течении* 10 *шагов (верхний график) и замкнутой траекторией той же длины, проходящей через* $(10, 0)$ *(нижний график справа). Снизу слева изображён результат первого этапа преобразования верхней траектории. Сплошной линией выделены части траекторий, соответствующие кускам из* A_+, *штриховой линией — куску из* A_-; $|A_+| = 4$, $|A_-| = 1$. *Финальная часть верхней траектории совпадает с траекторией на рис.* 1 *слева сверху. Знаковая последовательность устанавливается из результата первого этапа преобразования и совпадает со знаковой последовательностью последнего графика:* $S = (-, +, -, -, +)$.

уже не будет заканчиваться в нуле. Приставив её к концу ранее сформированной траектории, получим график случайного блуждания, пребывающего $2i$ единиц времени на положительной и $2n - 2i$ единиц времени на отрицательной полуоси.

Нам осталось описать общее прямое преобразование траектории, пребывающей $2i$ единиц времени на положительной полуоси, в замкнутую траекторию, проходящую через ноль в момент времени $2i$. Первый этап этого преобразования состоит в изменении неположительного (или неотрицательного) конца исходной траектории (берётся максимально длинная финальная часть траектории, имеющая постоянный знак) в замкнутую траекторию той же длины по правилу Нелсона. Второй этап общего преобразования применяется к результату первого этапа и почти совпадает с частным случаем прямого преобразования для замкнутой траектории. Единственное отличие состоит в том, что набор кусков, представляющий собой преобразованный конец траектории, целиком помещается либо в A_+, либо в A_- в зависимости от знака финальной части исходной траектории. При этом последовательность S считывается со всей результирующей траектории первого этапа и потому может быть совершенно произвольной (с естественным ограничением $|S| = |A_+| + |A_-|$). В результате двух этапов мы получаем произвольную замкнутую траекторию, проходящую через ноль в момент времени $2i$ (см. рис. 3). Очевидно, что прямому преобразованию соответствует описанное ранее обратное.

5. Дискретный закон арксинуса заставляет задуматься об условиях, при которых индивидуальное поведение будет резко отличаться от типичного (ведь если много «экземпляров пьяниц» выйдут из дома, то в достаточно большой момент времени почти в точности половина из них будет находиться слева от начальной точки). Такие размышления привели к понятию эргодичности, яркое изложение соответствующих результатов для естественного обобщения случайных блужданий — марковской цепи — дано в книге [1] (см. также [6]). Случайное блуждание на бесконечной прямой оказывается неэргодичным, к тому же время возвращения в начало координат является бесконечным, в этом глубинная причина «экстремистского» поведения индивидуальных траекторий.

Список литературы

[1] Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. *Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 2: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения*. М.: МЦНМО. 2009.

[2] Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.Б. *Введение в теорию вероятностей*. М.: Наука. 1982.

[3] Мостеллер Ф. *Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями*. М.: Наука. 1975.

[4] Стенли Р. *Перечислительная комбинаторика*. Т. 1. М.: Мир. 1990.

[5] Стенли Р. *Перечислительная комбинаторика*. Т. 2. М.: Мир. 2005.

[6] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и её приложения*. Т. 1. М.: Мир. 1984.

Э. Э. Лернер, студент, Московский государственный университет
Email: neex.emil@gmail.com
Э. Ю. Лернер, доцент, Казанский (Приволжский) федеральный университет. 20008, Казань, Кремлёвская 18, К(П)ФУ, факультет ВМК
Email: eduard.lerner@gmail.com