Контактные числа, коды и сферические многочлены

А. В. Акопян* Г. А. Кабатянский† О. Р. Мусин‡

1. Введение

В этой статье мы расскажем об одной интересной геометрической задаче с более чем трехсотлетней историей, где первые результаты стали появляться сравнительно недавно. Зададимся следующим вопросом:

> *какое максимальное число шаров одинакового радиуса можно расположить в n-мерном пространстве так, чтобы все они касались («были в контакте») одного (центрального) шара такого же радиуса?*

Соответствующее число шаров называется контактным числом $\tau(n)$ n-мерного евклидова пространства. Из рисунка 1 очевидно, что $\tau(2) = 6$.

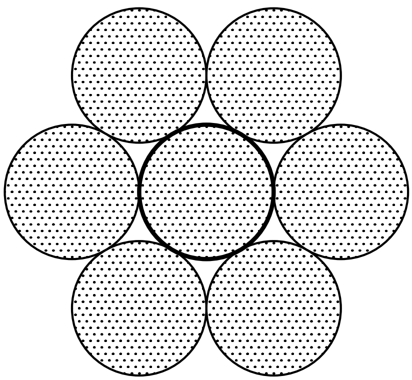

Рис. 1.

*Работа выполнена при частичной поддержке фонда «Династия», грантов РФФИ 10-01-00096 и 11-01-00735 и гранта Правительства РФ №11.G34.31.0053.

†Работа выполнена при частичной поддержке гранта 11-01-00735 и гранта Правительства РФ №11.G34.31.0073.

‡Работа выполнена при частичной поддержке гранта 11-01-00735 и гранта Правительства РФ №11.G34.31.0053.

Поместим для простоты центр центрального шара в точку 0. Обозначим $A_1, \ldots, A_L$ точки (векторы) касания шарами центрального шара. Тогда угол между любыми двумя векторами A_i и A_j не меньше $\pi/3$ и очевидно, что наша задача эквивалентна нахождению максимального числа точек на сфере в n-мерном пространстве с попарными углами не меньше 60°. Отметим, что такое множество точек называется *сферическим кодом* с угловым расстоянием 60°. Похожий объект под названием «двоичные коды с исправлением ошибок» также будет рассматриваться в нашей статье.

Чему равно $\tau(3)$: 12 или 13, было предметом спора в 1694 году между сэром Ньютоном и сэром Грегори (пример расположения 12 шаров привести несложно, в этом случае центры шаров можно поместить в вершины икосаэдра подходящего размера). Ньютон оказался прав, и $\tau(3) = 12$, но первое доказательство этого факта появилось лишь в середине XX века [19]. Отметим, что полное элементарное доказательство этого факта было найдено сравнительно недавно. Его можно найти в статье [7], опубликованной в предыдущем выпуске этого сборника.

Никаких других значений $\tau(n)$ не было известно до 1979 года, когда с помощью неожиданного для геометрии метода, придуманного незадолго до этого Ф. Дельсартом [3], удалось доказать, что $\tau(8) = 240$ и $\tau(24) = 196560$. Этот замечательный результат был получен В. И. Левенштейном [6] и независимо от него А. Одлыжко и Н. Слоэном [17]. На самом деле, уже было известно, что $\tau(8) \geqslant 240$ и $\tau(24) \geqslant 196560$ благодаря двум замечательным решеткам: E_8 и Λ_{24}, у которых число «соседей» равнялось в точности этим значениям. Трудность состояла в доказательстве, что большего числа шаров разместить нельзя.

Следующим, и на сегодня последним, известным значением $\tau(n)$, стало ожидаемое равенство $\tau(4) = 24$, которое удалось доказать одному из авторов этой статьи, см. [16]. Для доказательства этого результата понадобилось модифицировать метод Дельсарта.

Метод Дельсарта позволяет получать верхние оценки (оценки несуществования) для многих других дискретных задач. В частности, сам метод был придуман Дельсартом для получения верхних оценок на мощность кодов, исправляющих ошибки. Эти идеи также нашли применение в других задачах об оптимальных расположениях точек на сфере, в частности, в задаче о конфигурации электронов с минимальной энергией, см. [12] или более простое изложение в [1].

В этой статье мы расскажем об оптимальных расположениях точек на сфере, решетках в евклидовых пространствах и кодах с исправлением ошибок и о том, как эти задачи связаны между собой и как к ним применять метод Дельсарта.

2. Коды и решетки

Как мы уже упоминали выше, есть две замечательные решетки: E_8 в 8-мерном пространстве и Λ_{24} в 24-мерном пространстве, число касаний для которых равно 240 и 196560, соответственно. Наиболее простой путь описать эти решетки лежит, на наш взгляд, через *теорию кодирования*. Теория кодирования или теория кодов, исправляющих ошибки, ведет свой отсчет от опубликованной 60 лет назад работы Р. Хэмминга [13], в которой были построены коды, исправляющие одиночные ошибки. С математической точки зрения основная часть теории кодирования может рассматриваться как теория упаковок одного класса дискретных метрических пространств, называемых пространствами Хэмминга, которые мы сейчас и определим.

Зададим на множестве $\mathcal{B}^n$ всех *двоичных* слов (векторов) длины n из алфавита $\{0,1\}$ расстояние Хэмминга d_H как число позиций, в которых два слова различаются. Т. е. для двух произвольных двоичных слов $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1,\ldots,b_n)$ из $\mathcal{B}^n$ расстояние Хэмминга между ними равно $d_H(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i|$. Расстояние от нулевого слова $\mathbf{0}$ до слова $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n)$, равное числу единиц среди координат a_i, называется весом Хэмминга слова $\mathbf{a}$ и обозначается $wt(\mathbf{a})$.

Почему $d_H(\mathbf{a},\mathbf{b})$ это метрика, т. е. почему выполнена аксиома треугольника (две другие аксиомы очевидны)? Определим на $\mathcal{B}^n$ структуру графа, связав вершины $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ребром, если они различаются ровно в одной позиции, т. е. если $d_H(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 1$. Легко видеть, что $d_H(\mathbf{a},\mathbf{b})$ — это длина кратчайшего пути в этом графе, а для длины кратчайшего пути в графе аксиома треугольника, очевидно, выполнена.

Обозначим через

$$\mathcal{S}(n,t)(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B}^n : d_H(\mathbf{x},\mathbf{a}) \leqslant t\}$$

шар радиуса t в пространстве Хэмминга $\mathcal{B}^n$ с центром в точке (слове) $\mathbf{a}$. Его мощность очевидно равна $S(n,t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}$.

Подмножество C пространства Хэмминга $\mathcal{B}^n$ называется *упаковкой шарами радиуса* t, если шары радиуса t с центрами в точках C не пересекаются.

Если точки (слова) упаковки $C \subset \mathcal{B}^n$ использовать для передачи сообщений по каналу связи, в котором при передаче n символов происходит не более t ошибок, то на приемной стороне возможно однозначное восстановление (*декодирование*) переданного сообщения, так как шары радиуса t с центрами в разных кодовых словах не пересекаются. По этой причине упаковка шарами радиуса t также называется *двоичным кодом длины* n, *исправляющим* t *ошибок*. *Расстояние* $d(C)$ *кода* C определяется как минимальное из попарных расстояний между его словами

$$d(C) = \min_{\mathbf{c} \neq \mathbf{c}' \in C} d(\mathbf{c}, \mathbf{c}'), \tag{1}$$

и код C является упаковкой шарами радиуса t, т. е. исправляет t ошибок, если и только если $d(C) \geqslant 2t + 1$.

Всюду ниже код — это синоним подмножества пространства Хэмминга. Для кода C с исправлением t ошибок, т. е. для упаковки шарами радиуса t, определим плотность упаковки $\mu(C, t)$ как долю всего пространства $\mathcal{B}^n$, покрываемую шарами с центрами в C, т. е.

$$\mu(C, t) = \frac{|C| S(n, t)}{2^n} .$$

Очевидно, что плотность упаковки (кода) не более 1, т. е. для мощности произвольного кода C с исправлением t ошибок справедливо ограничение

$$|C| \leqslant \frac{2^n}{S(n, t)} ,$$

называемое границей Хэмминга.

Коды, достигающие границу Хэмминга, называются *совершенными* — они плотно, «без дыр» заполняют все пространство Хэмминга. Р. Хэмминг построил совершенные коды, исправляющие одиночные ошибки — при длине $n = 2^r - 1$ они имеют мощность 2^{n-r}, где $r = 2, 3, \ldots$. Тогда же, на заре теории кодирования (конец 1940-х), были построены два совершенных кода: двоичный код Голея длины 23, исправляющий три ошибки, и троичный (т. е. над алфавитом $\{-1, 0, 1\}$) код Голея длины 11, исправляющий две ошибки. Одним из самых замечательных результатов теории кодирования является доказанная в начале 70-х годов XX века гипотеза, что других совершенных кодов, исправляющих t ошибок, при $t > 1$ не существует, см. [8].

Неудивительно, что для построения оптимальных расположений точек на сфере нам понадобятся именно совершенные двоичные коды. Начнем с кодов Хэмминга. Код Хэмминга длины 7 (самый простой и самый известный из кодов) задается как множество решений системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 \oplus x_3 \oplus x_5 \oplus x_7 = 0, \\ x_2 \oplus x_3 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0, \\ x_4 \oplus x_5 \oplus x_6 \oplus x_7 = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $x_i \in \mathbb{Z}_2$ и $\oplus$ означает сложение по модулю 2. Легко увидеть закон, по которому выбраны коэффициенты этой системы. А именно, коэффициент при x_j в i-м уравнении равен коэффициенту при 2^{i-1} в двоичном разложении числа j. Также легко видеть, что у этой системы есть 16 решений.

Действительно, перепишем систему в виде

$$x_1 = x_3 \oplus x_5 \oplus x_7,$$
$$x_2 = x_3 \oplus x_6 \oplus x_7,$$
$$x_4 = x_5 \oplus x_6 \oplus x_7.$$

Переменные x_3, x_5, x_6 и x_7 можно выбрать произвольно (так называемые информационные символы), и через них однозначно определятся остальные переменные x_1, x_2 и x_4 (так называемые проверочные символы).

Итак, мы описали знаменитый $(7,4)$-*код Хэмминга.* Здесь 7 означает размерность пространства, называемую длиной кода, а 4 — число информационных символов. Проверим, что множество решений этой системы является кодом с расстоянием 3, т. е. упаковкой шарами радиуса 1 или, что тоже самое, кодом с исправлением одиночных ошибок. Заметим, что любое ненулевое решение системы должно иметь как минимум три единицы среди своих координат, потому что иначе найдется уравнение из (2), в котором присутствует только одна из этих единиц (столбцы коэффициентов при различных переменных различны и отличны от нулевого столбца). Пусть теперь $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_7)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_7)$ — два произвольных различных решения системы. Рассмотрим вектор $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = (a_1 \oplus b_1, \ldots, a_7 \oplus b_7)$. Число единиц в нем и есть расстояние Хэмминга между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а так как он также является решением системы, то в нем не менее трех единиц, что и требовалось доказать. Отметим, что код C со свойством, что вместе с двумя любыми векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из кода их сумма $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}$ также принадлежит коду, называется *групповым* (или *линейным*) кодом.

Сопоставим произвольному двоичному вектору $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ вектор $\hat{\mathbf{c}} = (c_1, \ldots, c_{n+1})$, где $c_{n+1} = c_1 \oplus \ldots \oplus c_n$. Такая операция называется 1-удлинением с помощью общей проверки на четность. Ясно, что применение этой операции к произвольному линейному коду с нечетным расстоянием $2t+1$ приводит к линейному коду с той же мощностью, но на единицу бо́льшими расстоянием и длиной. И на самом деле нам будет нужен не сам $(7,4)$-код Хэмминга, а его 1-удлинение, т. е. $(8,4)$-код с расстоянием 4 (также называемый кодом Хэмминга). Кроме того, нам понадобится тот факт, что у нулевого вектора в $(8,4)$-коде имеется ровно 14 «соседей», т. е. в коде имеется 14 кодовых слов веса 4.

Упражнение. Докажите это (подсказка — этот код групповой, и в нем есть вектор $\mathbf{1}$ из всех единиц).

Решеткой $\mathbb{L}$ в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ называется дискретная подгруппа этого пространства, т. е. для любых двух векторов решетки их сумма и разность также является векторами решетки. Простейшей решеткой является целочисленная решетка $\mathbb{Z}^n$, состоящая из всех точек с целочисленными координатами. Легко показать, что любая решетка имеет базис (и не один), т. е. набор линейно независимых векторов $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(k)}$ таких, что любой вектор решетки $\mathbf{v}$ представим в виде их целочисленной комбинации, т. е. $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}^{(1)} + \ldots + a_k\mathbf{v}^{(k)}$, где $a_1, \ldots, a_k$ — целые числа, а число k называется рангом решетки. Определим для решетки $\mathbb{L}$ ее минимальное расстояние $d(\mathbb{L})$ (аналогично тому, как это было сделано для кода, см. (1))

$$d(\mathbb{L}) = \min_{\mathbf{v} \neq \mathbf{v}' \in \mathbb{L}} d(\mathbf{v}, \mathbf{v}').$$

С каждой решеткой связано соответствующее число касаний. «Соседями» точки $\mathbf{v} \in \mathbb{L}$ называются точки решетки $\mathbb{L}$, которые находятся на расстоянии $d(\mathbb{L})$ от $\mathbf{v}$. Число соседей не зависит от выбора точки $\mathbf{v}$ и обозначается $\tau(\mathbb{L})$, так как, поместив в точку $\mathbf{v}$ и ее соседей шары радиуса $d(\mathbb{L})/2$, мы получим $\tau(\mathbb{L})$ шаров, касающихся центрального шара. Например, для решетки $\mathbb{Z}^n$ ее расстояние равно 1, а число касаний $2n$, что меньше $\tau(n)$ для всех $n \geqslant 2$. Более того, известно, что $\tau(n)$ при больших n растет экспоненциально, а именно (см. [4])

$$(1.15470\ldots)^{n(1+o(1))} \leqslant \tau(n) \leqslant (1.32042\ldots)^{n(1+o(1))}$$

Сопоставим теперь двоичному линейному коду C длины n решетку $\mathbb{L}_C$ в $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{L}_C = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n : (x_1 \bmod 2, \ldots, x_n \bmod 2) \in C\}.$$

Расстояние этой решетки равно $\min\{2, \sqrt{d}\}$, где $d = d_H(C)$ — это расстояние кода C. В случае $d = 4$ соседи нулевого вектора в этой решетке это векторы, у которых все координаты равны 0, кроме одной, равной ± 2, и векторы, полученные из векторов кода C веса 4, в которых «двоичные» 1 заменены на ± 1. Итого имеем $2n + 2^d A_d$ соседей, где A_d — это число слов минимального веса в коде C. Наконец, возьмем в качестве C описанный выше $(8, 4)$ код Хэмминга с $d = 4$ и $A_d = 14$. Получаемая решетка известна как решетка E_8 и число соседей у нее равно $2 \times 8 + 2^4 \times 14 = 240$, что и хотелось получить!

Для построения решетки Лича нам понадобится 1-удлиненный код Голея (обозначается $\mathbb{G}_{24}$). Это двоичный линейный код длины 24 с расстоянием 8, состоящий из 2^{12} слов (среди них есть и вектор $\mathbf{1}$), из которых 759 слов веса 8. Эти слова веса 8 образуют замечательную комбинаторную конфигурацию, называемую системой Штейнера $S(5, 8, 24)$. А именно, для любых 5-и позиций из 24-х найдется и ровно одно кодовое слово веса 8, имеющее единицы на этих позициях (заметим, что слова минимального веса в $(8, 4)$-коде Хэмминга, образуют $S(3, 4, 8)$). Решетку $\mathbb{L}_{\mathbb{G}_{24}}$ в $\mathbb{R}^{24}$, построенную на коде $\mathbb{G}_{24}$, разобьем на две подрешетки $\mathbb{L}^0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{L}_{\mathbb{G}_{24}} : x_1 + \ldots + x_n = 0 \mod 4\}$ и $\mathbb{L}^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{L}_{\mathbb{G}_{24}} : x_1 + \ldots + x_n = 2 \mod 4\}$. Тогда решетка Лича $\Lambda_{24} = 2\mathbb{L}^0 \cup \{\mathbf{1} + 2\mathbb{L}^1\}$.

К сожалению, ни одно из многочисленных описаний кода Голея и решетки Лича не позволяет просто, т. е. в рамках данной статьи, получить их основные свойства, в том числе, подсчитать соответствующее контактное число, равное 196560. Поэтому мы отсылаем заинтересовавшегося читателя к книге [5].

3. Рецепт

В этой части, мы покажем как работает метод Дельсарта в наиболее общем случае.

Нам понадобятся *положительно определенные функции.*

Определение. Пусть $\mathcal{M}$ — метрическое пространство с функцией расстояния $\tau(x, y)$. Функция $g(\tau)$ (определенная на множестве всех расстояний $\mathcal{M}$), называется *положительно определенной* на $\mathcal{M}$, если для любого набора точек x_1, x_2, …, x_N и любых чисел u_1, u_2, …, u_N выполнено:

$$\sum_{i,j=1}^{N} g(\tau(x_i, x_j))u_i u_j \geqslant 0. \tag{3}$$

Иногда удобно рассматривать «непрерывный» вариант этого определения. То есть, потребовать, чтобы для любой непрерывной функции $u(x)$ и меры μ на $\mathcal{M}$

$$\iint g(\tau(x, y))u(x)u(y)\, d\mu_x d\mu_y \geqslant 0.$$

Легко видеть, что если $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — положительно определенные функции, то $c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t)$ — положительно определенная функция для любых $c_1, c_2 \geqslant 0$. Из леммы Шура ([9, задача 7.35]) следует, что и произведение двух положительно определенных функций также положительно определенная функция. Но нам это не понадобится в дальнейшем.

Пример 1. Если в качестве метрического пространства взять единичную окружность $\mathcal{S}^1$ с угловым расстоянием, то примерами положительно определенной функции могут служить функции $\cos kt$, где $k \in \mathbb{N}$. В разделе 5 мы дадим ясное объяснение этому факту. Оказывается, что любая положительно определенная функция на окружности является линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами этих функций, а также функции, тождественно равной единице на всей окружности.

Теперь перейдем к самому трюку. Пусть нам удалось найти такие положительно определенную функцию $g(t)$ на пространстве $\mathcal{M}$ и число $c > 0$, что для функции $f(t) = g(t) + c$, выполнено следующее

$$f(0) = 1,$$
$$f(t) \leqslant 0, \text{ при всех } t \geqslant d.$$

Рассмотрим набор точек x_i, $i = 1, \dots, N$ в $\mathcal{M}$ таких, что расстояния между любыми двумя точками не меньше d. Давайте оценим сверху максимально возможное количество точек N. Для этого оценим сумму $\sum_{i,j=1}^{N} f(\tau(x_i, x_j))$ двумя способами.

С одной стороны

$$\sum_{i,j=1}^{N} f(\tau(x_i, x_j)) = \sum_{i,j=1}^{N} g(\tau(x_i, x_j)) + cN^2 \geqslant cN^2, \tag{4}$$

поскольку функция $g(t)$ положительно определена.

С другой стороны

$$\sum_{i,j=1}^{N} f(\tau(x_i, x_j)) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} f(\tau(x_i, x_j)) + \sum_{i=1}^{N} f(0) \leqslant N, \tag{5}$$

поскольку расстояние между любыми двумя точками x_i и x_j больше d, а значит $f(\tau(x_i, x_j)) \leqslant 0$.

Объединяя эти два неравенства, мы получаем, что $N \leqslant c^{-1}$. Таким образом, нам удалось оценить возможное количество точек в $\mathcal{M}$ на расстоянии d друг от друга. Несмотря на то, что данный план выглядит чересчур абстрактным, он действительно работает, что мы и продемонстрируем в последующих разделах.

4. Многочлены Гегенбауэра

И. Шонберг в [18] нашел все положительно определенные функции на сфере. Оказывается, что любая п. о. ф. является линейной комбинаций с неотрицательными коэффициентами многочленов Гегенбауэра (от косинусов углов между точками). Многочлены Гегенбауэра можно определить разными способами. Например, рекуррентно

$$\begin{gathered} G_0^{(n)}(x) = 1, \quad G_1^{(n)}(x) = x, \quad G_2^{(n)}(x) = \frac{nx^2 - 1}{n - 1}, \quad \dots, \\ G_k^{(n)}(x) = \frac{(2k + n - 4)\, x\, G_{k-1}^{(n)}(x) - (k - 1)\, G_{k-2}^{(n)}(x)}{k + n - 3}\,. \end{gathered} \tag{6}$$

Данные формулы выглядят достаточно непонятными. Геометрический смысл многочленов Гегенбауэра мы объясним в разделе 5. Отметим лишь, что верхний индекс обозначает размерность, которой соответствует данный многочлен. В частности, $G_k^{(2)}(\cos t) = \cos kt$. Так, утверждение из примера 1 обобщается следующим образом.

Теорема 1 (Шонберг И. Я. [18]). *Функции имеющие вид*

$$g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i G_i^{(n)}(\cos t), \quad a_i \geqslant 0,$$

являются положительно определенными функциями на сфере.

Обратное тоже верно, любая положительно определенная функция на сфере представляется в таком виде.

К сожалению, все доказательства данной теоремы либо слишком длинны, для того чтобы приводить их здесь полностью, либо используют дополнительные идеи и понятия, которые тоже выходят за пределы освещаемой в статье темы. Хотя в следующем разделе мы попытаемся несколько осветить происходящее с точки зрения гармонического анализа.

Сейчас же приведем здесь доказательство первой (нужной нам) части теоремы 1, использующее так называемую *теорему о сложении.* Доказательство этой теоремы достаточно длинно, но поскольку в дальнейшем нам понадобится положительная определенность не всех многочленов Гегенбауэра, а только некоторых из них, то корректность соответствующих формул можно (теоретически) проверить вручную или на компьютере (практически). Почти все современные математические пакеты, предоставляющие возможность работать с символьными выражениями (MATLAB, Mathematica, Maxima), имеют встроенные библиотеки позволяющие манипулировать стандартными многочленами, в частности с многочленами Гегенбауэра. Итак, сформулируем теорему о сложении.

Теорема 2 (теорема о сложении).

$$G_k^{(n)}(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\varphi) =$$
$$= \sum_{s=0}^{k} m_{n,k,s}\, G_{k-s}^{(n+2s)}(\cos\theta_1)\, G_{k-s}^{(n+2s)}(\cos\theta_2)\,(\sin\theta_1)^s\,(\sin\theta_2)^s\, G_s^{(n-1)}(\cos\varphi), \tag{7}$$

где $m_{n,k,s}$ — некоторые положительные коэффициенты.

Доказательство первой части теоремы 1. Доказательство будем проводить индукцией по размерности многочленов Гегенбауэра. Как мы уже упоминали в начале этого раздела, $G_k^{(2)}(\cos t) = \cos kt$, что есть положительно определенная функция. Поэтому базу индукции можно считать доказанной.

Пусть точки x_i, $i = 1, \ldots, N$, располагаются на сфере $\mathcal{S}^n$, а z — это отмеченная точка на этой сфере, которую мы будем называть *северным полюсом.* Обозначим через θ_i величину большой дуги, соединяющей x_i и z (то есть расстояние между этими двумя точками). Если φ_{ij} — угол при вершине z в сферическом треугольнике zx_ix_j, а x_{ij} — величина дуги x_ix_j, то сферическая теорема косинусов говорит нам следующее:

$$\cos x_{ij} = \cos\theta_i \cos\theta_j + \sin\theta_i \sin\theta_j \cos\varphi_{ij}. \tag{8}$$

Объединим выражения (7) и (8) и получим:

$$\begin{aligned} &G_k^{(n)}(\cos x_{ij}) u_i u_j = G_k^{(n)}(\cos\theta_i\cos\theta_j + \sin\theta_i\sin\theta_j\cos\varphi_{ij}) u_i u_j = \\ &= \sum_{s=0}^{k} m_{n,k,s}\, G_{k-s}^{(n+2s)}(\cos\theta_i)\, G_{k-s}^{(n+2s)}(\cos\theta_j)\, (\sin\theta_i)^s\, (\sin\theta_j)^s\, u_i u_j \cdot \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot G_s^{(n-1)}(\cos\varphi_{ij}) = \\ &= \sum_{s=0}^{k} m_{n,k,s}\, w_i^{(s)} w_j^{(s)} G_s^{(n-1)}(\cos\varphi_{ij}), \end{aligned}$$

где $w_i^{(s)} = u_i G_{k-s}^{(n+2s)}(\cos\theta_i)\,(\sin\theta_i)^s$. Теперь просуммируем данное выражение по всем парам точек

$$\sum_{i,j=0}^{N} G_k^{(n)}(\cos x_{ij}) u_i u_j = \sum_{s=0}^{k} m_{n,k,s} \sum_{i,j=0}^{N} w_i^{(s)} w_j^{(s)} G_s^{(n-1)}(\cos\varphi_{ij}). \tag{9}$$

Отметим, что φ_{ij} можно интерпретировать как расстояние между проекциями точек x_i и x_j на экватор, соответствующий точке z. Поэтому, в силу положительной определенности многочленов Гегенбауэра размерности $n-1$,

$$\sum_{i,j=0}^{N} w_i^{(s)} w_j^{(s)} G_s^{(n-1)}(\cos\varphi_{ij}) \geqslant 0.$$

Пользуясь этим и тем, что коэффициенты $m_{m,k,s} > 0$, получаем из (9)

$$\sum_{i,j=0}^{N} G_k^{(n)}(\cos x_{ij}) u_i u_j = \sum_{s=0}^{k} m_{n,k,s} \sum_{i,j=0}^{N} w_i^{(s)} w_j^{(s)} G_s^{(n-1)}(\cos\varphi_{ij}) \geqslant 0.$$

5. Сферические функции

В этой части мы попытаемся коротко объяснить «природу» многочленов Гегенбауэра. Все утверждения этого раздела мы оставим без доказательств. Заинтересовавшийся читатель, не знакомый с этой областью, может обратиться к [2, 10] или другим книгам за более подробными объяснениями.

Физикам хорошо известны *гармонические функции*, то есть функции, оператор Лапласа от которых тождественно равен нулю. Нас будут интересовать однородные гармонические многочлены $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Размерность пространства однородных гармонических многочленов степени k от n переменных равна $c_{k,n} = \binom{n+k-2}{k} + \binom{n+k-3}{k-1}$.

Рассмотрим гильбертово пространство измеримых функций $L^2(\mathcal{S}^{n-1})$ со стандартных скалярным произведением:

$$\langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)\,d\omega_x.$$

Оказывается, любые два однородных гармонических многочлена разной степени ортогональны. Однородные многочлены одинаковой степени, конечно, ортогональными быть не обязаны.

Выберем ортонормированный базис $S_{k,l}$, $l = 1, \ldots, c_{k,n}$, в пространстве гармонических многочленов степени k. Можно показать, что объединение этих базисов по всем k будет полным базисом в $L^2(\mathcal{S}^{n-1})$. Именно на этом основано доказательство второй части теоремы 1.

Рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{c_{k,n}}$, определенное следующим образом:

$$\varphi_k^{(n)}(x) = (S_{k,1}(x), S_{k,2}(x), \ldots, S_{k,c_{k,n}}(x)).$$

Отображение φ переводит единичную сферу в $\mathcal{S}^{n-1}$ в некоторое множество, лежащее на сфере (не единичной) в пространстве $\mathbb{R}^{c_{k,n}}$.

Ключевым свойством данного отображения является то, что расстояние между образами любых двух точек $x, y \in \mathcal{S}^{n-1}$ зависит только от самого расстояния между ними. Таким образом, мы можем выразить скалярное произведение от векторов из образа $\varphi_k^{(n)}(x)(\mathcal{S}^{n-1})$ через скалярное произведение в самом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Многочлены Гегенбауэра — это и есть (нормированное) скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^{c_{k,n}}$:

$$G_k^n(\langle x, y\rangle) = \frac{\operatorname{area}(\mathcal{S}^{n-1})}{c_{k,n}} \sum_{l=1}^{c_{k,n}} S_{k,l}(x)S_{k,l}(y).$$

Из последней формулы положительная определенность функций $G_k^n(\cos t)$ следует автоматически. Действительно, значение суммы из левой части неравенства (3) будет равно квадрату длины вектора $\sum x_i\varphi(x_i)$, умноженной на соответствующий нормирующий коэффициент.

Пример 2 (продолжение примера 1). Однородные гармонические многочлены от двух переменных степени k являются линейной комбинацией двух следующих многочленов

$$S_{k,1}(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^k,$$
$$S_{k,2}(x, y) = \operatorname{Im}(x + iy)^k.$$

Таким образом, отображение $\varphi_k^{(2)}(x)$ переводит точку из $\mathcal{S}^1$ с координатами $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ в точку с координатами $(\cos k\alpha, \sin k\alpha)$. Поэтому, для любых двух точек $x, y \in \mathcal{S}^1$, величина дуги между которыми равна γ, мы получаем

$$\left\langle \varphi_k^{(2)}(x), \varphi_k^{(2)}(y) \right\rangle = \cos k\gamma.$$

Получаем ровно то, что и обещали, $G_k^{(2)}(\cos x) = \cos kx$.

6. От теории к практике

В этом разделе мы покажем как работает метод Дельсарта на конкретных примерах. Мы докажем, что $\tau(8) = 240$ и $\tau(24) = 196560$. Кроме того, покажем, что среди $2n+1$ векторов в $\mathbb{R}^n$ найдутся два, угол между которыми острый.

Для начала сформулируем результат раздела 3 (соотношения (4) и (5)) в виде следующей леммы (где $x = \cos t$).

Лемма 3 (ключевая лемма). *Пусть,*

$$f(x) = c_0 + c_1 G_1^n(x) + \dots + c_k G_k^n(x),$$

где $c_0 > 0$ и $c_i \geqslant 0$, при $i \geqslant 1$. Если $f(1) = 1$ и $f(x) \leqslant 0$ при $x < \cos\varphi$, то на единичной сфере $\mathcal{S}^{n-1}$ нельзя расположить более чем c_0^{-1} точек, расстояния между которыми не меньше φ.

Начнем с последней задачи, обозначенной в начале этого раздела. Сопоставим каждому вектору точку на единичной сфере, соответствующую направлению этого вектора. Рассмотрим многочлен $P(x) = \frac{1}{2}(x^2+x)$. Данный многочлен неположительный на отрезке $[-1, 0]$ и обнуляется только в точках $x = 0$ и $x = -1$. Если его представить как сумму многочленов Гегенбауэра $G_k^{(n)}(x)$ (см. формулы (6)), получим:

$$P(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}G_1^{(1)}(x) + \frac{n-1}{2n}G_2^{(n)}(x),$$

$c_0 = \dfrac{1}{2n}$. Таким образом, на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$ нельзя расположить более $2n$ точек с попарными расстояниями не меньшими чем 90°. Кроме того, если посмотреть внимательнее на рассуждения в разделе 3, то можно заключить, что $2n$ точек могут располагаться на сфере тогда и только тогда, когда косинус расстояния между ними равен либо 0, либо -1. Поэтому эти точки суть вершины правильного октаэдра[1)].

На самом деле, данная задача несложно решается и обычными геометрическими соображениями. Более того, если в пространстве $\mathbb{R}^n$ выбрано

[1)] В больших размерностях это тело называют кроссполитопом.

k векторов, где $n+2 \leqslant k \leqslant 2n$, то угол между какими-то двумя всегда будет не больше чем $90°$. Причем конфигурации, когда между ними нет острых углов, несложно классифицировать, см. [14]. (Подумайте над тем, как расположить пять точек на двумерной сфере «оптимальным» образом).

Для других же двух задач геометрическое доказательство неизвестно, но они запросто решаются с помощью леммы 3.

Итак, если рассмотреть (предположительное) оптимальное расположение точек на семимерной сфере, то можно заметить, что расстояния между ними принимают следующие значения $\{60°, 90°, 120°, 180°\}$. Косинусы соответствующих углов равны $1/2$, 0, $-1/2$, -1. Поэтому многочлен для леммы 3 разумно выбрать таким, чтобы он обнулялся в этих значениях и только в них:

$$f(x) = \frac{4}{9}(x - \frac{1}{2})x^2(x + \frac{1}{2})^2(x + 1).$$

Если разложить данный многочлен по многочленам Гегенбауэра, мы получим:

$$f(x) = \frac{1}{240} + \frac{1}{30}G_1^8(x) + \frac{5}{48}G_2^8(x) + \frac{13}{60}G_3^8(x) + \frac{133}{480}G_4^8(x) + \frac{1}{4}G_5^8(x) + \frac{11}{96}G_6^8(x).$$

Таким образом, $f(x)$ удовлетворяет всем требованиям леммы 3: коэффициенты при разложении многочлена по многочленам Гегенбауэра положительные, а $f(1) = 1$. Получаем, что количество точек на сфере с попарными расстояниями не меньшими чем $60°$, не превосходит $c_0^{-1} = 240$. Более того, если уж 240 точек как-то расположились, то набор расстояний между ними обязан принимать одно из следующих значений $\{60°,\ 90°,\ 120°,\ 180°\}$. Благодаря этому можно показать, что такое расположение 240 точек единственно с точностью до вращения.

Для $\tau(24)$ аналогичный многочлен будет следующим

$$f(x) = \frac{128}{405}(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{4})^2x^2(x + \frac{1}{4})^2(x + \frac{1}{2})^2(x + 1).$$

Вот его разложение по многочленам Гегенбауэра:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{196560} + \frac{1}{8190}G_1^{24}(x) + \frac{1219}{1028160}G_2^{24}(x) + \\ + \frac{11569}{1909440}G_3^{24}(x) + \frac{249205}{10692864}G_4^{24}(x) + \frac{3289}{51408}G_5^{24}(x) + \\ + \frac{376487}{2757888}G_6^{24}(x) + \frac{4439}{20672}G_7^{24}(x) + \frac{23345}{88128}G_8^{24}(x) + \\ + \frac{3335}{15504}G_9^{24}(x) + \frac{20677}{279072}G_{10}^{24}(x). \end{aligned}$$

Как видим, все коэффициенты положительны, $f(1) = 1$, а $c_0^{-1} = 196560$.

7. Проблема 13 шаров

По всей видимости, с помощью метода Дельсарта можно решить проблему контактных чисел только в размерностях $n = 2, 8, 24$. Используя компьютер, Д. Штром [11] проверил этот метод для $\tau(n)$ аж до размерности 161, и нигде не обнаружил таких замечательных равенств, как при $n = 2, 8, 24$.

В этом параграфе мы вкратце остановимся на геометрическом обобщении метода Дельсарта, которое позволяет решить проблемы 13 и 25 шаров, т. е. доказать, что $\tau(3) = 12$ и $\tau(4) = 24$. Доказательства обоих равенств очень похожи, однако технически случай $n = 4$ намного сложнее случая $n = 3$. Поэтому здесь мы разберем только план доказательства случая $n = 3$, опуская технические детали. Подробные доказательства для $n = 3$ и $n = 4$ можно найти в работах [15] и [16] соответственно.

При $n = 3$ многочлены Гегенбауэра $G_k^{(3)}$ являются *многочленами Лежандра* P_k, т. е. $P_k = G_k^{(3)}$. Эти многочлены можно определить как рекуррентно (см. (6)), так и по формуле Родригеса:

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k\, k!}\,\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k.$$

Рассмотрим следующий многочлен:

$$f(t) = \frac{2431}{80}t^9 - \frac{1287}{20}t^7 + \frac{18333}{400}t^5 + \frac{343}{40}t^4 - \frac{83}{10}t^3 - \frac{213}{100}t^2 + \frac{t}{10} - \frac{1}{200}\,.$$

Лемма 4. *Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \subset \mathcal{S}^2$. Тогда*

$$S(X) := \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} f(\cos(\varphi_{i,j})) \geqslant N^2.$$

Здесь $\varphi_{i,j} = \operatorname{dist}(x_i, x_j)$ обозначает сферическое (угловое) расстояние между x_i и x_j.

Доказательство. Разложим f по P_k:

$$f = \sum_{k=0}^{9} c_k P_k = P_0 + \frac{8}{5}P_1 + \frac{87}{25}P_2 + \frac{33}{20}P_3 + \frac{49}{25}P_4 + \frac{1}{10}P_5 + \frac{8}{25}P_9.$$

Здесь $c_0 = 1$, $c_k \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, 9$. По соотношению (4) получаем

$$S(X) = \sum_{k=0}^{9} c_k \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} P_k(\cos(\varphi_{i,j})) \geqslant \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_0 P_0 = N^2.$$

Лемма 5. *Пусть* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ *— точки на* $\mathcal{S}^2$, *угловое расстояние* $\varphi_{i,j}$ *между различными* x_i, x_j *не меньше* $60°$. *Тогда*

$$S(X) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} f(\cos(\varphi_{i,j})) < 13N.$$

Сначала покажем как доказывать главную теорему.

Теорема 6. $\tau(3) = 12$.

Доказательство. Предположим, что $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ — такое расположение точек на $\mathcal{S}^2$, при котором $N = \tau(3)$. Тогда X удовлетворяет предположениям в леммах. Стало быть, $N^2 \leqslant S(X) < 13N$. Отсюда $N < 13$, т. е. $N \leqslant 12$. С другой стороны, мы знаем, что $\tau(3) \geqslant 12$, т. е. $N = \tau(3) = 12$.

План доказательства леммы 5. **1.** Многочлен $f(t)$ для $t_0 \approx 0.5907$ удовлетворяет следующим свойствам (см. рис. 2):
(i) $f(t)$ — монотонно убывающая функция на отрезке $[-1, -t_0]$.
(ii) $f(t) < 0$ при $t \in (-t_0, 1/2]$ и $f(-t_0) = 0$.

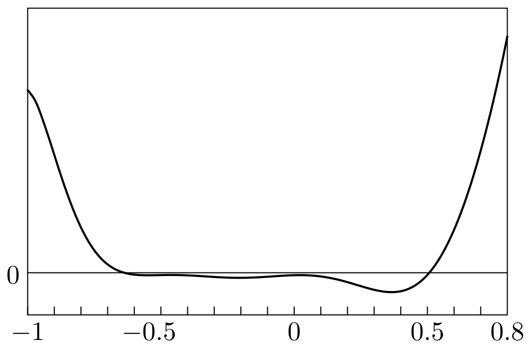

Рис. 2. График функции $f(t)$

Пусть $S_i(X) := \sum\limits_{j=1}^{N} f(\cos(\varphi_{i,j}))$, тогда $S(X) = \sum\limits_{i=1}^{N} S_i(X)$. Покажем, что $S_i(X) < 13$ при $i = 1, 2, \ldots, N$, отсюда будет следовать, что $S(X) < 13N$.

Поскольку $\varphi_{i,i} = 0$, то $f(\cos\varphi_{i,i}) = f(1)$. По условию $\varphi_{i,j} \geqslant 60°$, $i \neq j$, и получаем, что $\cos\varphi_{i,j} \leqslant 1/2$ и $\cos\varphi_{i,j}$ лежит на отрезке $[-1, 1/2]$. Из (ii) следует, что $f(\cos\varphi_{i,j}) \leqslant 0$ при $\cos\varphi_{i,j} \in [-t_0, 1/2]$. Обозначим $J(i) := \{j : \cos\varphi_{i,j} \in [-1, -t_0)\}$. Мы получили неравенство

$$S_i(X) \leqslant T_i(X) := f(1) + \sum_{j \in J(i)} f(\cos\varphi_{i,j}).$$

Пусть $\theta_0 = \arccos t_0 \approx 53.794°$. Тогда $j \in J(i)$, если и только если $\varphi_{i,j} > 180° - \theta_0$, т. е. $\theta_j < \theta_0$, где $\theta_j = 180° - \varphi_{i,j}$. Другими словами, все $x_{i,j}$, $j \in J(i)$, лежат внутри сферической шапочки с центром e_0 радиуса θ_0, где $e_0 = -x_i$ является антиподом точки x_i.

2. Рассмотрим теперь на $\mathcal{S}^2$ такие точки $e_0, y_1, \ldots, y_m$, что

$$\varphi_{i,j} := \mathrm{dist}(y_i, y_j) \geqslant 60°, \quad \forall i \neq j, \quad \theta_i := \mathrm{dist}(e_0, y_i) < \theta_0. \tag{10}$$

Обозначим через μ наибольшую величину m такую, что неравенства в (10) определяют непустое множество точек y_1, ..., y_m.

Предположим, что $0 \leqslant m \leqslant \mu$ и $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ удовлетворяют (10). Введем обозначения:

$$H(Y) = H(y_1, \ldots, y_m) := f(1) + f(-\cos\theta_1) + \ldots + f(-\cos\theta_m),$$

$$h_m := \sup_{Y:|Y|=m} \{H(Y)\}, \quad h_{max} := \max\{h_0, h_1, \ldots, h_\mu\}.$$

По определению, $T_i(X) \leqslant h_m$, где $m = |J(i)|$, и, следовательно, $S_i(X) \leqslant h_m$. Таким образом, если мы докажем неравенство $h_{max} < 13$, то мы докажем и лемму.

3. Теперь покажем, что $\mu \leqslant 4$.

Предположим, что $Y = \{y_1, \ldots, y_m\} \subset \mathcal{S}^2$ удовлетворяет (10). Можно считать, что e_0 — северный полюс на сфере и у y_j сферические координаты (θ_j, φ_j). Заметим, что $\theta_i > 0$ при $m \geqslant 2$. В противном случае расстояние от y_j до всех точек шапочки будет меньше $60°$, а значит в ней не могут находится точки из $J(j)$. Тогда, используя методы элементарной сферической геометрии (сферическую теорему косинусов или неравенство «напротив большего угла лежит большая сторона треугольника»), можно показать, что расстояние между точками с координатами (θ_j, φ_j) и (θ_k, φ_k) будет не больше расстояния между точками (θ_0, φ_j) и (θ_0, φ_k). Поэтому без ограничения общности можно считать, что все точки y_j лежат на «краю шапочки», то есть окружности с центром e_0 и радиусом θ_0.

Но на такой окружности можно расположить не более четырех точек с попарным расстоянием не меньшим $60°$. Мы пропустим требуемые в этом месте вычисления, впрочем, любой может провести их самостоятельно.

4. Итак, мы должны доказать неравенство

$$h_{max} = \max\{h_0, h_1, h_2, h_3, h_4\} < 13.$$

Несложно видеть, что

$$h_0 = f(1) = 10.11 < 13.$$

Из (i) вытекает что $f(-\cos\theta)$ является монотонно убывающей функцией от $\theta \in [0, \theta_0]$. Тогда при $m = 1$ функция $H(\theta_1) = f(1) + f(-\cos\theta_1)$ достигает максимума при $\theta_1 = 0$. Отсюда

$$h_1 = f(1) + f(-1) = 12.88 < 13.$$

5. Пусть $m = 2$, 3, 4. Рассмотрим оптимальные расположения точек $\{e_0, y_1, \ldots, y_m\}$ на $\mathcal{S}^2$, которые задают равенства $H(Y) = h_m$.

Заметим, что y_k не могут быть сдвинуты по направлению к e_0, так как иначе $H(Y)$ увеличится. Используя это наблюдение и еще некоторые несложные геометрические рассуждения, можно показать, что:
при $m = 2$, $e_0 \in y_1y_2$ и $\mathrm{dist}(y_1, y_2) = 60°$,
при $m = 3$, треугольник $\Delta_3 := y_1y_2y_3$ — равносторонний с длиной стороны $60°$ (как и выше, $e_0 \in \Delta_3$),
при $m = 4$, $\Delta_4 := y_1y_2y_3y_4$ — ромб со стороной $60°$ и $e_0 \in \Delta_4$.

6. Пункт **5** показывает, что для нахождения h_m, $m = 2, 3, 4$, мы должны найти максимум функции $H(Y)$ на отрезке $[0, 60°]$ $(m = 2)$, равностороннем треугольнике Δ_3 $(m = 3)$ и ромбе Δ_4 $(m = 4)$. Для этого можно использовать стандартные численные методы. Вычисления показывают, что $h_2 \approx 12.8749$, $h_3 \approx 12.8721$, $h_4 \approx 12.4849$, т. е. во всех трех случаях $h_m < h_1 = 12.88 < 13$. В статье [15] эти вычисления были упрощены и, в худшем случае, сводятся к вычислению максимумов функций от одной переменной. Итак, $h_m < 13$ для всех m, как и требовалось.

Список литературы

[1] Н. Н. Андреев, В. А. Юдин. *Экстремальные расположения точек на сфере* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 1. 1997. С. 115–125.

[2] Н. Я. Виленкин. *Специальные функции и теория представлений групп*. М.: Наука, 1965.

[3] Ф. Дельсарт. *Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования*. М.: Мир, 1976.

[4] Г. А. Кабатянский, В. И. Левенштейн. *О границах для упаковок на сфере и в пространстве* // Проблемы передачи информации. Т. 14, вып. 1. 1978. С. 3–25.

[5] Д. Конвей, Н. Д. А. Слоэн. *Упаковки шаров, решетки и группы*. М.: Мир, 1990.

[6] В. И. Левенштейн. *О границах для упаковок в n-мерном евклидовом пространстве* // Докл. АН СССР. Т. 245. 1979. С. 1299–1303.

[7] Х. Маехара. *Проблема тринадцати шаров (элементарный подход)* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 15. 2011. С. 76–88.

[8] Ф. Д. Мак-Вильямс, Н. Д. А. Слоэн. *Теория кодов, исправляющих ошибки*. М.: Связь, 1979.

[9] Г. Полиа, Г. Сеге. *Задачи и теоремы из анализа*. Часть II. М.: Наука, 1978.

[10] Г. Сеге. *Ортогональные многочлены*. М.: ГИФМЛ, 1962.

[11] Д. В. Штром. *Метод Дельсарта в задаче об антиподальных контактных числах в евклидовых пространствах больших размерностей* // Известия Уральского государственного университета. Т. 30, вып. 6. 2004. С. 154–182.

[12] В. А. Юдин. *Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов* // Дискретная математика. Т. 4, вып. 2. 1992. С. 115–121.

[13] R. W. Hamming. *Error detecting and error correcting codes* // Bell System Technical Journal. Vol. 29, no 2. 1950. P. 147–160.

[14] W. Kuperberg. *Optimal arrangements in packing congruent balls in a spherical container* // Discrete & Computational Geometry. Vol. 37, no 2. 2007. P. 205–212.

[15] O. R. Musin. *The kissing problem in three dimensions* // Discrete & Computational Geometry. Vol. 35, no 3. 2006. P. 375–384.

[16] O. R. Musin. *The kissing number in four dimensions* // Annals of Mathematics. Vol. 168, no 1. 2008. P. 1–32.

[17] A. M. Odlyzko, N. J. A. Sloane. *New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions* // Journal of Combinatorial Theory. Ser. A. Vol. 26, no 2. 1979. P. 210–214.

[18] I. J. Schoenberg. *Positive definite functions on spheres* // Duke Mathematical Journal. Vol. 9, no 1. 1942. P. 96–108.

[19] K. Schütte, B. L. Van der Waerden. *Das problem der dreizehn kugeln* // Mathematische Annalen. Bd. 125, Nu 1. 1952. S. 325–334.

А. В. Акопян, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН и Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Г. А. Кабатянский, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН и Московский физико-технический институт (государственный университет)
О. Р. Мусин, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН и Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова