Ультраметрики, деревья, потоки и узкие места

М. Н. Вялый В. А. Гурвич

Между конечными ультраметрическими пространствами, остовами минимального веса на графах, а также потоками и узкими местами в сетях имеются интересные связи, на которых мы и сосредоточимся в этой статье.

Мы начнем с канонического комбинаторного представления конечной ультраметрики (УМ). Вопрос о таком представлении задавал в 90е годы прошлого столетия И. М. Гельфанд. Один из возможных ответов на этот вопрос дается в работах А. Ю. Лемина (см., например, [14]). Мы приводим удобную форму представления УМ монотонными корневыми деревьями. Из этого представления мгновенно следует, например, что УМ на n точках принимает не более $n-1$ различных значений.

Еще раньше конечные УМ возникли при анализе узких мест (bottlenecks) и потоков в сетях. В знаменитой статье Р. Гомори и Т. Ху [9] доказано, что любая конечная УМ может быть реализована решением потоковой задачи, а Б. Леклерк [13] доказал аналогичное утверждение для задач на узкие места (точные определения см. в разделе 2). Мы опишем эти представления и укажем связь теорем Гомори – Ху и Леклерка с ультраметрическими пространствами сопротивлений (раздел 3).

И задачи на узкие места, и потоковые задачи естественно формулируются для ориентированных графов (когда пропускные способности не симметричны). Вообще, отказ от симметрии — естественное обобщение понятия метрики. Вспомните об одностороннем движении или о том, что объекты могут располагаться на разной высоте. В несимметричном случае возникают *квазиультраметрики* (КУМ). На них мы кратко остановимся в разделе 4, оставляя доказательства читателю в качестве упражнений (иногда непростых).

Объединяет указанные выше две группы задач то, что они совпадают при ограничении на остовные деревья. Поэтому в последнем разделе мы коснемся жадных алгоритмов построения остовных деревьев и приведем общее описание стратегий в таких алгоритмах.

Собственно алгоритмические вопросы не затрагиваются в этой заметке. Читатель может обратиться к имеющимся учебникам, например, [6].

Мы также пропускаем утомительное введение основных понятий теории графов в надежде, что они знакомы читателю. В качестве хорошего учебника по теории графов укажем [5].

1. Каноническое представление УМ на конечном множестве

Напомним определения метрики и ультраметрики.

Метрикой на множестве V называется функция $d\colon V \times V \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющая следующим свойствам:

(i) $d(u,w) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = w$;

(ii) $d(u,w) = d(w,u)$ для всех $u, w \in V$;

(iii) $d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$ для всех $u, v, w \in V$.

Ультраметрика (УМ) удовлетворяет свойствам (i), (ii), а свойство (iii) (неравенство треугольника) заменяется на более сильное

(iii′) $d(u,w) \leqslant \max(d(u,v), d(v,w))$ для всех $u, v, w \in V$.

Нетрудно проверить, что если неравенство в (iii′) строгое, то $d(u,v) = d(v,w)$; иначе говоря, в любом треугольнике две самые длинные стороны имеют одинаковую длину. По этой причине УМ иногда называют равнобедренными метриками.

Нас будет интересовать случай УМ на конечном множестве. Оказывается, что все такие УМ описываются следующей конструкцией.

Рассмотрим корневое дерево с множеством вершин T, множеством листьев $V \subseteq T$ и корнем $v_0 \in N = T \setminus V$. Вершины из множества N (т. е. не листья), будем называть *внутренними*. Для каждой вершины $v \in T$ однозначно определен путь $p(v)$ из корня v_0 в вершину v. Вершина u называется потомком вершины v, если $p(v)$ является частью $p(u)$ (а вершина v называется предком u). Для пары вершин u, v определим $a(u,v)$ как самого младшего общего предка u и v. Другими словами, $a(u,v)$ — последняя общая вершина путей $p(u)$, $p(v)$.

Каждой внутренней вершине $v \in N = T\setminus V$ поставим в соответствие положительное действительное число и потребуем, чтобы полученная функция $d\colon N \to \mathbb{R}_+$ строго убывала на любом пути из корня. Тогда функция

$$d(u,v) = \begin{cases} d(a(u,v)), & \text{если } u \neq v; \\ 0, & \text{если } u = v. \end{cases} \tag{1}$$

задает УМ на множестве листьев V (см. пример на рис. 1).

Свойства (i) и (ii) выполняются по очевидным причинам. Далее, для любых трех листьев $u, v, w \in V$ хотя бы два из трех самых младших общих предков $u' = a(v,w)$, $v' = a(u,w)$, $w' = a(u,v)$ совпадают (см. рис. 1).

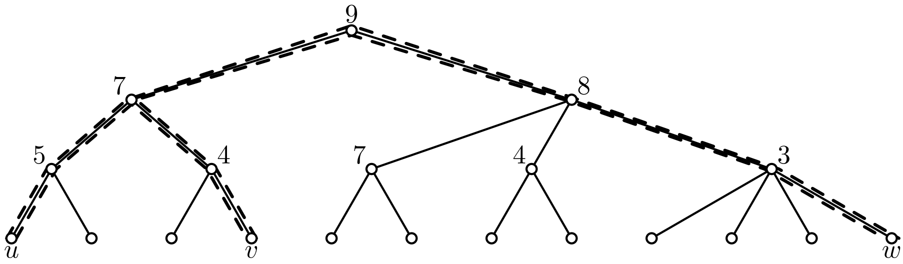

Рис. 1. $d(u,v) = 7$, $d(v,w) = 9$, $d(u,w) = 9$

Пусть это будут u' и v'. Тогда w' является потомком $u' = v'$ и поэтому $d(w') \leqslant d(u')$, откуда следует выполнение ультраметрического неравенства (iii$'$).

Заметим, что число $d(v)$ не играет никакой роли, если внутренняя вершина v имеет всего одного непосредственного потомка. Поэтому потребуем, чтобы их было не менее двух. Тогда представление (1) становится взаимно однозначным соответствием.

Теорема 1. *Любая УМ определяется формулой* (1). *Входящие в эту формулу дерево и функция на вершинах дерева единственны, с точностью до изоморфизма, если потребовать, чтобы у каждой внутренней вершины дерева было не менее двух непосредственных потомков.*

Будем называть такое представление *каноническим деревом* УМ.

Доказательство. Пусть $0 < d_1 < d_2 < \dots < d_k$ — множество всех расстояний УМ (V, d), упорядоченное по возрастанию.

Для $i \in [k] = \{1, \dots, k\}$ обозначим

$$D_i = \{d_1, \dots, d_i\}, \quad E_i = \{(x,y) \mid d(x,y) \in D_i\}, \quad G_i = (V, E_i).$$

Другими словами, G_i — это граф на множестве точек V, ребра которого отвечают парам точек, которые находятся на расстоянии не больше d_i.

Из ультраметрического неравенства следует, что граф G_i — *транзитивный*, т. е. из $(x,y) \in E_i$, $(y,z) \in E_i$ следует $(x,z) \in E_i$.

Легко понять, как устроены транзитивные графы. Нетрудно видеть, что любой связный транзитивный граф — это *клика*, т. е. каждые две его вершины соединены ребром. В общем случае транзитивный граф является объединением непересекающихся клик.

Проведем индукцию по числу k различных расстояний. Граф G_k является, очевидно, кликой на V. Таким образом, при $k = 1$ УМ представляется деревом глубины 1, корень которого отвечает G_k, а листья — точкам из V. Легко видеть, что такое представление единственно, так как любое дерево глубины > 1 порождает метрику с $k > 1$.

Предполагая утверждение доказанным для УМ с $k' < k$ различными расстояниями, докажем его для УМ с k различными расстояниями. При $k > 1$ граф G_{k-1} непуст и является объединением $m \geqslant 2$ непересекающихся клик $C_1, \ldots, C_m$. Иными словами, рёбра длины d_k образуют полный m-дольный граф с долями $C_1, \ldots, C_m$ и более нигде не встречаются. Ограничение УМ $d(\cdot, \cdot)$ на клику C_j порождает УМ с меньшим набором значений расстояний.

По предположению индукции для всех таких метрик (C_j, d_j) существует однозначное представление каноническим деревом. Тогда для метрики (V, d) каноническое дерево получается добавлением нового корня (отвечающего клике G_k), к которому присоединены деревья, отвечающие метрикам (C_j, d_j), $|C_j| \geqslant 2$, и листья, отвечающие одноточечным кликам C_j. $\square$

Следствие 1. *Пусть (V, d) — УМ на множестве из n точек, принимающая k различных значений. Обозначим через N_d количество внутренних вершин канонического дерева (нелистьев). Тогда*

$$k \leqslant N_d \leqslant n - 1. \tag{2}$$

Первое неравенство обращается в равенство, если числа, присвоенные всем внутренним вершинам канонического дерева, различны.

Второе неравенство обращается в равенство для бинарного дерева, в котором каждая внутренняя вершина имеет ровно двух потомков.

В частности, из неравенств (2) следует, что УМ принимает не слишком много значений, а именно, не более $n - 1$. В случае метрики общего вида это не так: все попарные расстояния могут быть различными.

2. Другие представления УМ

2.1. Остовное дерево и УМ узких мест

Рассмотрим дерево T с множеством вершин V. Ребрам дерева припишем положительные веса, т. е. зададим функцию $d\colon E \to \mathbb{R}_+$. Заметим, что любые две вершины u, w дерева соединены в нем единственным путем $p(u, w)$. Определим функцию на парах вершин

$$d_T(u, v) = \begin{cases} \max(d(e) \mid e \in p(u, w)), & \text{если } u \neq v; \\ 0, & \text{если } u = v. \end{cases} \tag{3}$$

Утверждение 1. *Функция (3) задает УМ.*

Доказательство. Для любых трех вершин u, v, w дерева найдется единственная вершина o, которая лежит на всех трех путях $p(u, v)$, $p(v, w)$, $p(w, u)$. Эти пути и пути $p(o, u)$, $p(o, v)$, $p(o, w)$ состоят из одних и тех же ребер, причем каждое ребро встречается дважды в первой тройке путей и один раз — во второй. Без ограничения общности считаем, что среди них ребро самого большого веса лежит на пути $p(o, v)$. Тогда из (3) получаем

$$d(u, v) = d(v, w) \geqslant d(u, w),$$

откуда следует ультраметрическое неравенство.

Остальные свойства метрики выполняются по очевидным причинам. □

Метрику вида (3) мы назовем УМ узких мест. Название нуждается в пояснении. Представим, что дерево задает систему коридоров, а веса ребер равны обратным ширинам. Тогда максимальная ширина предмета, который можно протащить из вершины u в вершину v, определяется самым узким коридором на пути $p(u, v)$ и потому равна $d(u, v)^{-1}$.

Верно и обратное: любая УМ может быть представлена как УМ узких мест. Этот факт (как и аналогичное утверждение из следующего подраздела) впервые появился в работе Гомори и Ху [9].

Рассмотрим УМ (V, d) и соответствующий ей полный взвешенный граф $G = (V, E)$, $d\colon E \to \mathbb{R}_+$, в котором вес ребра равен расстоянию между концами ребра.

Возьмем любое кратчайшее остовное дерево, т. е. дерево с множеством вершин V («остовное дерево»), вес которого не превосходит веса любого другого остовного дерева. Весом дерева считаем сумму весов его ребер.

Теорема 2. *Метрика d совпадает с метрикой узких мест d_T, порожденной кратчайшим остовным деревом T.*

Доказательство. Неравенство $d(u, v) \leqslant d_T(u, v)$ легко получается по индукции применением ультраметрического неравенства.

Неравенство $d(u, v) \geqslant d_T(u, v)$ сразу следует из того, что T имеет наименьший возможный вес среди остовных деревьев. □

Задачу на узкие места можно сформулировать не только для дерева, но и для произвольного графа. Мы приведем формулировку для случая полного графа.

Рассмотрим полный взвешенный граф $G = (V, E)$, $c\colon E \to \mathbb{R}_+$. Веса ребер указывают на «ширину» ребра. Шириной пути $p(u, v)$ между двумя вершинами назовем

$$c(p(u, v)) = \min(c(e) \mid e \in p(u, v))$$

ширину самого узкого ребра вдоль пути. Эта величина определяет максимальную ширину «объекта», который можно протащить вдоль пути. Поскольку путей между двумя вершинами много, то максимальная ширина объекта, который можно протащить из u в v равна максимуму ширины по путям из u в v:

$$C(u, v) = \max_{p(u,v)} c(p(u, v)). \tag{3$'$}$$

Утверждение 2. *Функция* $d_b(u,v) = C(u,v)^{-1}$ *при* $u \neq v$, $d_b(u,u) = 0$, *является УМ.*

Доказательство. Если объект можно протащить из u в v и из v в w, то его, конечно же, можно протащить из u в w. Значит, для ширины между двумя вершинами выполняется неравенство

$$C(u,w) \geqslant \min(C(u,v), C(v,w))$$

для всех $u, v, w \in V$.

Переходя к обратным величинам, получаем ультраметрическое неравенство для функции d_b. Остальные свойства метрики очевидны. □

УМ, заданную в утверждении 2, также будем называть УМ узких мест.

Утверждение 3 ([13]). *Любая УМ может быть реализована как УМ узких мест на полном взвешенном графе.*

Доказательство. В силу теоремы 2 достаточно проверить, что УМ узких мест на остовном дереве реализуется. Для этого достаточно приписать ребрам дерева ширины, равные $d(e)^{-1}$, а ширины ребер, не входящих в дерево, положить равными достаточно малому числу (меньшему, минимальной ширины ребер дерева). □

Замечание. Аналогично можно определить УМ узких мест на любом взвешенном графе $G = (V, E)$, $c\colon E \to \mathbb{R}_+$. Для перехода к случаю полного взвешенного графа нужно положить ширину ребер полного графа, не входящих в E, равной достаточно малому числу.

2.2. Потоки на графах

Опять рассмотрим взвешенный граф (V, E), $c\colon E \to \mathbb{R}_+$, но теперь вес ребра $c(u,w)$ будем называть *пропускной способностью* и считать, что он указывает наибольшее количество *материала*, которое можно пересылать по ребру в единицу времени в одном направлении. Под «материалом», в отличие от «объекта» из предыдущего раздела, мы понимаем сколь угодно делимую субстанцию: вода, нефть или газ дают примеры «материалов» из реальной жизни. Для пары вершин u, w, не связанных ребром в графе, полагаем $c(u,w) = 0$.

При такой интерпретации *пропускной способностью* пути $p(u,w)$ из вершины u в вершину w естественно опять считать минимум пропускных способностей ребер вдоль пути $c(p(u,w)) = \min\{c(e) \mid e \in p(u,w)\}$.

Определение пропускной способности между вершинами теперь будет другим. Если «объекты» из предыдущего раздела были неделимы, так что перетаскивать их можно было по какому-то определенному пути, то «материал» можно дробить и посылать разными маршрутами.

Поэтому введем понятие *потока* из u в w, т. е. функции $f\colon V\times V\to\mathbb{R}_+$ которая удовлетворяет следующим условиям

$$\text{(i)}\quad f(x,y)\leqslant c(x,y);$$

$$\text{(ii)}\quad \sum_x f(x,v)=\sum_y f(v,y),\quad \text{для всех } v\notin\{u,w\}.$$

Первое условие означает, что по ребру течет не больше возможного. Второе условие выражает закон сохранения транспортируемого материала. В случае электрических сетей это заряд. Тогда говорят о первом законе Кирхгофа. Оно означает, что во внутренних вершинах выполняется закон сохранения: сколько материала поступает в вершину, столько же его и отправляется дальше.

Величиной потока называется разность

$$C_f(u,w)=\sum_y f(u,y)-\sum_x f(x,u),$$

которая определяет, сколько материала отправляется из u.

Упражнение 1. *Докажите, что такое же количество материала поступает в* w, *т. е.*

$$C_f(u,w)=\sum_y f(y,w)-\sum_x f(w,x).$$

Теперь можно определить пропускную способность $C(u,w)$ между вершинами u и w как максимальную величину потока $C_f(u,w)$ из u в w. Следующий факт был замечен в работе Гомори и Ху [9].

Утверждение 4. *Для любых* u,v,w *выполняется неравенство*

$$C(u,w)\geqslant\min(C(u,v),C(v,w)).$$

Следствие 2. *Функция* $d_f(u,w)=C(u,w)^{-1}$ *при* $u\neq w$, $d_f(u,u)=0$ *является УМ.* (Будем называть такую УМ *потоковой*.)

Эти утверждения аналогичны утверждениям из предыдущего раздела об УМ узких мест. Но теперь простое рассуждение «если объект можно протащить из u в v и из v в w, то его можно протащить из u в w» не проходит, поскольку в результате сложения потоков из u в v и из v в w пропускная способность какого-нибудь ребра может оказаться превышенной. На помощь приходит знаменитая теорема Форда – Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе.

Разрезом, разделяющим вершины u и w, назовем такое разбиение множества вершин V на два множества U, W, что $u\in U$, $w\in W$. *Весом разреза* назовем сумму весов ребер между U и W (т. е. таких ребер, что один конец ребра принадлежит множеству U, а другой — множеству W).

Теорема Форда – Фалкерсона. *Наибольший поток между u и w равен наименьшему весу разреза, разделяющего u и w.*

Мы не приводим доказательства этой теоремы. Они имеются во многих книгах. Укажем на [6], где доказательство вытекает из анализа алгоритма построения максимального потока, и на короткую брошюру одного из авторов [1], в которой теорема Форда – Фалкерсона возникает как частный случай теоремы двойственности в линейном программировании.

Доказательство утверждения 4. Рассмотрим любой разрез (U, W) минимального веса, разделяющий u и w. Ясно, что та же пара множеств U и W разделяет v и w (соответственно, u и v), если $v \in U$ (соответственно, $v \in W$). В обоих случаях выполняется неравенство $C(u, w) \geqslant \min(C(u, v), C(v, w))$. □

Из утверждения 4 и следствия 1 получаем такое наблюдение.

Следствие 3. *Максимальные потоки на графе с n вершинами принимают не более $n - 1$ различного значения.*

Замечание. Это наблюдение оказывается полезным, когда надо найти максимальные потоки сразу между всеми парами вершин.

Утверждение 5. *Любая УМ может быть реализована как метрика обратных пропускных способностей.*

Доказательство. Достаточно заметить, что для дерева узкие места и потоки совпадают. Поэтому, реализовав УМ как УМ узких мест на дереве (теорема 2), получаем также и ее представление в виде потоковой УМ. (Ребрам, не входящим в дерево, нужно приписать нулевые пропускные способности.)

3. Еще раз о метриках сопротивлений

И УМ узких мест, и потоковая УМ являются частным случаем метрик сопротивлений (см. [2, 4]).

Напомним, как строятся метрики сопротивлений. Пусть каждое ребро $e \in E$ связного графа (сети) $G = (V, E)$ представляет собой проводник со степенны́м законом проводимости

$$y_e^* = y_e^r / \mu_e^s.$$

Здесь y_e — напряжение, y_e^* — ток, а μ_e — сопротивление ребра e. Положительные действительные параметры r и s одинаковы для всех ребер сети. Первый параметр определяется физикой сети. Например, $r = 1$ отвечает закону Ома, а $r = 0.5$ — типичный для гидро- или газовой динамики квадратичный закон сопротивления. Хотя от параметра s (в отличие от r) можно было бы легко избавиться, но он тоже будет играть важную роль.

Нетрудно видеть, что для любых двух вершин $u, w \in V$ двухполюсная схема (G, u, w) удовлетворяет тому же закону проводимости $y^*_{u,w} = y^r_{u,w}/\mu^s_{u,w}$, где $y^*_{u,w}$ — полный ток, а $y_{u,w}$ напряжение между u и w. Здесь $\mu_{u,v}$ — *эффективное сопротивление* схемы (G, u, w). Другими словами, (G, u, w) можно заменить на одно ребро $e = (u, w)$ с сопротивлением $\mu_{u,w}$ для тех же самых значений параметров r и s. В силу изотропности законы проводимости симметричны и $\mu_{u,w} = \mu_{w,u}$, ясно также, что $\mu_{u,w} > 0$ при $u \neq w$. Для удобства полагаем по определению $\mu_{u,u} = 0$.

В [2] доказано неравенство

$$\mu^{s/r}_{u,w} \leqslant \mu^{s/r}_{u,v} + \mu^{s/r}_{v,w}. \tag{4}$$

для произвольных трех вершин u, v, w.

В [3] было также показано, что равенство в (4) достигается тогда и только тогда, когда v лежит на любом пути из u в w. Более подробно эти результаты обсуждаются в [4, 10].

Легко видеть, что при $s \geqslant r$ (4) дает обычное неравенство треугольника $\mu_{u,w} \leqslant \mu_{u,v} + \mu_{v,w}$, а при $s/r \to \infty$ получается ультраметрическое неравенство $\mu_{u,w} \leqslant \max(\mu_{u,v}, \mu_{v,w})$.

УМ узких мест и потоковая УМ получаются как предельные случаи. Пусть $r = r(t)$ и $s = s(t)$ зависят от действительного параметра t, $t \to \infty$. Тогда метрика узких мест отвечает предельному случаю $s(t) \to \infty$ и $r(t) \equiv 1$, а метрика обратных пропускных способностей — случаю $s(t) \equiv 1$ и $r(t) \to 0$.

В [4] для метрики электрических сопротивлений ($r = 1$, $s = 1$) было показано, что для каждой k-полюсной схемы с n вершинами существует эквивалентная ей k-полюсная схема с k вершинами.

Приведенные выше реализации любой УМ как УМ узких мест или потоковой УМ (утверждения 3 и 5) показывают, что аналогичный результат справедлив для предельных случаев $s(t) \to \infty$, $r(t) \equiv 1$ и $s(t) \equiv 1$, $r(t) \to 0$.

В общем случае это утверждение не имеет места.

Задача 1. *Докажите, что для некоторых r, s существует 3-полюсная схема с 4 вершинами, которая не эквивалентна никакой 3-полюсной схеме с 3 вершинами.*

4. Несимметричный случай: квазиультраметрики

Квазиультраметрика (КУМ) удовлетворяет свойствам (i) и (iii′), т. е. в этом случае функция $d(x, y)$ не обязательно симметрическая.

Для КУМ справедливы аналоги основных утверждений, которые приводились выше в симметрическом случае.

Вместо обычных графов, ребра которых не имеют направления, теперь нужно рассматривать ориентированные графы (орграфы). Дуга (ребро) в орграфе (u, v) имеет начало u и конец v. В полном ориентированном графе дугами являются все упорядоченные пары вершин.

Рассмотрим каноническое представление КУМ. По-прежнему справедливо утверждение о транзитивности графа, дуги которого отвечают парам точек на расстоянии не больше d_i. Орграф называется транзитивным, если (u, w) — дуга всякий раз, когда найдется такая вершина v, что (u, v) и (v, w) — дуги.

Транзитивные орграфы задают отношения частичного порядка, точнее говоря предпорядка. Имеется несколько классов эквивалентных вершин (любая пара которых соединена дугой), а между классами — частичный порядок (т. е. дуга идет из u в w всякий раз, когда $u \in U$, $w \in W$ и $U < W$).

Задача 2. *Взвешенный орграф задает КУМ тогда и только тогда, когда для любого t транзитивен орграф, образованный всеми дугами, веса которых не превосходят t.*

Разумеется, можно ограничиться порогами, соответствующими попарным расстояниям. Вспомним, что расстояния в n-элементной УМ принимают $k \leqslant n-1$ различных значений и эта оценка точна. Для КУМ также имеется аналогичная точная оценка, но она гораздо слабее.

Задача 3. *Докажите, что расстояния в n-элементной КУМ принимают $k \leqslant (1/2)(n-1)(n+2)$ различных значений и эта оценка точна.*

Замечание. В [8] показано, что равенство может достигаться даже на потоковых КУМ.

Задача на узкие места и задача о максимальном потоке формулируются для несимметрического случая совершенно так же и, более того, несимметричные формулировки более естественны (вспомним об улицах с односторонним движением). В этом случае вместо УМ получаются КУМ.

На КУМ узких мест обобщается утверждение 3.

Задача 4. *Докажите, что любая КУМ реализуется как КУМ узких мест.*

А вот на потоковые КУМ утверждение 5 не распространяется. На рис. 2 приведен простой пример (веса не указанных на рисунке дуг равны достаточно большому числу, для определенности 10).

Упражнение 2. *Проверьте, что граф на рис. 2 задает КУМ. Докажите, что она не реализуется как потоковая КУМ.*

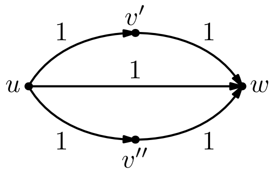

Рис. 2.

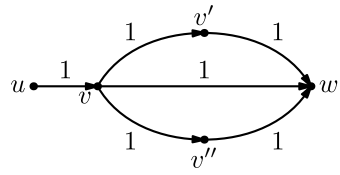

Рис. 3.

Заметим, что потоковая КУМ получится, если заменить $d(u,w)=1$ на любое $d(u,w)\in[0,1/2]$. Если же заменить на $d(u,w)>1/2$, то получится не потоковая КУМ.

Однако любая КУМ является подпространством некоторой потоковой КУМ, т. е. может быть реализована многополюсной потоковой сетью, в которой полюсы — элементы КУМ, а все остальные вершины — транзитные, в них выполняется закон сохранения материала.

Упражнение 3. *Проверьте, что потоковая КУМ, определенная графом на рис.* 3, *при ограничении на множество* $\{u,v',v'',w\}$ *дает КУМ на рис.* 2.

Вообще, КУМ на рис. 2 играет особую роль.

Задача 5. *Если расстояния в КУМ принимают всего два значения* 1 *и* ∞, *то эта КУМ потоковая тогда и только тогда, когда она не содержит индуцированной подсети, изоморфной сети на рис.* 2.

Задача 6. *Опираясь на результат задачи* 5, *постройте алгоритм, который проверяет, является ли данная КУМ потоковой, и предъявляет соответствующую потоковую сеть в случае положительного ответа.*

Задача 7. *Докажите, что любая КУМ реализуется как ограничение потоковой КУМ на часть вершин.*

Указание: используйте критерий задачи 2.

5. О жадных алгоритмах построения остова наименьшего веса

Теорема 2 обобщается на УМ узких мест на любом (связном) взвешенном графе.

Утверждение 6. *УМ* d_b *узких мест, заданная связным взвешенным графом* $G=(V,E)$, *совпадает с УМ* d_T *остовного дерева* T *наименьшего веса в графе* G.

Доказательство. Если в графе G нет циклов, то это дерево и утверждение выполняется тривиальным образом.

В противном случае выберем некоторый цикл C в графе G и ребро e максимального веса в графе G. Обозначим через G' граф, который получается из G выбрасыванием ребра e. Докажем, что УМ узких мест для графов G и G' совпадают. Тогда утверждение будет следовать по индукции.

С одной стороны $d_{b,G'}(u,v) \geqslant d_{b,G}(u,v)$: минимум берется по меньшему множеству путей. С другой стороны, $d_{b,G'}(u,v) \leqslant d_{b,G}(u,v)$: на любом пути замена ребра e на $C \setminus \{e\}$ не увеличивает веса пути. □

В доказательстве утверждения 6 фактически описана стратегия построения остовного дерева наименьшего веса: на каждом шаге удаляем из графа ребро, которое имеет максимальный вес на некотором цикле. Алгоритмы подобного типа называются «жадными». В большинстве случаев жадные алгоритмы не дают оптимального решения. Однако есть несколько важных исключений и построение остовного дерева наименьшего веса — одно из них.

Поскольку количество ребер в дереве намного меньше общего количества ребер в полном графе ($n-1$ и $n(n-1)/2$ соответственно), остовное дерево обычно строят добавлением ребер, а не удалением. В этом случае также применимы жадные стратегии. Есть несколько алгоритмов, основанных на таких стратегиях, например, алгоритмы Борувки [7], Краскала [12], Прима [15].

Опишем общую схему таких алгоритмов. Перед началом каждого шага имеется граф без циклов (лес) F, который является частью некоторого остовного дерева наименьшего веса. Шаг состоит в добавлении к этому графу нового ребра так, чтобы расширенный граф F' удовлетворял тем же самым условиям. Оказывается, верно следующее общее утверждение.

Утверждение 7. *Пусть лес F состоит из деревьев F_1, …, F_m и является частью остовного дерева наименьшего веса. Тогда для любого i выполняется следующее: если добавить к F ребро наименьшего веса, соединяющее вершину из F_i и вершину не из F_i, то полученный лес F' также является частью некоторого остовного дерева минимального веса.*

Доказательство. В любом остовном дереве есть рёбра, соединяющие вершины из F_i с вершинами не из F_i. Если веса всех этих ребер больше минимального веса ребра в разрезе $(F_i, \bar{F}_i)$, то добавление ребра минимального веса в этом разрезе и удаление одного из имеющихся ребер остовного дерева дают уменьшение веса.

Список литературы

[1] Вялый М. Н. *Линейные неравенства и комбинаторика*. М.: МЦНМО. 2003.

[2] Гвишиани А. Д., Гурвич В. А. *Метрические и ультраметрические пространства сопротивлений* // УМН, 1987. Т. 42, вып. 6. С. 187–188.

[3] Гвишиани А. Д., Гурвич В. А. *Динамические задачи классификации и выпуклое программирование в приложениях*. М.: Наука. 1992.

[4] Гурвич В. А. *Метрические и ультраметрические пространства сопротивлений* // Математическое просвещение. Сер. 3, вып. 13. 2009. С. 134–141.

[5] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. *Лекции по теории графов*. М.: Наука. 1990.

[6] Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. *Алгоритмы: построение и анализ*. М.: МЦНМО. 2000.

[7] Borůvka, O. *O jistém problému minimálním* (Об одной задаче минимизации, на чешском с немецкой аннотацией) // Práce mor. přírodověd. spol. v Brně III, 3. 1926. S. 37–58.

[8] Frank H., Frisch I. T. *Communication, Transmission, and Transportation Networks*. Reading, MA: Addison-Wesley. 1971.

[9] Gomory R. E., Hu T. C. *Multi-terminal network flows* // J. SIAM, vol. 9, no 4. 1961. P. 551–570.

[10] V. Gurvich. *Metric and ultrametric spaces of resistances* // Discrete Appl. Math., vol. 158, 2010. P. 1496–1505.

[11] Gurvich V., Vyalyi M. *Characterization of (quasi-)ultrametric finite spaces in terms of (directed) graphs*. Rutcor research report. RRR–7–2011, 2011.

[12] Kruskal J. B. *On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem* // Proceedings of the American Math. Soc. Vol. 7, no 1. 1956. P. 48–50.

[13] Leclerc B. *Description combinatoire des ultrametriques* // Centre de Mathematique Sociale, Ecole Pratique des Hautes Etudes Mathematiques et Sciences Humaines. Vol. 73. 1981. P. 5–37.

[14] Lemin A. J. *The category of ultrametric spaces is isomorphic to the category of complete, atomic, tree-like, and real graduated lattices LAT** // Algebra Universalis, vol. 50, no 1. 2003. P. 35-49.

[15] Prim R. C. *Shortest connection networks and some generalizations* // Bell System Technical Journal, vol. 36. 1957. P. 1389–1401.

М. Н. Вялый, ВЦ РАН, МФТИ, МИОО, НМУ.
В. А. Гурвич, RUTCOR, Rutgers University
Email: `gurvich@rutcor.rutgers.edu`