

Об асимптотике эргодических перестановок Арнольда

Д. А. Байгушев

В данной заметке исследуется специальный класс перестановок, введенный В. И. Арнольдом в 1958 г. для упрощения задачи о перекладывании отрезков.

В 1958 г. на своем семинаре В. И. Арнольд поставил следующую задачу (так называемую *задачу о перекладывании отрезков*; см. [1]). Разобьем отрезок $[0, 1]$ на три непустые части $\{A, B, C\}$ и переложим их в порядке $\{C, B, A\}$. *Исследовать получившуюся динамическую систему на отрезке $[0, 1]$.*

Эта задача активно изучалась, в результате чего были обнаружены связи этой задачи с самыми разными разделами математики (см., например, [4]).

Но в тоже время осталась без внимания другая задача Арнольда, поставленная на том же семинаре (см. [3]): *исследовать дискретный аналог задачи о перекладывании отрезков*; в частности, *исследовать дискретные аналоги динамических систем со всюду плотными траекториями.*

Естественно считать, что дискретным аналогом перекладывания отрезков является перекладывание конечного множества точек, т. е. *перестановка*. Более точно, рассмотрим множество $\{1, 2, \dots, n\}$. Разобьем его на три непустых блока $\{A, B, C\}$ размеров a , b и c соответственно и переставим их в порядке $\{C, B, A\}$. Получившуюся перестановку мы будем называть (C, B, A) -*перестановкой* (или *перестановкой Арнольда*) и будем обозначать ее через $\sigma(a, b, c)$.

Перестановки можно рассматривать как динамические системы на конечном пространстве. Одним из важных свойств динамической системы является плотность ее траекторий. В случае перестановок это условие означает, что перестановка состоит из одного цикла. Такие перестановки мы будем называть *эргодическими*.

Основной целью данной заметки является исследование эргодических перестановок Арнольда. А именно, мы докажем критерий, позволяющий определить эргодичность перестановки Арнольда, зная размеры блоков A ,

B и C , а также вычислим асимптотику доли эргодических перестановок Арнольда (задача 8 из [3]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что доля эргодических перестановок среди всех перестановок длины n равна $1/n$ и стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$.

Для изучения эргодических перестановок Арнольда нам понадобится следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем шагами перестановки σ величины $\sigma(i) - i$, где $i = 1, \dots, n$.

Отметим, что в (C, B, A) -перестановках возможны всего три шага, которые мы обозначим через S_C , S_B и S_A соответственно. А именно, S_C — шаг, на который увеличивается число, переходящее в число из блока C , S_B — из блока B и S_A — из блока A .

Легко видеть, что

$$S_C = a + b, \quad S_B = a - c, \quad S_A = -b - c.$$

Кроме того, $S_B = S_A + S_C$.

ТЕОРЕМА 1 (КРИТЕРИЙ ЭРГОДИЧНОСТИ). *Перестановка Арнольда $\sigma(a, b, c)$ эргодична тогда и только тогда, когда $\text{НОД}(S_A, S_C) = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. « \Rightarrow » Если $\text{НОД}(S_A, S_C) = d \neq 1$, то, передвигаясь по циклу перестановки $\sigma(a, b, c)$ с шагами S_A , S_B и S_C , мы не сможем попасть из 1 в 2, так как мы будем попадать только в числа, сравнимые с 1 по модулю d .

« \Leftarrow » Рассмотрим какой-либо цикл перестановки $\sigma(a, b, c)$. Пройдя по нему один раз, мы получим: $xS_A + yS_B + zS_C = 0$ (здесь x — количество шагов S_A в цикле, y — количество шагов S_B и z — количество шагов S_C).

Подставив в это равенство значения шагов, получаем: $(x + y)(b + c) = (y + z)(a + b)$.

Так как $\text{НОД}(a + b, b + c) = 1$, то

$$\begin{cases} x + y \geq a + b, \\ y + z \geq b + c. \end{cases}$$

Сложим два получившихся неравенства: $x + 2y + z \geq a + 2b + c$.

Так как $y \leq b$, то $x + y + z \geq a + b + c = n$, т.е. длина цикла не меньше n . Но это означает, что она в точности равна n , и перестановка $\sigma(a, b, c)$ эргодична.

ТЕОРЕМА 2. *Доля эргодических перестановок Арнольда асимптотически равна $6/\pi^2 \approx 0,608$ (рис. 1).*

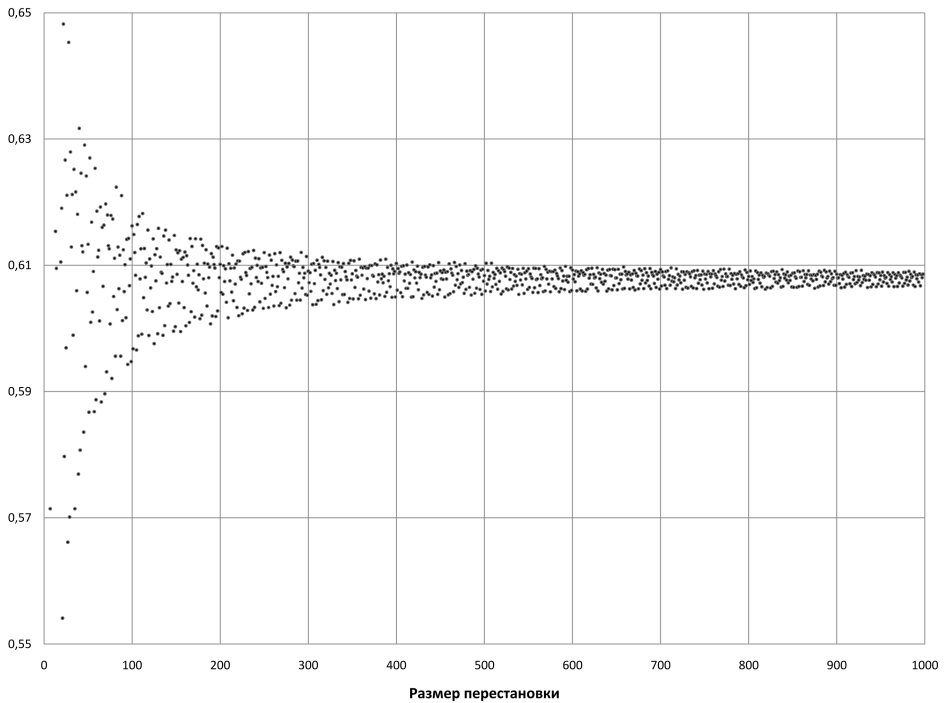


Рис. 1. Доли эргодических перестановок Арнольда

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим перестановку Арнольда $\sigma(a, b, c)$. Положим $x := b + c = n - a$ и $y := a + b = n - c$. Тогда множество перестановок Арнольда соответствует множеству точек

$$\Delta_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : x < n, y < n, x + y > n\}.$$

В то же время согласно критерию эргодичности множество эргодических перестановок Арнольда соответствует множеству точек в Δ_n со взаимно простыми координатами.

Таким образом, нам необходимо вычислить долю точек в Δ_n со взаимно простыми координатами при $n \rightarrow \infty$. Для этого мы воспользуемся следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3 (Арнольда о равномерной распределенности [2]). *Множество целочисленных точек со взаимно простыми координатами равномерно распределено на плоскости (рис. 2), т. е. число точек этого множества в гомотетично растянутой в N раз области плоскости становится асимптотически пропорциональным произведению площади*

этой области на число N^2 при $N \rightarrow \infty$. Коэффициент этой пропорциональности (плотность) оказывается равным $1/\zeta(2) = 6/\pi^2$.

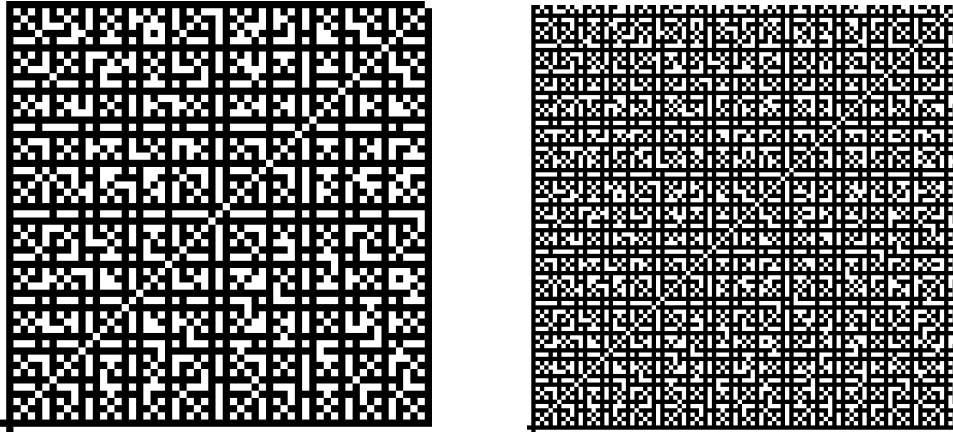


Рис. 2. Равномерное распределение: черным цветом показаны точки со взаимно простыми координатами, а белым — остальные

Применим теорему Арнольда о равномерной распределенности к выпуклым оболочкам множеств Δ_n . Их площади асимптотически равны $|\Delta_n|$, поэтому доля точек в Δ_n со взаимно простыми координатами асимптотически (при $n \rightarrow \infty$) равна $1/\zeta(2) = 6/\pi^2$, что и требовалось доказать.

В заключение отметим, что теорема 2 хорошо подтверждается численными экспериментами (см. таблицу).

размер перестановки	10	10^2	10^3	10^4
всего (C, B, A)-перестановок	36	4851	498501	49985001
эргодических (C, B, A)-перестановок	24	2964	303392	30389486
доля эргодических (C, B, A)-перестановок	0,666667	0,611008	0,608609	0,607972
константа $6/\pi^2$	0,607927	0,607927	0,607927	0,607927

Автор благодарит П. В. Бибилова за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В.И. *Задачи Арнольда*. М.: ФАЗИС, 2000 г.
- [2] Арнольд В.И. *Равномерное распределение неделимых векторов в целочисленном пространстве* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 79, №1. 2009. С. 21–29.
- [3] Арнольд В.И. *Что такое математика?* М.: МЦНМО, 2008 г.
- [4] Каток А.Б., Синай Я.Г., Степин А.М. *Теория динамических систем и общих групп преобразований с инвариантной мерой* // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. Т. 13. ВИНТИ, М., 1975. С. 129–262.