О некоторых свойствах производной, её характеризующих

Б. Кадец

Пусть A и B — две алгебры над одним полем, причём B — подалгебра A. Линейный оператор $D\colon B \to A$ называется дифференцированием, если для любых $f, g \in A$ выполнено «правило Лейбница»: $D(fg) = f\cdot Dg + g\cdot Df$.

В математике подобные дифференцирования возникают при рассмотрении разных вопросов (см. например [3, 5, 6] и, для некоммутативного случая, [1]).

Известно, что любое дифференцирование алгебры $C^\infty(\mathbb{R})$ в себя — это, с точностью до нормировки, обычный оператор взятия производной [6, гл. 1, §2]. Однако аналог этого факта для других алгебр гладких функций не является широко известным. Мне не удалось найти в литературе описания дифференцирований из $C^1(\mathbb{R})$ в $C(\mathbb{R})$, а известные доказательства для C^∞ на этот случай не переносятся. Возможно, что это описание можно получить из общих теорем теории дифференцирования банаховых алгебр (см. [1, 7]), однако мне такого общего утверждения найти не удалось.

В этой заметке приведено элементарное доказательство того, что любое дифференцирование из C^1 в C после естественной нормировки совпадает с производной (нам даже не потребуется в полной мере условие линейности). Мы не знаем, верно ли аналогичное утверждение для дифференцирований из алгебры дифференцируемых функций в алгебру всех функций на $\mathbb{R}$.

Рассмотрим оператор $D\colon C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$. Мы покажем, что, если он удовлетворяет одному из следующих наборов условий:

(1a) $D(fg) = f \cdot Dg + g \cdot Df$ («правило Лейбница»),

(2a) $D(a \cdot x + b \cdot \mathbf{1}) = a \cdot \mathbf{1}$,

или

(1b) $D(a \cdot x + b \cdot \mathbf{1}) = a \cdot \mathbf{1}$.

(2b) Существуют не сюръективная функция $\varphi \in C^1$ и точка x_0 такие, что $(D\varphi)(x_0) \neq 0$,

(3b) $D(f(g))(x) = (Df)(g(x)) \cdot (Dg)(x)$ («цепное правило»),

то для любой функции f верно $Df = f'$. (Здесь и далее значком $\mathbf{1}$ обозначается функция, тождественно равная единице.)

Мы также покажем существование абстрактного дифференцирования на пространстве функций с локально ограниченной производной, не совпадающего с операцией взятия производной.

1. Две теоремы о совпадении абстрактного дифференцирования с обычным

Основным инструментом будет служить следующая простая лемма.

Лемма. *Пусть оператор* $D\colon C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ *удовлетворяет условиям*:
(1) *для любых* $a, b \in \mathbb{R}$ *выполнено* $D(ax + b \cdot \mathbf{1}) = a \cdot \mathbf{1}$;
(2) *для любого конечного интервала* $J = (s; t)$ *из* $f|_J = g|_J$ *следует, что* $(Df)|_J = (Dg)|_J$ *(локальность).*
Тогда для любой функции f *верно* $Df = f'$.

Доказательство. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $I_1 = (x_0, +\infty)$, $I_2 = (-\infty, x_0)$, $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Введём функцию h такую, что $h|_{I_1} = f$, $h|_{I_2} = g$. Тогда h непрерывна в точке x_0 и $\lim_{x \to x_0} h'(x) = f'(x_0)$. Поэтому $h \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда, так как I_1 и I_2 есть (счётные) объединения интервалов, то $(Dh)|_{I_1} = (Df)|_{I_1}$, $(Dh)|_{I_2} = (Dg)|_{I_2} = f'(x_0) \cdot \mathbf{1}$. Но Df и Dh непрерывны, x_0 лежит на границе как I_1, так и I_2. Поэтому $(Df)(x_0) = f'(x_0)$. □

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть оператор* $D\colon C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ *удовлетворяет условиям*:
(1) $D(fg) = f \cdot Dg + g \cdot Df$;
(2) $D(a \cdot x + b \cdot \mathbf{1}) = a \cdot \mathbf{1}$.
Тогда для любой функции f *верно* $Df = f'$.

Доказательство. Докажем, что D — «локальный» оператор. Пусть I — интервал. Рассмотрим функцию $h \in C^1$ такую, что h не равно нулю ни в одной точке интервала I, а $h|_{\mathbb{R} \setminus I} = 0$. Пусть $g|_I = f|_I$. Тогда $f \cdot h = g \cdot h$ на всей оси. Поэтому $f \cdot Dh + h \cdot Df = g \cdot Dh + h \cdot Dg$. Значит, $(Df)(x) = (Dg)(x)$ при всех $x \in I$. Таким образом, оператор D удовлетворяет условиям леммы, поэтому $Df = f'$. □

Замечание. Без условия (2) теорема неверна. Действительно, отображение $(Df)(x) = L(f(x))$, где $L(x) = x \cdot \ln |x|$, $L(0) = 0$, удовлетворяет условию (1).

Попробуем теперь посмотреть, какие условия надо добавить к «цепному правилу» $(D(f(g))(x) = (Df)(g(x)) \cdot (Dg)(x))$, чтобы полученные условия задавали оператор дифференцирования. Приведём сначала несколько примеров отображений, удовлетворяющих «цепному правилу».

Пример 1. $(Df)(x) = \dfrac{T(f(x))}{T(x)}$, где $T \in C^1$ — произвольная всюду положительная функция. Действительно,

$$D(f(g))(x) = \frac{T(f(g(x)))}{T(x)} = \frac{T(f(g(x)))}{T(g(x))} \cdot \frac{T(g(x))}{T(x)} = (Df)(g(x)) \cdot (Dg)(x).$$

Пример 2. Пусть $Df = f'$, если f — биекция, и Df тождественно равна 0 для остальных f (для непрерывных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ композиция является биекцией только тогда, когда обе функции — биекции).

Последний пример объясняет естественность появления условия (2) в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть оператор $D\colon C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям*:

(1) $D(a \cdot x + b \cdot \mathbf{1}) = a \cdot \mathbf{1}$;

(2) *существует не сюръективная функция $\varphi \in C^1$ и точка x_0 такие, что $(D\varphi)(x_0) \neq 0$*;

(3) $D(f(g))(x) = (Df)(g(x)) \cdot (Dg)(x)$.

Тогда $Df = f'$.

Доказательство. Основой доказательства снова будет проверка локальности оператора. Будем считать, что образом φ служит конечный отрезок, интервал или полуинтервал, внутренность которого мы обозначим I (доказательство для случая открытого или замкнутого луча полностью аналогично).

Заметим, что из свойств (1) и (3) следует, что $D(f(ax + b\mathbf{1}))(x_0) = a \cdot D(f)(ax_0 + b)$ и $D(a \cdot f + b)(x) = aD(f)(x)$. Поэтому для любого интервала J и любой точки $y \in J$ существует функция $f_0 \in C^1$ и точка x_1 такие, что $f_0(x_1) = y$, $(Df_0)(x_1) \neq 0$, $f_0(\mathbb{R}) \subset J$ (f_0 — это сдвинутая и растянутая функция φ).

Докажем теперь, что, если $f|_J = g|_J$, где J — интервал, то $(Df)|_J = (Dg)|_J$. Зафиксируем произвольную точку $y \in J$. Выберем такую функцию h, что $h(x_1) = y$, $(Dh)(x_1) \neq 0$, $h(\mathbb{R}) \subset J$. Тогда $f(h(x)) = g(h(x))$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Применяя оператор D и подставляя $x = x_1$, получим $(Df)(y) \cdot (Dh)(x_1) = (Dg)(y) \cdot (Dh)(x_1)$, т. е. $(Df)(y) = (Dg)(y)$. Значит, оператор удовлетворяет условиям леммы, т. е. $Df = f'$. □

2. Фильтры и пример странного дифференцирования

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится техника фильтров и ультрафильтров, хорошо известная специалистам в общей топологии, но редко упоминаемая в общих университетских курсах (подробнее см. [2, 4, 8]).

При рассмотрении функций, не имеющих предела (в обычном смысле), удобство предела по ультрафильтру заключается в таком единообразном выделении предельной точки, что выполняются арифметические свойства предела.

Напомним необходимые определения и факты.

Определение. Семейство подмножеств $\mathcal{F}$ множества X называется *фильтром* на X, если

(1) $\mathcal{F}$ непусто;

(2) $\varnothing \notin \mathcal{F}$;

(3) если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$;

(4) если $A \in \mathcal{F}$, $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathcal{F}$.

Определение. Семейство множеств $\mathcal{C}$ называется *центрированным*, если пересечение любого конечного набора элементов из $\mathcal{C}$ непусто.

Теорема. Каждое непустое центрированное семейство множеств содержится в некотором фильтре.

Определение. Пусть X — множество, $\mathcal{F}$ — фильтр на X. Точка $y \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $f\colon X \to \mathbb{R}$ по фильтру $\mathcal{F}$, если для любой окрестности U точки y существует $A \in F$ такое, что $f(A) \subset U$.

Определение. *Ультрафильтром* на X называется максимальный по включению фильтр на X. То есть $\mathcal{F}$ — ультрафильтр, если не существует фильтра $\mathcal{U} \neq \mathcal{F}$ такого, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$.

Теорема. Любой фильтр содержится в некотором ультрафильтре.

Теорема (о существовании и единственности предела по ультрафильтру). Пусть $\mathcal{F}$ — ультрафильтр на E, $f : E \to \mathbb{R}$ функция, и образ некоторого элемента ультрафильтра относительно компактен (то есть лежит в каком-то отрезке). Тогда существует и единственен предел функции f по $\mathcal{F}$.

Теорема (арифметические свойства предела по фильтру). Пусть f, g — вещественнозначные функции на множестве E, $\mathcal{F}$ — фильтр на E, и существуют пределы функций f и g по фильтру $\mathcal{F}$, равные, соответственно, a и b. Тогда существуют пределы по $\mathcal{F}$ функций fg и $f+g$, равные, соответственно, ab и $a+b$.

Вернёмся теперь к операторам, удовлетворяющим «условию Лейбница» $D(fg) = f\cdot Dg + g\cdot Df$. Обозначим через $DB_0(\mathbb{R})$ пространство дифференцируемых функций, имеющих ограниченную в окрестности нуля производную, а через $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ — пространство всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Теорема 3. *Существует оператор* $D\colon DB_0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, *отличный от оператора дифференцирования и удовлетворяющий условиям* (1) *и* (2) *теоремы* 1.

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(x) = x^2 \sin(1/x)$, и пусть $p(x) = h'(x)$, b — предельная точка $p(x)$ при $x \to 0$, отличная от $p(0)$ (например, $b = \frac{1}{2}$). Рассмотрим семейство множеств вида

$$\{x : |p(x) - b| < \varepsilon\} \cap (-\delta, +\delta)$$

при различных ε, δ. Оно центрировано, значит, существует содержащий это семейство ультрафильтр $\mathcal{F}$. Очевидно, что образ этого ультрафильтра под действием p содержит базу окрестностей точки b, т. е. $\lim_{\mathcal{F}}(p) = b$. Теперь можно рассмотреть оператор D, такой что $(Df)(x) = f'(x)$ при $x \neq 0$ и $(Df)(0) = \lim_{\mathcal{F}}(f'(x))$. Так как любая функция из $DB_0(\mathbb{R})$ имеет ограниченную производную в окрестности нуля (а окрестности нуля — это элементы ультрафильтра), то по теореме о существовании предела по ультрафильтру $\lim_{\mathcal{F}}(f'(x))$ существует. Из арифметических свойств предела по фильтру следует, что равенство $D(fg)(x) = (f(Dg) + g(Df))(x)$ верно и при $x = 0$. Но $(Dh)(0) = b \neq 0 = h'(0)$. $\square$

Мне не известен ответ на следующий вопрос.

Вопрос. Верно ли утверждение теоремы 3 для операторов из множества всех дифференцируемых функций в $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

Выражаю глубокую благодарность С. Л. Гефтеру за постановку задачи и ценное обсуждение.

Список литературы

[1] Браттели У., Робинсон Д. *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика*. М.: Мир. 1982.

[2] Бурбаки Н. *Общая топология. Основные структуры*. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1968.

[3] Винберг Э. Б., Онищик А. Л. *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1988.

[4] Кадец В. М. *Курс функционального анализа*. Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина. 2006. `http://page.mi.fu-berlin.de/werner99/kadetsbook/`

[5] Капланский И. *Введение в дифференциальную алгебру*. Библиотека сборника «Математика». М.: Из-во иностр. лит. 1959.

[6] Хелгасон С. *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*. М.: Мир. 1964.

[7] Dales H. G. *Automatic continuity: a survey* // Bull. London Math. Soc. Vol. 10. 1978. P. 129–183.

[8] Comfort W.W., Negrepontis S. *The theory of ultrafilters*. Berlin, New York: Springer-Verlag. 1974.

Б. Кадец, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
Email: borja.kadets@gmail.com