Опять о многоугольниках Рейнхардта

С. Б. Гашков

В [9] Рейнхардт доказал изодиаметрическое неравенство для периметра n-угольника данного диаметра d. В [1] автором настоящей заметки было приведено более простое доказательство. Попутно было доказано аналогичное неравенство для ширины[1)]. А именно, доказана следующая теорема.

Если p периметр, b ширина и d диаметр выпуклого n-угольника, то справедливы неравенства $2nb\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2n} \leqslant p \leqslant 2nd\sin\dfrac{\pi}{2n}$. Каждое из неравенств точное, если $n \neq 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Достигаются они, в частности, на правильных n-угольниках при нечетном n, и на полуправильных n-угольниках при четном n, отличных от степени двойки[2)].

Вопрос об экстремальных n-угольниках[3)] оказался непростым. Он был явно сформулирован автором в тексте, помещенном вслед за статьей (под названием «задачи для исследования»). В нем утверждалось, в частности, что для простого p единственным экстремальным p-угольником является правильный, единственным экстремальным $2p$-угольником является полуправильный, среди девятиугольников имеется в точности два экстремальных (один правильный, другой полуправильный), а для всех остальных $n \neq 2^k$ существуют экстремальные n-угольники, не являющиеся ни правильными, ни полуправильными. Там же было приведено следующее неравенство Рейнхардта для площади n-угольника

$$s \leqslant \frac{n}{2}\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}d^2,$$

в котором равенство достигается только для правильных нечетноугольников.

Примерно в то же время были получены верхние и нижние оценки для числа различных экстремальных n-угольников, но опубликовать их в журнале «Квант» не предоставлялось возможным, а публикации в научных

[1)] Соответствующие определения можно найти в [1–3].

[2)] Полуправильными в [1] названы равносторонние n-угольники, вписанные в правильные k-угольники Рело, где k — делитель n, но фактически там дано более явное определение.

[3)] Для которых обращается в равенство любое из двух неравенств, так как они обращаются в равенство одновременно.

журналах препятствовало отсутствие уверенности в новизне результатов, в частности изодиаметрического неравенства для ширины $2nb\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2n} \leqslant p$ (в [1] оно вместе с неравенством для периметра было названо неравенством Рейнхардта).

После возобновления ежегодника «Математическое просвещение» появилась возможность публикации в нем, что и было осуществлено[4)] в [2]. Там было кратко повторено доказательство из [1] (по не вполне понятной сейчас самому автору причине в [2] не было ссылки на [1]), доказаны утверждения, оставленные в [1] без доказательства, а также некоторые новые утверждения. Экстремальные n-угольники в [2] были названы многоугольниками Рейнхардта, им были сопоставлены двухцветные ожерелья и подмножества мощности n в группе комплексных корней степени $2n$ из единицы, не содержащие противоположных корней, и с помощью этих элементарных соображений получены верхние и нижние оценки для числа n-угольников Рейнхардта с точностью до вращений[5)]. А именно, для него получены оценки

$$\frac{1}{2n}\sum_{2\nmid m|n} 2^{n/m}(\varphi(m)-\mu(m)) \leqslant R(n) < \frac{1}{2n}\sum_{2\nmid m|n} 2^{n/m}\varphi(m),$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса, $\varphi(n)$ — функция Эйлера; нижняя оценка — это в точности число «периодических» n-угольников[6)]. Для $n = 2^l p^k$, $k, l \in \mathbb{N}$, где $p > 2$ — простое число, в [2] было доказано с помощью круговых многочленов, что все n-угольники Рейнхардта периодические, откуда следует формула

$$\begin{aligned} R(n) &= \frac{1}{2n}\sum_{2\nmid m|n} 2^{n/m}(\varphi(m)-\mu(m)) = \\ &= \frac{1}{2n}(2^{n/p}p + 2^{n/p^2}p(p-1) + \ldots + 2^{n/p^k}p^{k-1}(p-1)) \sim 2^{n/p}p/2n. \end{aligned}$$

Недавно автор случайно увидел в интернете статью [7], где, в частности, были найдены формулы для числа периодических n-угольников

[4)] После того, как автор нашел свои старые записи и сделал из них TEX-файл, а также перевод на немецкий и послал в «Elemente der Mathematik», и получил оттуда отказ под предлогом, что подобного стиля статьи журнал не принимает.

[5)] Пользуясь возможностью, заметим здесь, что в [2] в двух формулах посреди с. 98 есть опечатки — в одной в последнем равенстве пропущен множитель $m/2n$, а другой между двумя суммами вставлен ненужный знак равенства.

[6)] Т. е. тех, которым соответствуют периодические ожерелья; в частности, полуправильные многоугольники являются периодическими.

Рейнхардта[7)] с точностью до вращений и осевых симметрий[8)], повторен результат из [2] о том, что при $n = 2^l p^k$, $k, l \in \mathbb{N}$ не бывает непериодических n-угольников Рейнхардта, с помощью компьютерного поиска найдены для некоторых n непериодические (названные в [7] спорадическими) n-угольники, и было выдвинуто предположение о том, что при $n = pq$, где $p > q$ — простые, спорадических n-угольников не существует. Из [7] автор узнал также, что в [4] доказано неравенство для ширины $2nb \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2n} \leqslant p$ без ссылок на [1], где это было сделано намного ранее (и вероятно, проще). Значит, по-видимому, этот результат [1] являлся новым.

В [6], наряду с другими результатами, была доказана

Теорема 1. *Непериодических n-угольников Рейнхардта при n, равном произведению двух различных простых, не существует.*

Ниже мы приведем более простое доказательство этого факта. Полагаем, что и остальные результаты [6] могут быть доказаны более просто с использованием указанного ниже подхода.

Доказательство [6] основано на теореме Рейнхардта [9] о том, что экстремальным n-угольникам можно однозначно сопоставить *многочлены Рейнхардта $f(x)$ такие, что $f(0) = 1$, $\deg f < n$, $\Phi_{2n} \mid f$, где Φ_{2n} — круговой полином*[9)] *порядка $2n$, а коэффициенты $f(x)$ равны $0, \pm 1$, причем число ненулевых коэффициентов нечетно.* Утверждение теоремы, т. е. отсутствие спорадических n-угольников, очевидно следует из следующей леммы [6]:

Лемма 1. *Если $n = pq$, где $p > q > 2$ — простые, то многочлен Рейнхардта $f(x)$ делится или на $\Phi_p(-x^q)$ или на $\Phi_q(-x^p)$.*

Действительно, так как $\Phi_p(-x^q) = x^{(p-1)q} - x^{(p-2)q} + \ldots \pm x^q \mp 1$, указанная делимость означает антипериодичность последовательности коэффициентов многочлена $f(x)$, т. е. выполнения равенств $f_i = -f_{i+p}$, где $0 \leqslant i < q(p-1)$, а значит и q-периодичность соответствующего n-угольника[10)] (это не очевидно, так как здесь мы не приводим правила построения многочленов Рейнхардта, однако несложно доказывается в [6, 7], куда мы и отсылаем читателя).

[7)] Термин n-угольники Рейнхардта, кажется, не использовался в [7] и появился только в [6].

[8)] Почему-то мне не пришло в голову рассмотреть такую задачу.

[9)] Определение круговых полиномов, или полиномов деления круга, можно найти в любом учебнике высшей алгебры.

[10)] Многоугольник называется t-периодическим, если его группа вращений имеет порядок t.

Для доказательства этой леммы в [6] используется следующая лемма, фактически содержащаяся в [5, 8, 10][11)].

Лемма 2. *Если $g(x)$ — произвольный многочлен степени, меньшей $n = pq$, с целыми коэффициентами, делящийся на Φ_n, то*

$$g(x) = a(x)\Phi_p(x^q)+b(x)\Phi_q(x^p),\ a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[x],\ \deg a(x) < q,\ \deg b(x) < p.$$

Так как при нечетном n, как известно из алгебры, $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$, то из этой леммы (при подстановке $x = -y$) следует, что если $\Phi_{2n} \mid g(x)$, то $g(x) = a(x)\Phi_p(-x^q) + b(x)\Phi_q(-x^p)$, $\deg a(x) < q$, $\deg b(x) < p$.

В [1] экстремальным n-угольникам Рейнхардта другим способом однозначно сопоставлены многочлены $g(x)$, $\deg g < n$, у которых *все коэффициенты равны* ± 1, такие, что Φ_{2n} делит g, причем, если коэффициенты g_i многочлена удовлетворяют условию антипериодичности $g_i = -g_{i+t}$, где n/t нечетно, то соответствующий n-угольник Рейнхардта будет n/t-периодическим.

Это позволяет упростить рассуждения [6] и вывести отсутствие спорадических n-угольников при $n = pq$, где $p > q > 2$ — простые, из следующей леммы.

Лемма 3. *Если сумма двух последовательностей, одна из которых антипериодична с периодом p, а другая антипериодична с периодом q, $(p, q) = 1$, есть последовательность, членами которой являются только два различных числа a, b, то эта последовательность тоже антипериодична либо с периодом p, либо с периодом q.*

Действительно, пусть $g(x)$, $\deg g < n$, многочлен с коэффициентами ± 1, такой, что $\Phi_{2n} \mid g$, соответствующий произвольному n-угольнику Рейнхардта, $n = pq$, $p > q > 2$ — простые. Согласно лемме 2 имеем $g(x) = a(x)\Phi_p(-x^q) + b(x)\Phi_q(-x^p)$, $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg a(x) < q$, $\deg b(x) < p$. Так как последовательности коэффициентов многочленов $a(x)\Phi_p(-x^q)$, $b(x)\Phi_q(-x^p)$ антипериодичны с периодами q, p соответственно (и обратно, любой многочлен степени $pq - 1$ с антипериодичной с периодом q последовательностью коэффициентов представим в виде $a(x)\Phi_p(-x^q)$, $\deg a(x) < q$), а последовательность коэффициентов многочлена $g(x)$ состоит только из двух чисел ± 1, то из леммы 3 следует, что последовательность коэффициентов многочлена $g(x)$ антипериодична с периодом p или q, значит соответствующий ему n-угольник периодичен (т. е. имеет группу вращений порядка q или p).

Приведем доказательство леммы 3. Докажем вначале, что одна из двух суммируемых антипериодических последовательностей $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ такова,

[11)] В [5, 8, 10] доказано более общее утверждение, но ограничений на степени многочленов там нет. В [8] дано более простое доказательство, чем в [5] и есть ссылка на [5]. В [10] ссылок на [5, 8] нет.

что все ее члены с четными номерами равны. Допустим, что это неверно, тогда найдутся четные числа i_0, i_1, j_0, j_1, такие, что $a_{i_0} < a_{i_1}$, $b_{j_0} < b_{j_1}$, $i_0, i_1 < 2q$, $j_0, j_1 < 2p$. Согласно китайской теореме об остатках для любых $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ найдется число $N_{\alpha,\beta} < 2pq$, такое что $N_{\alpha,\beta} = i_\alpha \bmod 2q$, $N_{\alpha,\beta} = j_\beta \bmod 2p$ (китайская теорема применяется к числам $i_\alpha/2$, $j_\beta/2$ и модулям q, p, а потом все умножается на 2). Тогда при $N = N_{\alpha,\beta}$ имеем в силу периодичности $c_N = a_N + b_N = a_{i_\alpha} + b_{j_\beta}$, значит $c_{N_{0,0}} = a_{i_0} + b_{j_0} < < a_{i_0} + b_{j_1} = c_{N_{0,1}} < a_{i_1} + b_{j_1} = c_{N_{1,1}}$, т. е. сумма последовательностей состоит не из двух, а хотя бы из трех разных чисел, что противоречит условию. Поэтому можно считать, что, например, в последовательности $\{a_i\}$ все члены a_{2i}, $i = 0, 1, 2, \ldots$, равны некоторому числу a. В силу q-антипериодичности $a_{2i+1} = -a_{q+2i+1} = -a$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, поэтому $\{a_i\} = = a, -a, a, -a, \ldots$, т. е. $\{a_i\}$ на самом деле антипериодична с периодом 1, а потому и антипериодична с любым нечетным периодом, например p. Но тогда антипериодична с тем же периодом p и сумма $\{c_i = a_i + b_i\}$, что доказывает лемму.

Замечание. Очевидно, таким же способом доказывается и следующая лемма (которая далее не понадобится).

Если сумма двух последовательностей, одна из которых периодична с периодом p, а другая периодична с периодом q, $(p, q) = 1$, есть последовательность, членами которой являются только два различных числа a, b, то эта последовательность тоже периодична либо с периодом p, либо с периодом q.

Для полноты приведем доказательство леммы 2 из [6]. Так как Φ_p, Φ_q при простых $p > q$ взаимно просты, то из известного свойства алгоритма Евклида следует существование многочленов $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg a(x) < < q$, $\deg b(x) < p$, таких, что $a(x)\Phi_p(x) + b(x)\Phi_q(x) = 1$. Если $g(x)$ — многочлен делящийся на Φ_n, то $g(x) = \Phi_n(x)h(x)$, откуда

$$g(x) = h(x)a(x)\Phi_n(x)\Phi_p(x) + h(x)b(x)\Phi_n(x)\Phi_q(x).$$

Деля $h(x)a(x)$ на $\Phi_q(x)$, имеем $h(x)a(x) = c(x)\Phi_q(x) + f_1(x)$, $\deg f_1(x) < q$, и предыдущее равенство перепишем в виде

$$\begin{aligned} g(x) &= f_1(x)\Phi_n(x)\Phi_p(x) + (c(x)\Phi_p(x) + h(x)b(x))\Phi_n(x)\Phi_q(x) = \\ &= f_1(x)\Phi_n(x)\Phi_p(x) + f_2(x)\Phi_n(x)\Phi_q(x), \\ f_2(x) &= c(x)\Phi_p(x) + h(x)b(x). \end{aligned}$$

Так как $\Phi_{pq}(x) = \dfrac{(x^{pq} - 1)(x - 1)}{(x^p - 1)(x^q - 1)}$, то $\Phi_n(x)\Phi_p(x) = \dfrac{x^{pq} - 1}{x^q - 1} = \Phi_p(x^q)$, значит $\Phi_n(x)\Phi_p(x) = \Phi_p(x^q)$, $\Phi_n(x)\Phi_q(x) = \Phi_q(x^p)$, поэтому предыдущее равенство можно переписать в виде $g(x) = f_1(x)\Phi_p(x^q) + f_2(x)\Phi_q(x^p)$. Так как $\deg f_1 < q$, $\deg g < n$, то $\deg f_1(x)\Phi_p(x^q) < q + (p - 1)q = pq = n$, значит

$\deg(f_2(x)\Phi_q(x^p)) = \deg(g(x) - f_1(x)\Phi_p(x^q)) < n$, поэтому $\deg f_2(x) < n - (q-1)p = p$, что и доказывает лемму.

Также для полноты приведем кратко доказательство из [1,2] неравенства Рейнхардта и условий его обращения в равенство. Пусть M^* — симметризация Минковского n-угольника M, т. е.

$$M^* = \frac{1}{2}(M + (-M)) = \{(x-y)/2 : x, y \in M\}.$$

Тогда множество M^* есть центрально-симметричный выпуклый $2m$-угольник, где $m \leqslant n$, с теми же периметром, диаметром и шириной что и у M. Из центральной симметричности M^* следует, что его внутренний радиус $r^* = b/2$ и внешний радиус $R^* = d/2$ (доказательства всех используемых фактов можно найти в [1,3]). Последовательность $n \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{n}$ строго монотонно убывает, а $n \sin \dfrac{\pi}{n}$ строго монотонно возрастает. Поэтому

$$2nb \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \leqslant \\ \leqslant 2mb \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m} = 4mr^* \operatorname{tg} \frac{\pi}{2m} \leqslant p \leqslant 4mR^* \sin \frac{\pi}{2m} = 2md \sin \frac{\pi}{2m} \leqslant \\ \leqslant 2nd \sin \frac{\pi}{2n}\,,$$

причем равенства $p = 2nb \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2n}$, $p = 2nd \sin \dfrac{\pi}{2n}$ лишь тогда справедливы, когда M^* есть правильный $2n$-угольник.

Для правильного n-угольника при нечетном n справедливы равенства $p = 2nb \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{2n} = 2nd \sin \dfrac{\pi}{2n}$, а при четном n ни одно из них не верно. Однако при четном n, не равном степени двойки, указанные равенства могут достигаться. Примеры n-угольников, для которых они достигаются, можно построить следующим образом[12)]. Представим n произвольным образом в виде $m(2k+1)$. Возьмем правильный $2k+1$-угольник с наибольшей диагональю d и с центром в каждой его вершине построим круг радиуса d. Выпуклая фигура, являющаяся пересечением построенных кругов — это правильный $2k+1$-угольник Рело. Ее диаметр равен d, а периметр πd. Ширина ее во всех направлениях одинакова и равна d (это фигура постоянной ширины). Впишем в нее n-угольник с равными сторонами так, чтобы среди его вершин содержались все вершины рассматриваемого $2k+1$-угольника. Каждая из $2k+1$ упомянутых дуг при этом будет разбиваться на m равных дужек, хорды которых будут сторонами рассматриваемого n-угольника. Диаметр его d, а ширина равна $b = d\cos(\pi/2n)$ — высоте равнобедренного треугольника с ребром d и углом при вершине π/n. Тогда его периметр равен $2nd \sin(\pi/2n) = 2b \operatorname{tg}(\pi/2n)$.

[12)] В [1] они назывались полуправильными n-угольниками

Укажем теперь вытекающее из приведенного доказательства полное описание n-угольников Рейнхардта (взятое из [2]). Пусть M такой n-угольник, тогда M^* — правильный $2n$-угольник (в противном случае равенство не достигается). Ориентируем все стороны многоугольника M^* в одном направлении и сопоставим им вектора, изображающие комплексные корни $2n$-й степени из единицы $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots \varepsilon^{2n-1}$, где $\varepsilon = \exp\dfrac{i\pi}{n}$. Тогда сторонам n-угольника M однозначно сопоставляется n-элементное множество, также обозначаемое M, лежащее в группе корней из единицы $W_{2n} = \{1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{2n-1}\}$. При подходящем выборе обозначений, можно считать $1 \in M$. Если расположить вектора этого множества в определенном порядке так, чтобы начало очередного вектора вектора совпало с концом предыдущего, то они будут ограничивать n-угольник, подобный n-угольнику M. Естественно, центрально-симметричному многоугольнику $(-M)$ соответствует множество $(-M)$ такое, что $M \cap (-M) = \varnothing$. Ясно, что условия $M \cap (-M) = \varnothing$ и $M \cup (-M) = W_{2n}$ равносильны. Они равносильны также тому, что в каждой паре противоположных векторов $\{\varepsilon^i, \varepsilon^{n+i} = -\varepsilon^i\}$ один принадлежит M, а другой принадлежит $-M$. Также очевидно, что $\sum\limits_{\varepsilon^i \in M} \varepsilon^i = 0$, так как сумма векторов, в которые превращаются ориентированные в одном направлении стороны многоугольника, равна нулю. Расположение векторов в любом другом порядке, хотя и имеет всегда сумму равную нулю, приводит к невыпуклому или самопересекающемуся многоугольнику. Рассмотрим многочлен $f_M(x) = \sum\limits_{\varepsilon^i \in M} x^i$, степени, меньшей $2n$, состоящий из $n-1$ одночленов и единичного свободного члена. Его корнем будет $x = \epsilon$. Заменим в этом многочлене каждый член x^{n+i} на $-x^i$, $0 \leqslant i < n$. Полученный многочлен обозначим $g_M(x)$. Он состоит из $n-1$ различных одночленов с коэффициентами ± 1 (в силу условия $M \cap (-M) = \varnothing$) и единичного свободного члена, имеет степень меньше n, значит он не содержит нулевых коэффициентов. Его корнем также будет $x = \epsilon$. Согласно известным свойствам круговых многочленов (см., например, [5, 8, 10] и любой курс алгебры) последнее условие равносильно делимости $g_M(x)$ на круговой многочлен $\Phi_{2n}(x)$. По любому многочлену $g_M(x)$, удовлетворяющему указанным условиям, однозначно восстанавливается многочлен $f_M(x)$, множество M, соответствующее ему двухцветное ожерелье (см. [2]) и сам n-угольник Рейнхардта M. Поэтому задача описания всех таких n-угольников является чисто алгебраической (что и было показано в [2]).

Легко видеть, что условие антипериодичности коэффициентов многочлена g_M равносильно условию периодичности коэффициентов многочлена f_M, множества M и соответствующего ему двухцветного ожерелья. Из условия антипериодичности с периодом t (тогда обязательно n/t нечетно)

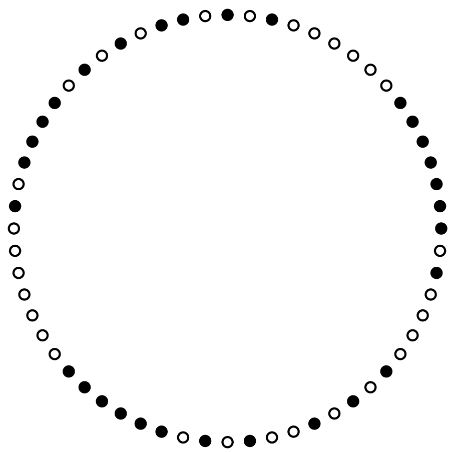

Рис. 1. Непериодическое ожерелье для 30-угольника Рейнхардта

коэффициентов $g_M(x)$ следует равенство $g_M(x) = h(x)(1 - x^t + x^{2t} - \ldots - x^{n-t})$, $\deg h < t$, из которого очевидно следует равенство $g_M(\epsilon) = 0$ (а значит, и условие $\Phi_{2n} \mid g_M$).[13)]

В качестве примера различия между многочленами Рейнхардта, использованными в [6, 7], и нашими многочленами, рассмотрим спорадический 30-угольник, найденный в [7] (там было доказано, что при $n < 30$ спорадических n-угольников не существует). Опишем его вначале, используя введенные выше множества, ожерелья и многочлены. Возьмем при $\varepsilon = e^{i\pi/30}$, $\varepsilon^{60} = 1$ непериодическое множество

$$\{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5, \varepsilon^6, -\varepsilon^7, -\varepsilon^8, -\varepsilon^9, -\varepsilon^{10}, -\varepsilon^{11}, -\varepsilon^{12}, \varepsilon^{13}, -\varepsilon^{14}, \varepsilon^{15}, -\varepsilon^{16}, \\ \varepsilon^{17}, \varepsilon^{18}, -\varepsilon^{19}, \varepsilon^{20}, -\varepsilon^{21}, \varepsilon^{22}, -\varepsilon^{23}, \varepsilon^{24}, \varepsilon^{25}, \varepsilon^{26}, \varepsilon^{27}, -\varepsilon^{28}, \varepsilon^{29}\}$$

(в этой записи использовалось тождество $\varepsilon^i = -\varepsilon^{30+i}$, $i = 0, \ldots, 29$). Соответствующее ему ожерелье см. на рис. 1.

Проверим, что соответствующий многочлен $g(x)$ имеет корень ε. Для этого нужно установить, что

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6 - \varepsilon^7 - \varepsilon^8 - \varepsilon^9 - \\ - \varepsilon^{10} - \varepsilon^{11} - \varepsilon^{12} + \varepsilon^{13} - \varepsilon^{14} + \varepsilon^{15} - \varepsilon^{16} + \varepsilon^{17} + \varepsilon^{18} - \varepsilon^{19} + \varepsilon^{20} - \\ - \varepsilon^{21} + \varepsilon^{22} - \varepsilon^{23} + \varepsilon^{24} + \varepsilon^{25} + \varepsilon^{26} + \varepsilon^{27} - \varepsilon^{28} + \varepsilon^{29} = 0.$$

Непосредственно это сделать затруднительно, но можно непосредственно проверить, что

[13)] Геометрическое доказательство см. в [2].

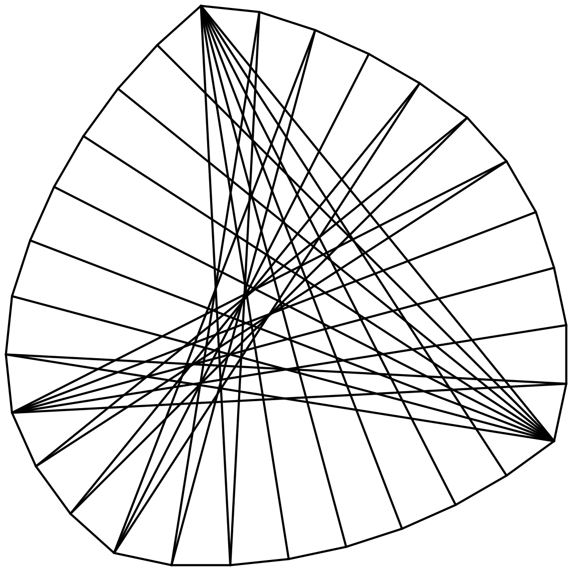

Рис. 2. Непериодический 30-угольник Рейнхардта, соответствующий ожерелью рис. 1

$$(x^{13}-x^{12}+2x^{10}+x^9-x^8-x^7+x^6+x^5+x^4+x+1)\cdot$$
$$\cdot(1+x^2-x^6-x^8-x^{10}+x^{14}+x^{16})=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6-$$
$$-x^7-x^8-x^9-x^{10}-x^{11}-x^{12}+x^{13}-x^{14}+x^{15}-x^{16}+x^{17}+x^{18}-$$
$$-x^{19}+x^{20}-x^{21}+x^{22}-x^{23}+x^{24}+x^{25}+x^{26}+x^{27}-x^{28}+x^{29},$$

и заметить, что $\Phi_{60}(\varepsilon)=-1+\varepsilon^2-\varepsilon^6-\varepsilon^8-\varepsilon^{10}+\varepsilon^{14}+\varepsilon^{16}=0$, так как

$$0=(\varepsilon^{30}+1)(\varepsilon^2+1)=(\varepsilon^6+1)(\varepsilon^{10}+1)(1+\varepsilon^2-\varepsilon^6-\varepsilon^8-\varepsilon^{10}+\varepsilon^{14}+\varepsilon^{16}),$$
$$\varepsilon^6+1\neq 0,\quad \varepsilon^{10}+1\neq 0.$$

Непериодический 30-угольник Рейнхардта, соответствующий ожерелью рис. 1, изображен на рис. 2. Кроме сторон, на нем показаны также его диаметры.

В [7] для построения этого же 30-угольника использовался многочлен Рейнхардта

$$r(x)=$$
$$=1-x^7+x^{13}-x^{14}+x^{15}-x^{16}+x^{17}-x^{19}+x^{20}-x^{21}+x^{22}-x^{23}+x^{24}-x^{28}+x^{29},$$

найденный компьютерным поиском. Тот факт, что он делится на Φ_{60} (и имеет корнем ε) следует из тождества

$$(x^{13}-x^{12}-x^{11}+x^{10}+x^{9}-x^{7}+x^{4}-x^{2}+1)(x^{16}+x^{14}-x^{10}-x^{8}-x^{6}+x^{2}+1) = r(x).$$

Многочлен $r(x)$ факторизован программой Maple, но проверку уже найденного тождества можно при желании выполнить и вручную.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 11–01–00508а.

Список литературы

[1] Гашков С. Б. *Неравенства для площади и периметра выпуклого многоугольника* // Квант, №10. 1985. С. 15–19.

[2] Гашков С. Б. *Неравенства для выпуклых многоугольников и многоугольники Рейнхардта* // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 11. 2007. С. 91–103.

[3] Яглом И. М., Болтянский В. Г. *Выпуклые фигуры*. М.: ГИТТЛ. 1951.

[4] Audet C., Hansen P., Messine F. *Isoperimetric polygons of maximum width* // Discrete Comput. Geom. Vol. 41, no 1. 2009. P. 45–60.

[5] de Bruijn N. G. *On the factorization of cyclic groups* // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. Vol. 15. 1953. P. 370–377.

[6] Hare K. G., Mossinghoff M. J. *Sporadic Reinhardt polygons*. arXiv:1203.4107v2. 2012.

[7] Mossinghoff M. J. *Enumerating isodiametric and isoperimetric polygons* // Journal of Combinatorial theory. Ser. A. Vol. 118, no 6. 2011. P. 1801–1815.

[8] Rédei L. *Über das Kreisteilungspolynom* // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. Vol. 5. 1954. P. 27–28. MR 0062760 (16,13h).

[9] Reinhardt K. *Extremal Polygone gegebenen Durchmessers* // Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. Bd. 31. 1922. S. 251–270.

[10] Schoenberg I. J. *A note on the cyclotomic polynomial* // Mathematika. Vol. 11. 1964. P. 131–136.

С. Б. Гашков, механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова

Email: `sbgashkov@gmail.com`