# Преподавание математики

# Дискретный анализ для математиков и программистов (подборка задач)

Д. Ильинский А. Купавский А. Райгородский*
А. Скопенков†

## Введение

Мы приводим подборки задач по комбинаторике и теории графов (в том числе случайных). Эти задачи будут полезны руководителям и участникам кружков для старшеклассников и младшекурсников, ориентированных на олимпиады. Некоторые приводимые красивые задачи и важные темы малоизвестны в парадигме кружков по математике, но полезны как для математического образования, так и для подготовки к олимпиадам.

Решение этих задач будет полезно также всем, кто хочет стать математиком, специалистом по computer science или программистом-разработчиком. Именно таких специалистов мы готовим на факультете инноваций и высоких технологий Московского Физико-Технического Института. Приведённые задачи используются при изучении курса дискретного анализа на этом факультете, который читает с 2009 проф. А. М. Райгородский. Мы благодарим студентов за каверзные вопросы и указания на неточности.

Формулировки большинства задач доступны старшеклассникам, интересующимся математикой; мы приводим все определения, не так часто изучаемые на кружках. Однако многие задачи трудны, для их решения

*Поддержан грантом РФФИ 12-01-00683 и грантом поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1.

†Частично поддержан грантом фонда Саймонса.

нужно предварительно прорешать другие приведённые задачи на данную тему или знать лекционный материал.

## Общие соглашения и определения

Если условие задачи является утверждением, то в задаче требуется это утверждение доказать. Если некоторая задача не получается, то читайте дальше — соседние задачи могут оказаться подсказками.

Если не оговорено противное, асимптотики и пределы рассматриваются при $n \to \infty$.

*Графом без петель и кратных рёбер* $G = (V, E)$ называется конечное множество $V = V(G)$, некоторые двухэлементные подмножества (т. е. неупорядоченные пары несовпадающих элементов) которого выделены. Граф без петель и кратных рёбер мы коротко называем графом. Элементы данного множества $V$ называются *вершинами*. Выделенные пары вершин называются *рёбрами*. Если вершина принадлежит ребру, то говорится, что ребро называется *проходящим* через эту вершину или *инцидентным* этой вершине. Множество выделенных подмножеств обозначается $E = E(G)$. Если не оговорено противное, то через $n$ и $e$ обозначаются соответственно количества вершин и рёбер рассматриваемого графа.

Приведённое определение не годится для *графов с петлями и кратными рёбрами* (мультиграфов). С ними мы почти не работаем и определяем там, где они используются.

Граф можно представлять себе как набор точек (например, на плоскости), некоторые пары которых соединены ломаными, причём одна пара вершин не может быть соединена более чем одной линией. Точки называются *вершинами* графа, а ломаные — *рёбрами*. Ломаные могут пересекаться, но точки пересечения «не считаются», то есть не являются вершинами.

*Степенью* вершины графа называется число выходящих из неё рёбер.

*Путём* в графе называется последовательность вершин, в которой любые две соседние вершины соединены ребром.

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём.

Ясно, что «соединённость некоторым путём» является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. *Связной компонентой* графа называется класс эквивалентности.

Граф, у которого проведены все возможные ребра между вершинами называется *полным* и обозначается $K_n$. Если вершины графа можно разделить на две части так, что не существует рёбер, соединяющих вершины из одной и той же части, то граф называется *двудольным*, а части называются *долями*. Через $K_{m,n}$ обозначается двудольный граф с долями из

$m$ и из $n$ вершин, в котором имеются все ребра между вершинами разных долей.

*Изолированной вершиной* называется вершина, из которой не выходит ни одного ребра.

Раскраска вершин графа в несколько цветов называется *правильной*, если концы любого ребра разноцветны.

## 1. Комбинаторика и биномиальные коэффициенты

1.1.

(a) $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

(b) $$\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = (k+1)\left\{ {n \atop k+1} \right\} + \left\{ {n \atop k} \right\}.$$

(c) $$\left| {n+1 \atop k+1} \right| = \left| {n \atop k+1} \right| + 2^{n-k}\left| {n \atop k} \right|.$$

Здесь $\binom{n}{k}$, $\left\{ {n \atop k} \right\}$, $\left| {n \atop k} \right|$ — соответственно количества

– $k$-элементных подмножеств $n$-элементного множества (другое обозначение: $C_n^k$);

– разбиений $n$-элементного множества на $k$ частей (т. е. непустых подмножеств), разбиения считаются неупорядоченными, т. е. $\{1, 2\} \cup \{3\} = \{3\} \cup \{1, 2\}$;

– $k$-мерных линейных подпространств линейного пространства $\mathbb{Z}_2^n$.

1.2. Найдите «явную» формулу для

$$\text{(a)} \sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{2k}; \quad \text{(b)} \sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{4k}; \quad \text{(c)} \sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{3k}.$$

В ответе используйте только целочисленные функции целочисленного аргумента.

Будут полезны *тригонометрическая форма комплексного числа* $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = \sqrt{a^2+b^2}$ и $\varphi = \operatorname{arctg}(b/a)$ или $\varphi = \operatorname{arctg}(b/a) + \pi$, *формула Муавра* $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

1.3. (a) Во скольких подмножествах множества $\{1, 2, 3, \ldots, 11\}$ не найдётся двух подряд идущих чисел?

(b) То же для *трёх* подряд идущих чисел.

1.4. (a) При фиксированном $n$ число $\binom{n}{k}$ максимально при $k = [n/2]$.

(b) *Best in their own ways*. В математической олимпиаде участвовало $k$ школьников. Выяснилось, что для любых двух школьников $A$ и $B$ нашлась задача, которую решил $A$ и не решил $B$, и задача, которую решил $B$, но не решил $A$. Какое наименьшее возможное количество $n$ задач могло быть при этом условии?

Иными словами, найдите наименьшее возможное $n$, для которого найдётся такое семейство из $k$ подмножеств $n$-элементного множества, что ни одно из подмножеств семейства не содержится (собственно) в другом.

<u>1.5</u>. (a) Найдите $\genfrac{|}{|}{0pt}{}{2}{k}$ для $k=0,1,2$. (b) Найдите $\genfrac{|}{|}{0pt}{}{3}{k}$ для $k=0,1,2,3$. (c) $\genfrac{|}{|}{0pt}{}{n}{0}=\genfrac{|}{|}{0pt}{}{n}{n}=1$, $\genfrac{|}{|}{0pt}{}{n}{1}=\genfrac{|}{|}{0pt}{}{n}{n-1}=2^n-1$. (d) $\genfrac{|}{|}{0pt}{}{n}{k}=\genfrac{|}{|}{0pt}{}{n}{n-k}$. (e) Найдите $\genfrac{|}{|}{0pt}{}{n}{2}$. (f) Найдите $\genfrac{|}{|}{0pt}{}{n}{k}$.

## 2. Плоские графы

*Плоским графом* называется изображение графа на плоскости, для которого любые два ребра пересекаются только по их общим вершинам (в частности, если таких вершин нет, то не пересекаются).

Иногда такое изображение называют просто графом, но это неточно, поскольку планарный граф можно изобразить (без самопересечений) на плоскости разными способами.

*Рис. 1. Различные изображения графа на плоскости*

Плоский граф делит плоскость на части, называемые *гранями* графа.

<u>2.1</u>. Формула Эйлера. (a) Для связного плоского графа с $V$ вершинами, $E$ рёбрами и $F$ гранями имеем $V-E+F=2$. (Доказательство этой теоремы см., например, в [1].)

(b) Найдите аналог этого результата для плоского графа с $k$ компонентами связности.

<u>2.2</u>. *Применения формулы Эйлера.* (a) Ни один из графов $K_5$ и $K_{3,3}$ (см. рис. 2) невозможно без самопересечений нарисовать на плоскости.

(b) На плоскости отмечено $n$ точек. Разрешается соединять некоторые две из них ломаной, не проходящей через другие точки. Два игрока по очереди соединяют ломаной какие-то две ещё не соединённые точки. При этом требуется, чтобы эти ломаные не самопересекались и не пересекались нигде, кроме отмеченных точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от $n$)?


*Рис. 2. Графы Куратовского*

(c) Опишите (с точностью до изоморфизма) плоские графы, у которых степени всех вершин равны и «степени» всех граней равны (т. е. в границе разных граней одинаковое количество рёбер).

Указание к (a), (b) и (c): если не получается, то решайте следующие пункты. Определение изоморфизма см. в задаче 3.5.

(d)* Выпуклых *правильных* многогранников (все грани — правильные многоугольники с одинаковым числом сторон, степени всех вершин равны) ровно 5 (с точностью до изоморфизма их графов). Конструкцию соответствующих многогранников нужно привести, она не предполагается известной.

(e) Для любого плоского связного графа без петель и кратных рёбер, имеющего более двух вершин, $2E \geqslant 3F$ и $E \leqslant 3V - 6$.

(f) В любом плоском графе есть вершина степени не более 5.

(g) Если каждая вершина плоского связного графа имеет степень $d$, а в границе каждой грани ровно $k \geqslant 3$ рёбер, то $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{E}$ .

2.3. Вершины любого плоского графа можно правильно раскрасить в (a) 6 цветов; (b) 5 цветов; (c)** [Все равно не докажете].

Тор и лист Мёбиуса изображены на рис. 3. Эти фигуры предполагаются *прозрачными*. Т. е. точка (или подмножество), «лежащая на одной стороне поверхности», «лежит и на другой стороне». Это аналогично тому, что при изучении геометрии мы говорим, например, о треугольнике на плоскости, а не о треугольнике на верхней (или нижней) стороне плоскости.

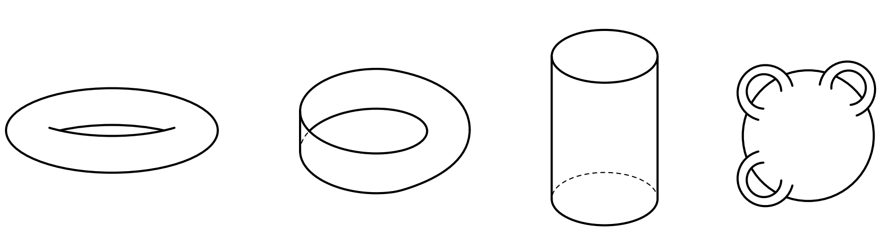

*Рис. 3. Тор, лист Мёбиуса, цилиндр и сфера с ручками*

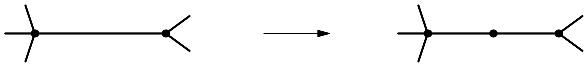

*Рис. 4. Подразделение ребра*

2.4. Нарисуйте без самопересечений (a) $K_5$ на торе. (b) $K_{3,3}$ на листе Мёбиуса.

Грубо говоря, *подграф* данного графа — это его часть. Формально, граф $G$ называется *подграфом* графа $H$, если множество вершин графа $G$ содержится в множестве вершин графа $H$ и каждое ребро графа $G$ является ребром графа $H$. При этом две вершины графа $G$, соединённые ребром в графе $H$, не обязательно соединены ребром в графе $G$.

Ясно, что любой подграф планарного графа планарен.

Операция *подразделения ребра* графа показана на рисунке 4.

Два графа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним. Или, эквивалентно, если существует граф $G$, полученный из обоих данных графов операциями подразделения ребра.

Ясно, что гомеоморфные графы являются или не являются планарными одновременно.

Теорема Куратовского. Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу $K_5$ или $K_{3,3}$ (рис. 2). (Доказательство этой теоремы см., например, в [6].)

2.5. Придумайте алгоритм

(a) распознавания планарности графа (здесь можно использовать без доказательства теорему Куратовского);

(b)* рисования без самопересечений заведомо планарного графа на плоскости.

Найдите асимптотику сложности вашего алгоритма в зависимости от числа $n$ рёбер графа, т. е. асимптотику максимума по графам с $n$ рёбрами от числа шагов в алгоритме, применённому к данному графу. (Известны линейные алгоритмы, но у вас вряд ли получится даже полиномиальный.)

См. «определение» нахождения асимптотики в задаче 8.1.a.

## 3. Перечисление графов

Заметим, что графы $(\{1,2,3\},\{\{1,2\}\})$ и $(\{1,2,3\},\{\{1,3\}\})$ различны. Графом называется именно граф, а не класс изоморфизма графов (определение изоморфизма напомнено в задаче 3.5, где оно используется). Или, говоря неформально, вершины графов считаются занумерованными. Поэтому граф иногда называют помеченным графом.

*Мультиграфом* (или графом с петлями и кратными рёбрами) называется квадратная таблица из целых неотрицательных чисел, симметричная относительно главной диагонали.

*Ориентированным графом (без петель и кратных рёбер)* $G = (V, E)$ называется конечное множество $V = V(G)$, некоторые *упорядоченные* пары несовпадающих элементов которого выделены.

*Ориентированным мультиграфом* (или ориентированным графом с петлями и кратными рёбрами) называется квадратная таблица из целых неотрицательных чисел.

Читатель легко сообразит, как изображать (с самопересечениями) ориентированные или неориентированные графы и мультиграфы на плоскости.

Ребра $ab$ и $ba$ ориентированного графа не считаются кратными.

3.1. Сколько всего графов с $n$ вершинами

(a) ориентированных без кратных рёбер, но, возможно, с петлями?

(b) неориентированных без петель, но, возможно, с кратными рёбрами?

3.2. Сколько всего графов с $n$ вершинами и $k$ рёбрами

(a) неориентированных без петель и кратных рёбер?

(b) неориентированных графов, у которых допускаются кратные ребра и петли?

3.3. Каких графов с $n$ вершинами больше:

(a) имеющих изолированную вершину (т. е., вершину, из которой не выходит ни одного ребра) или нет?

(b) связных или несвязных?

*Циклом* называется путь, в котором первая и последняя вершины совпадают. Путь (цикл) называется *несамопересекающимся*, если он проходит по каждой своей вершине только один раз. Граф называется *деревом*, если он связен и не содержит несамопересекающихся циклов. Граф называется *лесом*, если он не содержит несамопересекающихся циклов. Граф называется *унициклическим*, если он становится лесом после удаления некоторого ребра. Или, эквивалентно, если он имеет ровно один несамопересекающийся цикл.

3.4. Каких графов больше, деревьев со 100 вершинами или связных унициклических графов с 98 вершинами?

3.5. Грубо говоря, графы изоморфны, если они одинаковы (при этом их изображения на плоскости могут быть разными). Формально, графы $G_1$ и $G_2$ (без петель и кратных рёбер) называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение $f : V_1 \to V_2$ множества $V_1$ вершин графа $G_1$ на множество $V_2$ вершин графа $G_2$, удовлетворяющее условию: *вершины* $A, B \in V_1$ *соединены ребром в том и только в том случае, если вершины* $f(A), f(B) \in V_2$ *соединены ребром.*

Количество классов изоморфизма деревьев с $n$ вершинами (т. е. количество различных деревьев с $n$ незанумерованными вершинами) меньше $4^n$.

*Код Прюфера* сопоставляет дереву с вершинами $1, 2, \ldots, n$ последовательность чисел от 1 до $n$ по следующему алгоритму.

Сначала код Прюфера — пустое слово. Пока количество вершин больше двух

1. Выбирается *лист* (вершина степени 1) $v$ с минимальным номером.
2. В код Прюфера добавляется номер вершины, смежной с $v$.
3. Вершина $v$ (и инцидентное ей ребро) удаляются из дерева.

Когда осталось две вершины, алгоритм завершает работу.

3.6. (a) Найдите код Прюфера дерева с вершинами $1, 2, \ldots, 10$ и рёбрами $(8, 9)$, $(8, 4)$, $(4, 10)$, $(10, 3)$, $(3, 5)$, $(10, 6)$, $(10, 1)$, $(1, 7)$, $(1, 2)$.

(b) Восстановите дерево по коду Прюфера 1,1,2,5,4,2,7.

(c) *Формула Кэли.* Число деревьев с $n$ вершинами равно $n^{n-2}$.

3.7. (a) Последовательность из $n$ положительных целых чисел является последовательностью степеней вершин некоторого дерева тогда и только тогда, когда сумма её членов равна $2n - 2$.

(b) Если сумма целых положительных чисел $d_1, \ldots, d_n$, равна $2n - 2$, то количество деревьев с $n$ вершинами, у которых $i$-я вершина имеет степень $d_i$, равно $\dfrac{(n-2)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_n-1)!}$. Иными словами, $(x_1 + \ldots + x_n)^{n-2} = \sum_T x_1^{\deg_T(1)-1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\deg_T(n)-1}$, где сумма — по всем деревьям $T$ с вершинами $1, 2, \ldots, n$, и через $\deg_T(k)$ обозначена степень вершины $k$ дерева $T$.

(c) Найдите число связных унициклических графов с $n$ вершинами.

3.8.* Пусть $T_1, \ldots, T_r$ — деревья, множества вершин которых не пересекаются. Сколько есть деревьев, множество вершин которых есть объединение множества вершин этих $r$ деревьев, и которые содержат $T_1, \ldots, T_r$?

## 4. Эйлеровы пути и циклы в графах

4.1. Вершины графа можно раскрасить в 2 цвета так, что каждое ребро будет иметь разноцветные концы, тогда и только тогда, когда граф содержит циклы только чётной длины.

*Эйлеров цикл* (путь) — цикл (путь), проходящий по всем рёбрам графа ровно по одному разу.

4.2. (a) В связном графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины четна.

(b) При каком условии в графе существует эйлеров путь?

(c) При каком условии в *ориентированном* графе существует ориентированный эйлеров цикл?

4.3. (a) При каких $n$ граф $K_n$ имеет эйлеров цикл? (b) То же для графа $K_{m,n}$.

4.4. На рёбрах графа, у которого степень каждой вершины четна, можно поставить стрелки так, что у каждой вершины входящая степень будет совпадать с исходящей.

4.5. Если количество вершин нечётной степени в связном графе равно $2k$, то множество его рёбер можно представить в виде объединения $k$ путей, никакой из которых не проходит ни по какому ребру дважды и никакие два из которых не имеют общих рёбер.

4.6. Грани эйлерова плоского графа можно правильно раскрасить в 2 цвета.

4.7. (a) Математик забыл трёхзначный код своего замка́. Замок открывается, если три цифры кода набраны подряд (даже если перед этим были набраны другие цифры). Математик набирает одну цифру в секунду; набранная цифра добавляется в конец. Докажите, что математик сможет открыть замок за 1002 секунды, если в коде могут быть использованы только десять цифр.

(b) Сформулируйте и докажите правило «$0 < 1 < 2 < \dots < 8 < 9$» открытия замка за 1002 секунды.

4.8. Пусть дан ориентированный граф $G$, у которого на каждом ребре $e$ написан вес $v(e)$. (Этот вес можно понимать как работу, которую нужно затратить для того, чтобы пройти по ребру от начала до конца.) Функция $p\colon V(G) \to \mathbb{R}$ («потенциал») такая, что $v(x, y) = p(x) - p(y)$ для любого ребра $e = (x, y)$ существует тогда и только тогда, когда суммарный вес ребер вдоль любого цикла равен нулю (при прохождении ребра по циклу в направлении, противоположном ориентации, вес в сумму берется с отрицательным знаком).

4.9.* Дан связный ориентированный граф с вершинами $1, \dots, n$, у которого входящая степень $d_k$ каждой вершины $k$ равна исходящей.

(a) Существует дерево, содержащее все вершины ориентированного графа, у которого все ребра направлены в сторону вершины 1.

(b) Фиксируем дерево $T$ из (a). Будем обходить ориентированный граф (по стрелкам), проходя по каждому ребру не более одного раза. Сначала выйдем из вершины 1 в произвольном направлении. Далее, пусть мы пришли в некоторую вершину $v$. Выходим из нее по любому ребру, не принадлежащему $T$, если это возможно. А если невозможно, то выходим из нее по ребру, принадлежащему $T$ (такое ребро единственно). Докажите, что обход закончится в вершине 1 и что в результате обхода получится ориентированный эйлеров цикл.

(c) Число ориентированных эйлеровых циклов в ориентированном графе кратно числу $(d_1 - 1)! \cdot \ldots \cdot (d_n - 1)!$.

## 5. Теорема Турана. Дистанционные графы

*Треугольником* в графе называется цикл длины 3.

5.1. (a) Если граф не содержит треугольников, то $e \leqslant n^2/4$.

(b) Если $e = [n^2/4] + 1$, то в графе есть по крайней мере $[n/2]$ треугольников.

(c) Если $n = km$ и граф не содержит полного подграфа с $k+1$ вершинами, то $2e \leqslant k(k-1)m^2$. (Переходя к дополнительному графу, получаем, что если $n = km$ и среди любых $k+1$ вершин некоторые две соединены ребром, то $2e \geqslant km(m-1)$.)

(d) Если среди любых $k+1$ вершин некоторые две соединены ребром, $m := [n/k]$ и $r := k\{n/k\}$, то $2e \geqslant km(m-1) + 2mr$.

5.2. (a) Если граф двудолен и не содержит цикла длины 4, то $e \leqslant$ $\leqslant n^{3/2}/2$.

(b) В любом графе есть двудольный подграф, содержащий не менее половины ребер графа.

(c) Если граф не содержит цикла длины 4, то $e \leqslant n^{3/2}$.

(d) Если граф не содержит подграфа $K_{2,3}$, то $e \leqslant 2n^{3/2}$.

(e) Если граф не содержит подграфа $K_{3,3}$, то $e \leqslant 2n^{5/3}$.

(f)* Для любых целых $s, t$, $0 < s \leqslant t$, если граф с не содержит подграфа $K_{s,t}$, то $e \leqslant (s+t)v^{2-1/s}$.

5.3. Для любых $n$ точек на плоскости существует не более $n$ *диаметров*, т. е. (неупорядоченных) пар точек, расстояние между которыми равно максимуму из всех возможных расстояний между парами из этих $n$ точек.

5.4. Для любых $n$ точек $A_1, \ldots, A_n$ в $\mathbb{R}^d$ обозначим через $D(A_1, \ldots, A_n)$ число (неупорядоченных) пар точек, расстояние между которыми равно 1. Обозначим

$$E_n(d) = \max\{D(A_1, \ldots, A_n) \ : \ A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^d\}.$$

(a) $E_n(2) > n[\log_2 n]/4$. (b) $E_n(2) \leqslant 2n^{3/2}$. (c) $E_n(3) \leqslant 2n^{5/3}$.

(d) $\dfrac{(n-1)^2}{4} \leqslant E_n(4) \leqslant \dfrac{2(n+4)^2}{5}$.

5.5. (a) Пусть $V$ — $11^k$-элементное подмножество пространства $\mathbb{R}^k$, любое $10^k$-элементное подмножество которого содержит две точки $x, y$

на расстоянии 1: $|x-y|=1$. Докажите, что для достаточно большого $k$ количество единичных расстояний между точками множества $V$ больше, чем $12^k/2$:

$$\frac{1}{2}\,|\{(x,y)\in V\times V\colon\ |x-y|=1\}| > \frac{12^k}{2}\,.$$

(b) То же больше, чем $12.1^k$.

## 6. Гамильтоновы циклы и пути

*Гамильтонов путь* (*цикл*) в графе — путь (цикл), проходящий через каждую вершину ровно по одному разу.

6.1. *Реберным графом* графа $G$ называется граф, вершины которого — ребра графа $G$; две вершины реберного графа соединены ребром, если соответствующие ребра графа $G$ имеют общую вершину. Найдите в терминах графа $G$ необходимое и достаточное условие наличия гамильтонова цикла в его реберном графе.

6.2. (a) Граф, сумма степеней любых двух несмежных вершин которого не меньше $n-1$, имеет гамильтонов путь.

(b) Граф, сумма степеней любых двух несмежных вершин которого не меньше $n$, имеет гамильтонов цикл.

(c) Если граф связен и $2e \geqslant n^2-3n+6$, то в нем есть гамильтонов цикл.

(d) Если среди любых $k+1$ вершин графа есть ребро и после удаления любой $k-1$ вершины граф остается связным, то в нем есть гамильтонов путь.

6.3. [Метод Дирака] Если $a_1,\ldots,a_k$ — максимальный путь среди несамопересекающихся по вершинам путей в графе, $k\geqslant 3$ и $\deg a_1+\deg a_k\geqslant k$, то в этом графе есть несамопересекающийся цикл длины $k$.

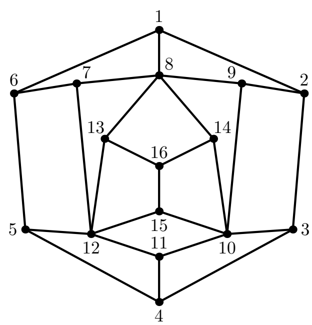


*Рис. 5.*

6.4. В графе на рис. 5 нет гамильтонова пути.

6.5. Максимальное число попарно непересекающихся по ребрам гамильтоновых циклов в полном графе $K_n$ равно $\left[\frac{n-1}{2}\right]$.

## 7. Хроматический многочлен и многочлен Татта

Обозначим через $\chi(G)$ минимальное количество цветов, в которые можно правильно покрасить вершины графа $G$.

7.1. Если для некоторого $k$ в графе с $n$ вершинами среди любых $k+1$ вершин есть ребро, то вершины невозможно правильно покрасить менее, чем в $n/k$ цветов.

Через $G-e$ обозначим граф, получаемый удалением из $G$ ребра $e$. Через $G/e$ обозначим граф, получаемый склеиванием концов ребра $e$ (при этом могут образоваться кратные ребра). *Мостом* называется ребро, при удалении которого количество связных компонент увеличивается. *Остовом графа* называется любое поддерево, содержащее все вершины графа.

7.2. (a) На какое число может измениться хроматическое число графа $G$, если добавить к графу одно ребро? Или, формально, найдите все целые $k$, для которых существует граф $G$ и его ребро $e$ такие, что $\chi(G) - \chi(G-e) = k$.

(b) $\chi(V, E_1 \cup E_2) \leqslant \chi(V, E_1)\chi(V, E_2)$.

(c) Для каждого $r > 0$ постройте такие $V, E_1, E_2$, что $\chi(V, E_1 \cup E_2) = \chi(V, E_1)\chi(V, E_2)$ и $\chi(V, E_1) = r$.

7.3. (a) Если максимальная степень вершины графа $G$ равна $\Delta(G)$, то $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

(b) Если дан граф $G$ с $n$ вершинами и $e$ ребрами, причём при удалении любой вершины хроматическое число уменьшается, то $2e \geqslant n(\chi(G) - 1)$.

7.4. (a) Для любого ребра $e$ графа $G$ выполнено $\chi(G) = \chi(G-e) - \chi(G/e)$. (Можно считать, что кратные ребра в графе $G/e$ заменены на некратные.)

(b) *Теорема Биркгофа – Уитни.* Число $\chi_G(t)$ правильных раскрасок графа $G$ в $t$ цветов есть многочлен от $t$.

(c) Его степень равна количеству вершин, старший коэффициент 1, второй коэффициент равен числу рёбер в графе, взятому со знаком минус, коэффициенты знакопеременны (т. е. коэффициенты при $t^{n-2k}$ неотрицательны и коэффициенты при $t^{n-2k+1}$ неположительны для любого целого $k$).

7.5. Вычислите хроматический многочлен для (a) полного графа; (b) пустого графа; (c) цепи; (d) цикла; (e) данного дерева с $n$ вершинами.

7.6. (a) Если хроматический многочлен графа есть $t(t-1)^{n-1}$, то граф — дерево.

(b) Не существует графа с хроматическим многочленом $t^4 - 3t^3 + 3t^2$.

7.7. Для графов с петлями и кратными рёбрами $T(G) = T(G - e) + T(G/e)$, где $e$ — ребро графа $G$, не являющееся ни петлей, ни мостом, и $T(G)$ —

(1,1) число остовных лесов (т. е. объединений остовных деревьев его компонент).

(1,2) число таких наборов рёбер, что для любой компоненты связности графа лежащие в ней ребра из набора образуют связный подграф.

(2,1) число ациклических наборов рёбер.

7.8. *Теорема Татта.* В мультимножестве (т. е. в неупорядоченном наборе с кратностями) графов разрешается для любого графа $G$ и его ребра $e$, не являющегося ни петлей, ни мостом, заменять один граф $G$ на два графа $G - e$, $G/e$. Эта замена применяется до тех пор, пока не останутся только графы, в которых все ребра являются петлями или мостами. Тогда для любого исходного графа полученное мультимножество корректно определено, т. е. не зависит от порядка графов и рёбер, к которым мы применяем замены.

*Многочленом Татта* называется многочлен $T(x, y)$ от двух переменных, определённый рекуррентной формулой $T_G = T_{G-e} + T_{G/e}$, если $e$ не петля и не мост, и $T_G(x, y) = x^i y^j$, если $G$ имеет $i$ мостов, $j$ петель и не имеет других рёбер.

7.9. (a) Выразите хроматический многочлен через многочлен Татта.

(b) Почему так странно занумерованы пункты в задаче 7.7?

## 8. Асимптотики

Будет полезна *формула Стирлинга* $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

8.1. (a) Найдите асимптотику для количества $A_n$ подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, не содержащих двух подряд идущих чисел.

(Иными словами, найдите «явную» функцию $f(n)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{A_n}{f(n)} = 1$.)

(b*) То же для *трёх* подряд идущих чисел.

В ответе можно использовать функцию $x_P(a, b)$, которая по числам $a, b$ и многочлену $P$, имеющему единственный корень на отрезке $[a, b]$, выдаёт этот корень.

8.2. (a) $\dfrac{2^n}{n+1} < \dbinom{n}{[n/2]} < 2^n$. (b) $\dbinom{n}{[n/2]} \sim \dfrac{2^n}{\sqrt{\pi n/2}}$ .

8.3. (a) $\dbinom{n}{[an]} = (a^{-a}(1-a)^{a-1} + o(1))^n$.

(b) $\dfrac{n!}{[a_1 n]! \cdot \ldots \cdot [a_s n]!} = (e^{-a_1 \ln a_1 - \cdots - a_s \ln a_s} + o(1))^n$, где $a_1 + \cdots + a_s = 1$.

8.4. (a) $n^2(2 + \dfrac{1}{n})^n = (2 + o(1))^n$. (b) $3^{\sqrt{n}}(2 + \dfrac{1}{n})^n = (2 + o(1))^n$.

В пунктах (b,c,d) следующей задачи достаточно интуитивного понимания того, что такое вероятность.

8.5. (a) $\ln \dfrac{(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k)}{n^k} = -\dfrac{k(k+1)}{2n}\left(1 + O\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)$ для $k = k_n$.

(b) $\dbinom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$ для $k = k_n = o(\sqrt{n})$. Значит, для $k \ll \sqrt{n}$ вероятность выпадения ровно $k$ орлов при $n$ подбрасываниях монеты приближённо равна $\dfrac{n^k}{k!}2^{-n}$.

(c) Для $k \ll \sqrt{n}$ вероятность получения ровно $k$ успехов в серии из $n$ опытов, с вероятностью $\lambda/n$ успеха в одном опыте, приближённо равна $\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ (*распределение Пуассона*).

(d) $\dbinom{2n}{n-k}\Big/\dbinom{2n}{n} = e^{-\frac{k^2}{n}(1+o(1))}$ для $k = k_n = o(n)$. Значит, для $k \ll n$ вероятность $P_k$ выпадения ровно $n-k$ орлов при $2n$ подбрасываниях монеты приближённо равна $P_0 e^{-k^2/n}$ (*нормальное распределение*).

8.6. Верно ли, что записи $e^{o(n)}$ и $o(e^n)$ «равнозначны»? Т. е. верно ли, что для любой функции $f\colon \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$ условия $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln f(n)}{n} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)e^{-n} = 0$ равносильны?

8.7. Какая функция растёт быстрее: $x^{(x^x)}$ или $(x!)^{(2^x)}$? Т.е. найдите $\lim\limits_{x\to\infty} x^{(x^x)}(x!)^{(-2^x)}$.

8.8. Найдите асимптотику для

(a) $\ln \dbinom{n^2}{n}$. (b)* $\dbinom{n}{[n^\alpha]}$, $\alpha \in (0,1)$. (c) $(2n-1)!!$. (d) $\sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k}^2$.

(e)* $\sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k}^4$.

8.9. Существует ли функция $\varphi(n) = o(1)$, для которой

$$(2 + \varphi(n))^n 2^{-n} e^{-\sqrt{n}} \to \infty?$$

(Как в любой математической задаче, нужно обосновать ответ: привести пример такой функции или доказать её существование или доказать, что такой функции не существует.)

8.10. Найдите асимптотику функции $s = s(n)$, заданной как (a) $s^s = n$; (b) $s^{s^3} = n$.

8.11. (a) Найдите асимптотику для величины из 1.4.b.

(b)* Найдите асимптотику для количества линейных подпространств в $\mathbb{Z}_2^n$. В ответе можно использовать константу, заданную в виде суммы ряда.

(c)* Найдите асимптотику числа связных унициклических графов с $n$ вершинами.

8.12. В этой задаче, в отличие от остальных, нельзя пользоваться формулой Стирлинга.

(a) $n^n e^{-n+1} < n! < n^{n+1} e^{-n+1}$; (b) $n! < n^n e^{-n+1}\sqrt{n}$.

## 9. Простейший вероятностный метод, или подсчёт

9.1. Существует такая раскраска рёбер графа $K_{m,n}$ в два цвета, что число одноцветных подграфов $K_{a,b}$ не больше $\binom{m}{a}\binom{n}{b}2^{1-ab}$.

9.2. *$k$-однородный гиперграф* $H = (V, E)$ — это множество $V$ вершин и система $E$ из $k$-элементных подмножеств множества вершин. Эти подмножества называют рёбрами (математики других специальностей называют их симплексами).

(a) Если $|E| \leqslant 2^{k-1}$, то вершины гиперграфа можно раскрасить в два цвета правильно (т. е. так, чтобы не нашлось ребра, все вершины которого одноцветны).

(b) Если для некоторого чётного $n$

$$\left(1 - 2\frac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}\right)^e 2^n < 1,$$

то существует $k$-однородный гиперграф $H = (V, E)$ с $e$ рёбрами, вершины которого нельзя правильно раскрасить в два цвета.

(c) Существует такое $c > 0$, что для любого $k$ существует $k$-однородный гиперграф, который нельзя правильно раскрасить в два цвета и который имеет не более $ck^2 2^k$ рёбер.

9.3. Для любых $n$ векторов $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ длины 1 существует такой набор $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$, что (a) $|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k v_k| \leqslant \sqrt{n}$; (b) $|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k v_k| \geqslant \sqrt{n}$.

9.4. Имеется несколько цветов. Каждой вершине двудольного графа с $n$ вершинами сопоставлено не менее, чем $\log_2 n + 1$ из них. Тогда существует правильная раскраска графа, приписывающая каждой вершине некоторый сопоставленный ей цвет.

9.5. В любом множестве из $n$ различных натуральных чисел найдётся подмножество из более, чем $n/3$ чисел, в котором нет трёх чисел, сумма двух из которых равна третьему.

9.6. Если в графе $G = (V, E)$ с $n$ вершинами минимальная степень вершины равна $\delta$, то существует такое множество вершин

(a) $A \subset V$, что имеется не более $np + n(1-p)^{\delta+1}$ вершин, лежащих в $A$ или не соединённых ни с какой вершиной из $A$. Здесь $p \in (0,1)$ — произвольное наперёд заданное число.

(b) $D \subset V$, что любая вершина из $V \setminus D$ соединена ребром с некоторой вершиной из $D$, и $|D| \leqslant n\dfrac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}$.

## 10. Случайные графы

Назовём *вероятностью* графа (в модели, или в вероятностном пространстве, $G(n,p)$) с $n$ вершинами $\{1, 2, \ldots, n\}$ и $e$ рёбрами число $\mathrm{P}_p(G) := p^e(1-p)^{n(n-1)/2-e}$. *Вероятностью* произвольного семейства (или, что то же самое, свойства) графов с множеством вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется сумма вероятностей входящих в него графов.

*Случайной величиной* называется функция $Y$, определённая на множестве графов.

Пусть случайная величина $Y$ принимает $k$ различных значений $y_1, \ldots, y_k$. Тогда *математическим ожиданием* (матожиданием) случайной величины $Y$ называется её «взвешенное среднее» $\mathrm{E}Y = \sum\limits_{s=1}^{k} y_i \mathrm{P}(Y^{-1}(y_s))$, где $Y^{-1}(y_s)$ — множество всех графов $G$, для которых $Y(G) = y_s$. Последнюю вероятность можно обозначать $\mathrm{P}(Y = y_s)$.

10.1. Для данных $n$ и $p$ найдите матожидание количества (a) гамильтоновых циклов; (b) несамопересекающихся циклов.

10.2. (a) Вероятность наличия $k$ вершин, между которыми нет рёбер, меньше $e^{k\ln n - pk(k-1)/2}$.

(b) Для любых целых $l, q > 0$ существует граф, не содержащий несамопересекающихся циклов длины $\leqslant l$, который невозможно правильно раскрасить в $q$ цветов.

10.3. Для данного $p$ вычислите асимптотику (при $n \to \infty$) для $\mathrm{E}^{(k)}(Y) := \mathrm{E}(Y(Y-1)\dots(Y-k+1))$ (т. е. для *$k$-го факториального момента*), если $Y$ — число изолированных вершин.

Событие $A_n$ *происходит асимптотически почти наверное* (или с асимптотической вероятностью 1), если $\mathrm{P}_{p(n)}(A_n) \to 1$.

10.4. При $p = p(n) = 1/(2n)$

(a) для некоторой последовательности $d_n \to 0$ асимптотически почти наверное имеется $(1+d_n)n/2$ изолированных вершин (специалисты говорят: имеется $(1+o(1))n/2$ изолированных вершин).

(b) для некоторого $C > 0$ асимптотически почти наверное каждая компонента связности имеет менее $C \ln n$ вершин (специалисты говорят: менее $O(\ln n)$ вершин).

(c) асимптотически почти наверное каждая компонента связности является деревом или уницикличеcким графом.

(d) для некоторого $C > 0$ асимптотически почти наверное имеется менее $C$ уницикличеcких компонент.

10.5. (a) При $p = p(n) = o\left(n^{-3/2}\right)$ асимптотически почти наверное ребра попарно не пересекаются.

(b) При $p = p(n) = o\left(n^{-3/2}\right)$ и $pn^2 \to \infty$ существует такая функция $M(n)$, что $2M(n) \sim pn^2$ и асимптотически почти наверное $2M(n)$ степеней вершин равны 1, а остальные степени равны нулю.

10.6. (a) Найдите хотя бы одну такую функцию $p^*(n)$, что

– при $p(n)/p^*(n) \to 0$ асимптотически почти наверное граф не содержит подграфа, изоморфного $K_4$, и

– при $p(n)/p^*(n) \to +\infty$ асимптотически почти наверное граф содержит подграф, изоморфный $K_4$.

(b)* То же с заменой $K_4$ на заданный граф с $v$ вершинами и $e$ рёбрами.

## 11. Пересечения подмножеств

В этом разделе через $\mathcal{F}$ обозначается произвольное семейство $k$-элементных подмножеств $n$-элементного множества.

11.1. (a) Если $k \geqslant l$ и каждое $l$-элементное подмножество $n$-элементного множества содержится в некотором подмножестве из $\mathcal{F}$, то $|\mathcal{F}| \geqslant \binom{n}{l} \Big/ \binom{k}{l}$.

(b) Количество $(k-1)$-элементных подмножеств $n$-элементного множества, целиком содержащихся хотя бы в одном из подмножеств семейства $\mathcal{F}$, не менее $\dfrac{k|\mathcal{F}|}{n-k+1}$.

11.2. В любом семействе попарно пересекающихся подмножеств $n$-элементного множества не более $2^{n-1}$ подмножеств.

11.3. *Теорема Эрдёша – Ко – Радо.* (a) Если $2k \leqslant n$ и любые два подмножества из $\mathcal{F}$ пересекаются, то $|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{k-1}$.

(b) Если $2k \geqslant n$ и объединение никаких двух подмножеств из $\mathcal{F}$ не есть все $n$-элементное множество, то $|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{k}$.

11.4. Пусть $n-2 \geqslant t \geqslant 2$.

(a) Постройте семейство из $2^{n-t}$ подмножеств $n$-элементного множества, любые два из которых пересекаются не менее, чем по $t$ элементам.

(b) Существует ли такое семейство из $2^{n-t}+1$ подмножеств?

*Подсолнухом с $m$ лепестками и ядром $Y$* называют набор множеств $\{F_1, \ldots, F_m\}$ такой, что $|F_i \cap F_j| = Y$ при $i \neq j$ и все множества $F_i \setminus Y$ непусты.

Например, попарно непересекающиеся множества образуют подсолнух с пустым ядром.

11.5. (a) Если $|\mathcal{F}| > k!(m-1)^k$, то в $\mathcal{F}$ найдётся подсолнух с $m$ лепестками.

(b) Найдутся $(m-1)^k$ подмножеств $n$-элементного множества, в каждом из которых $k$ элементов и среди которых нельзя выбрать подсолнух с $m$ лепестками.

## 12. Линейно-алгебраический метод

12.1. Дано семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$.

(a) Если в каждом подмножестве из $\mathcal{F}$ нечётное число элементов, а в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ чётное число элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

(b) Постройте пример, когда эта оценка достигается.

(c) Если в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ ровно $k$ элементов и в каждом подмножестве из $\mathcal{F}$ более $k$ элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

(d) Если $k > 0$ и в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ ровно $k$ элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

12.2. (a) Приведите пример $2^k$ подмножеств $2k$-элементного множества, в каждом из которых чётное число элементов, и в пересечении любых двух из которых чётное число элементов.

(b) Больше, чем $2^k$ подмножеств в условиях пункта (a) быть не может.

12.3. (a) Среди любых 327 попарно пересекающихся девятиэлементных подмножеств 25-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 3 или ровно 6 элементов.

(b) Для $k \in \mathbb{Z}$ обозначим $V_{n,k} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n \ : \ \sum_s x_s = k\}$. Среди любых 327 точек в $V_{25,9}$ есть две, скалярное произведение которых лежит в $\{0, 3, 6\}$.

(c) Для любого $\vec{a} \in V_{25,9}$ раскроем скобки в произведении

$$(\vec{a} \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_{25}) - 1)(\vec{a} \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_{25}) - 2),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ — переменные. В каждом из полученных одночленов для каждого $i$ будем заменять $x_i^2$ на 1, пока это возможно. Полученный многочлен обозначим $F_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_{25})$.

Докажите, что если скалярное произведение никаких двух векторов среди $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s \in V_{25,9}$ не делится на 3, то многочлены $F_{\vec{a}_1}, \ldots, F_{\vec{a}_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

12.4. (a) Среди любых 107 пятиэлементных подмножеств 14-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 2 элемента.

(b) То же для 93 подмножеств.

(c) То же для 92 подмножеств.

(d) Невозможно раскрасить в 21 цвет все пятиэлементные подмножества 14-элементного множества так, чтобы любые два пятиэлементные подмножества, пересекающиеся ровно по двум элементам, были разноцветны.

12.5. (a) Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n$ с равными попарными расстояниями равно $n+1$.

(b) Постройте $n(n-1)/2$ точек в $\mathbb{R}^n$, попарные расстояния между которыми принимают только два различных значения.

(c) Если попарные расстояния между $m$ точками в $\mathbb{R}^n$ принимают только два различных значения, то $m \leqslant (n+1)(n+4)/2$.

12.6. (a) Для простого $p$ и целого $t$ число

$$G(t) := (t-1)(t-2) \cdot \ldots \cdot (t-p+1)$$

делится на $p$ тогда и только тогда, когда $t$ не делится на $p$.

(b) Пусть $p$ простое и $n = 4p$. Обозначим

$$M = \{(1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \mid y_1 = 1,\ y_k \in \{1, -1\} \text{ и среди } y_2, \ldots, y_n \text{ число минус единиц чётно}\}.$$

Для любого $\vec{a} \in M$ раскроем скобки в произведении $G(\vec{a} \cdot (1, x_2, \ldots, x_n))$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные. В каждом из полученных одночленов для каждого $i$ будем заменять $x_i^2$ на 1, пока это возможно. Полученный многочлен обозначим $F_{\vec{a}}(x_2, \dots, x_n)$.

Докажите, что если скалярное произведение никаких векторов среди $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s \in M$ не равно нулю, то многочлены $F_{\vec{a}_1}, \dots, F_{\vec{a}_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

(c)* Существует $n$ и ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$, которое невозможно разбить на $n+1$ непустых частей меньшего диаметра.

12.7. (a) Если множество рёбер графа $K_n$ является объединением множеств рёбер $m$ полных двудольных графов, не пересекающихся по рёбрам, то $m \geqslant n-1$.

(b) Постройте набор двудольных графов, на котором эта оценка достигается.

Задачи этого пункта заимствованы из [2, 3, 5, 7], где читатель найдёт решения и обобщения.

## Список литературы

[1] Прасолов В. В. *Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии*. М.: МЦНМО. 2004. `http://www.mccme.ru/prasolov`

[2] Райгородский А. М. *Проблема Борсука*. М.: МЦНМО, 2006.

[3] Райгородский А. М. *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*. М.: МЦНМО, 2007.

[4] Райгородский А. М. *Вероятность и алгебра в комбинаторике*. М.: МЦНМО, 2010 (второе издание).

[5] Babai L., Frankl P. *Linear algebra methods in combinatorics. Part* 1. Department of Computer Science. The University of Chicago. Preliminary version 2. September 1992.

[6] Skopenkov A. *On the Kuratowski graph planarity criterion*. arXiv:0802.3820v3. 2012.

[7] Skopenkov A. *A two-page disproof of the Borsuk partition conjecture*. arXiv:0712.4009v2. 2012.

Д. Ильинский, А. Купавский, А. Райгородский, А. Скопенков — Московский Физико-Технический Институт

Личные страницы: `http://dm.fizteh.ru/staff`