Об одном функциональном уравнении

Н. Николов Б. Станков

В статье обсуждается решение задачи 16.6 из задачника «Математического просвещения»

В этой статье мы исследуем функциональное уравнение

$$f(f(x)) = g(x), \tag{1}$$

на функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,[1] где $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — данная инъективная функция.[2]

Функции g удобно сопоставить ориентированный граф $\Gamma(g)$, вершинами которого служат элементы $\mathbb{N}$, а ребра ведут от x к $g(x)$ для всех $x \in \mathbb{N}$. Инъективность g влечет следующую структуру графа: все вершины $\Gamma(g)$ разбиваются на непересекающиеся множества K_i, где каждое K_i имеет один из следующих трех типов:

i) бесконечная *цепочка*: $x \to g(x) \to g^2(x) \to \ldots$[3], в которой $g^{-1}(x) = \varnothing$, и $g^t(x) \neq g^s(x)$ при $s \neq t$;

ii) *цикл длины* ∞: $\ldots \to g^{-2}(x) \to g^{-1}(x) \to x \to g(x) \to g^2(x) \to \ldots$, где $g^t(x) \neq g^s(x)$ при $s \neq t$;

iii) *цикл длины* k ($k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$): $x \to g(x) \to g^2(x) \to \ldots \to g^k(x) = x$, где все элементы $x, g(x), g^2(x), \ldots, g^{k-1}(x)$ попарно различны.

Будем говорить, что g — функция *типа* $(a; b; c_1, c_2, \ldots)$, если $\Gamma(g)$ разбивается на a цепочек, b циклов длины ∞ и c_k циклов длины k, $k = 1, 2, \ldots$ (здесь a, b, c_k могут независимо друг от друга принимать значения $0, 1, 2, \ldots, \infty$). Справедлива следующая теорема, в которой дается ответ (в терминах типа функции g) на вопрос о разрешимости уравнения (1), причем из доказательства ясно описание множества решений.[4]

---

[1] $\mathbb{N}$ можно заменить на произвольное счетное множество, так как арифметические операции здесь не используются.

[2] Напомним, что g называется инъективной, если из $g(x) = g(y)$ вытекает $x = y$.

[3] Для натурального k мы полагаем $g^k(x) = g(g^{k-1}(x))$. Кроме того, $g^0(x) = x$, $g^{-1}(x) = \{y \mid g(y) = x\}$, $g^{-k}(x) = g^{-1}(g^{-k+1}(x))$.

[4] Метод доказательства применим для описания решений уравнения $f^k = g$, где k — натуральное, а g — данная инъективная функция.

Теорема. *Пусть $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — функция типа $(a; b; c_1, c_2, \ldots)$.*

а) Уравнение (1) *неразрешимо тогда и только тогда, когда в множестве $\{a, b, c_{2k} \mid k = 1, 2, \ldots\}$ есть хотя бы одно нечетное число.*

б) Уравнение (1) *разрешимо и имеет конечное множество решений тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: в множестве $\{a, c_{2k} \mid k = 1, 2, \ldots\}$ все числа четны, $b = 0$, и сумма*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(c_{2k-1}(c_{2k-1} - 1) + c_{2k})$$

конечна.

Отметим, что частный случай нашей задачи для функции $g(x) = x + 1987$, предлагался на Международной математической олимпиаде 1987 г. Как видим, эта функция имеет тип $(1987; 0; 0, 0, \ldots)$, и, согласно нашей теореме, для такой функции g уравнение (1) не имеет решений.

Доказательство теоремы

Пусть N — это множество всех вершин $\Gamma(g)$, принадлежащих циклам (конечным и бесконечным), а M — это множество всех вершин $\Gamma(g)$, принадлежащих бесконечным цепочкам. (Формально $N = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} g^i(\mathbb{N})$, $M = \mathbb{N} \setminus N$.) Ясно, что $g(N) = N$ и $g(M) \subset M$. Обозначим $M_i = g^i(M)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ и $S_i = M_{i+1} \setminus M_i$, так что S_0 — множество начальных элементов всех бесконечных цепочек, $S_1 = g(S_0)$, $S_2 = g(S_1)$, $\ldots$.

Пусть функция f удовлетворяет (1). Так как g инъективна, то и f инъективна. Отметим также, что

$$f(g(n)) = g(f(n)) \text{ для всех } n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

так как левая и правая части (2) равны $f(f(f(n)))$.

Покажем, что $f(M) \subset M$ и $f(N) \subset N$. Достаточно понять, что множества $K = \{k \in M \mid f(k) \in N\}$ и $L = \{l \in N \mid f(l) \in M\}$ пустые. Предположим K непусто. Найдем минимальный номер i такой что $K \cap S_i$ непусто, и возьмем $k \in K \cap S_i$. Так как $f(k) \in N$, то $f(k) = g(x)$ для некоторого $x \in N$. Из равенства $f(k) = f(f(x))$ и инъективности f получаем $k = f(x)$. Для элемента x найдем $y \in N$ такой что $g(y) = x$. Пусть $z = f(x)$. Имеем $k = f(x) = f(g(y)) = g(f(y))$. Если $i = 0$, то есть $k \in S_0$, получили противоречие, так как $g^{-1}(k) = \varnothing$. Иначе $f(y) \in S_{i-1}$. Кроме того $f(f(y)) = g(y) = x \in N$, поэтому $f(y) \in K \cap S_{i-1}$ в противоречие с выбором i.

Предположим, что L непусто. Возьмем $z \in L$. По определению $f(z) \in M$. С другой стороны $f(f(z)) = g(z) \in N$. Отсюда $f(z) \in K$, и все сводится к предыдущему рассмотрению.

Итак, мы разделили нашу задачу на две независимых подзадачи для множеств M и N.

1. Решим задачу для M (можно считать, что $N = \varnothing$). Положим

$$A = \{a \in S_0 \mid f(a) \in S_0\}, \quad B = \{b \in S_0 \mid f(b) \in M \setminus S_0\}.$$

Очевидно $A \cup B = S_0$ и $A \cap B = \varnothing$.

Заметим, что если $x \in A$, то $f(x) \in B$. Действительно, предположим противное: $f(x) \in A$. Тогда $f(f(x)) \in S_0$ по определению A. Но с другой стороны $f(f(x)) = g(x) \in S_1$ — противоречие.

Покажем, что $f(B) \cap M_2 = \varnothing$. Предположим, что, напротив, существует $y \in B$ такой что $f(y) = g(g(x))$ для некоторого $x \in M$. Из (2) и (1) следует, что $g(y) = f(f(y)) = f(g(g(x))) = g(g(f(x)))$. Так как g инъективна, то $y = g(f(x))$, что противоречит включению $y \in S_0$. Итак, для каждого $y \in B$ имеем $f(y) \in S_1$, то есть $f(y) = g(x)$ для некоторого $x \in S_0$. С другой стороны, $g(x) = f(f(x))$, и в силу инъективности f получаем $y = f(x)$. Так как $y \in S_0$, то $x \in A$. Получаем, что $f(A) = B$, в частности, если $a = |S_0|$ конечно ($|S_0|$ равно количеству бесконечных цепочек), то оно четно.

С другой стороны, при любом разбиении множества S_0 на две части A и B такие, что $|A| = |B|$ любая биекция $h\colon A \to B$ продолжается единственным образом до искомой функции $f\colon M \to M$ следующим образом. Пусть $x \in S_i$, тогда

$$\begin{cases} f(x) = g^i(h(g^{-i}(x))), & \text{если } g^{-i}(x) \in A, \\ f(x) = g^{i+1}(h^{-1}(g^{-i}(x))), & \text{если } g^{-i}(x) \in B. \end{cases}$$

В случае четного a это дает $\binom{a}{a/2} \cdot (a/2)!$ искомых функций.

2. Теперь решим задачу для N.[5] Для каждого $x \in N$ пусть $G(x) = \{g^i(x) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ — цикл (орбита) элемента x (циклы двух элементов либо не пересекаются, либо совпадают).

Заметим, что для всякого $x \in N$ верно $f(G(x)) = G(f(x))$. Это следует из того, что $f(g^j(x)) = g^j(f(x))$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Отсюда получаем, что $f(G(f(x))) = f(f(G(x))) = g(G(x)) = G(x)$. Значит, для каждого цикла имеется две возможности: либо $f(G) = G$, либо найдется другой цикл $\overline{G}$ такой, что $f(G) = \overline{G}$ и $f(\overline{G}) = G$. Зафиксируем $l \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$ и рассмотрим цикл G длины $|G| = l$.

а) Рассмотрим случай $f(G) = G$. Возьмем $x \in G$. Так как $f(x) \in G$, имеем $f(x) = g^j(x)$ для некоторого $j \in \mathbb{Z}$. Для каждого $y \in G$, $y = g^k(x)$

[5] Фактически это задача решения уравнения $x^2 = g$ в группе S_∞ биекций счетного множества.

имеем $f(y) = f(g^k(x)) = g^k(f(x)) = g^k(g^j(x)) = g^j(g^k(x)) = g^j(y)$. Имеем $g(x) = f(f(x)) = g^j(g^j(x)) = g^{2j}(x)$ или $g^{2j-1}(x) = x$. Это означает, что l конечно и $2j-1$ делится на l. Отсюда l нечетно: $l = 2k-1$. Поэтому $j \equiv k \pmod{l}$, и значит сужение f на G однозначно определяется равенством

$$f(x) = g^k(x). \tag{3}$$

б) Рассмотрим второй случай: $f(G) = \overline{G}$ и $f(\overline{G}) = G$, $G \neq \overline{G}$. В этом случае сужение f на G — это биекция между G и $\overline{G}$ ($f(G) = \overline{G}$ и f инъективна). Значит, $|G| = |\overline{G}| = l$. Зафиксируем $x \in G$. Пусть $f(x) = \overline{x} \in \overline{G}$. Тогда однозначно

$$\begin{cases} f(y) = g^k(\overline{x}), & \text{если } y = g^k(x) \in G, \\ f(y) = g^{k+1}(x), & \text{если } y = g^k(\overline{x}) \in \overline{G}. \end{cases} \tag{4}$$

Наоборот, для произвольного $\overline{x} \in \overline{G}$ сужение на $G \cup \overline{G}$ такой функции f, что $f(x) = \overline{x}$, однозначно определяется формулами (4).

Итак, если l бесконечно или четно, случай а) невозможен, поэтому количество циклов длины l либо бесконечно, либо четно. При этом каждое разбиение циклов длины l на пары дает l способов определить f на $G \bigcup \overline{G}$ по формулам (4) (итого $\dfrac{c_l! \cdot l}{(c_l/2)! \cdot 2^{c_l/2}}$ способов в том случае, когда l и c_l конечны).

Если l нечетно, множество циклов длины l разбиваются на множества S и T, ($|T|$ четно или бесконечно). Тогда f определяется на каждом цикле из S единственным способом как показано в (3). Циклы множества T произвольно разбиваются на пары, и для каждой пары f определяется одним из l способов как показано в (4).

Объединяя полученные результаты, получим утверждение теоремы.

Авторы благодарят П. Кожевникова за помощь в подготовке текста этой заметки на русском языке.

Н. Николов, Институт математики и информатики, Болгарская академия наук, ул. «Акад. Г. Бончев», бл. 8, 113 София
email: `nik@math.bas.bg`
Б.Станков, Lyceé Louis Le Grand, 123 rue Saint Jacques, 75005 Paris
email: `thrall.warlord@gmail.com`