Задачный раздел

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Составителям этой подборки кажется, что предлагаемые ниже задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим свои собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются).

1. Можно ли в куб достаточно большой размерности с ребром 1 см вложить здание МГУ? *(Ф. Ивлев)*

2. а) Найти 300-ю цифру после запятой числа $\sqrt[3]{0.\underbrace{99\ldots9}_{100\text{ штук}}}$.

   б) С помощью калькулятора найти первую цифру числа 2^{10^6}. *(А. Я. Белов)*

3. На плоскости дано множество M, площадь которого меньше 1, и n точек. Доказать, что множество M можно сдвинуть на вектор, длина которого меньше $\sqrt{n/\pi}$, где $\pi = 3,14159\ldots$, так, что множество, полученное в результате сдвига, не будет покрывать ни одной из данных n точек. *(В. А. Сендеров)*

   б) (Задача на исследование) Постарайтесь получить оценки для n-мерного пространства.

4. $\mathcal{A}$ — отображение плоскости в себя, сохраняющее расстояние (т. е. $|XY| = |\mathcal{A}(X)\mathcal{A}(Y)|$ для любых точек X, Y плоскости). Доказать, что $\mathcal{A}$ — отображение плоскости на себя (т. е. каждая точка имеет прообраз при этом отображении).

5. На плоскости нарисованы две а) пересекающиеся б) непересекающиеся окружности. Можно ли одной линейкой построить их центры?

6. Если целые m и n взаимно просты, а числа $x^n + x^{-n}, x^m + x^{-m}$ — целые, то $x + 1/x$ — тоже целое число ($x \in \mathbb{C}$).

7. На каждом ребре правильного многогранника M с единичными ребрами взяли по точке A_i. Найти объем геометрического места центров масс таких наборов. Рассмотреть все 5 возможностей.

   (*А. Я. Канель*)

8. Слова u и v *циклически сопряжены*, если $u = s_1 s_2, v = s_2 s_1$ для некоторых слов s_1, s_2. Слово u называется *правильным*, если оно больше любого своего лексикографически сопряженного. а) Докажите, что в любом правильном слове u можно так однозначно расставить лиевы скобки $[\cdot,\cdot]$, что при их раскрытии ($[st]$ раскрывается как $st - ts$) слово u будет старшим членом получившегося (некоммутативного) многочлена.

   б) Докажите, что достаточно длинное слово содержит подслово вида UXU, где U, X — правильные слова.

   (*D. Bakelin, В. А. Уфнаровский*)

9. Имеется $2^n - 1$ коробок. В коробке первой величины содержатся две коробки второй величины. В каждой из 2^{k-1} коробок k-ой величины содержатся по две коробки $(k+1)$-ой величины. В коробках последней n-ой величины лежит по одной монете. За один ход разрешается в одной из коробок любой величины перевернуть все монеты. Доказать, что за $[n/2] + 1$ ходов можно уравнять число монет, лежащих орлом вверх и орлом вниз. Можно ли улучшить эту оценку?

   (*А. Я. Белов*)

10. Дано векторное пространство W, $\dim(W) = m$, два его подпространства U и V, такие что $U \cap V = 0$ ($\dim(u) = n_1$, $\dim(v) = n_2$) и обратимый оператор $A\colon W \to W$. Докажите, что $A^n(U) \cap V = 0$ при некотором $n \leqslant \min(\binom{m}{n_1}, \binom{m}{n_2})$.

11. Существует ли граф с хроматическим числом, большим 2013, все циклы которого имеют длину больше 2013? (*Хроматическое число графа* есть минимальное число цветов, в которые его можно правильно раскрасить.)

12. (Задача на исследование). а) Дан многочлен $P(x, y)$ степени n такой, что $P(x, y) \geqslant 0$ при всех x, y. При этом $P(x, y) = 0$ только если $x = y = 0$. Верно ли, что для некоторой константы $C > 0$ выполняется неравенство $P(x, y) > C \cdot (|x| + |y|)^n$? б) Для каких натуральных m можно утверждать что для некоторой константы $C > 0$ выполняется неравенство $P(x, y) > C \cdot (|x| + |y|)^m$ (при всех $x, y \in [-1, 1]$)?

    (*И. И. Богданов, Г. Р. Челноков*)