# Алан Тьюринг и теория чисел

Ю. В. Матиясевич

Настоящая публикация является слегка расширенным текстом ряда выступлений автора на конференциях The Alan Turing Centenary Conference (Manchester, UK, June 22–25 2012), The 7th International Computer Science Symposium in Russia (Нижний Новгород, 3 – 7 июля 2012 г.) и на заседании Санкт-Петербургского математического общества (9 октября 2012 г.) и не претендует на полноту освещения теоретико-числовых исследований Алана Тьюринга. Более подробные сведения можно найти, например, в [2, 3, 6, 7].

В 2012 году по всему миру отмечалось столетие со дня рождения Алана Матисона Тьюринга (Alan Mathison Turing, 1912–1954). Это стало большим событием как для учёных разных специальностей, так и для людей, далёких от науки.

Для кого-то Алан Тьюринг в первую очередь — один из основоположников теоретической информатики, по английски называемой computer science. Тезис Чёрча – Тьюринга открыл путь для математически строгих доказательств невозможности решения некоторых алгоритмических проблем, а про машину Тьюринга, по крайней мере слышали и очень многие из тех, кто весьма далёк от точных наук.

Для других Алан Тьюринг — пионер искусственного интеллекта, попытавшийся дать формализованный ответ на философский вопрос «Может ли машина думать?» и написавший первую программу для игры в шахматы в то время, когда ещё не было компьютера, способного выполнить эту программу.

Первоначальная публикация: «Математика в высшем образовании», №10, 2012. С. 111–134. Здесь публикуется с любезного разрешения редакции журнала «Математика в высшем образовании».

Широко известно про вклад Алана Тьюринга в расшифровку немецких радиограмм во время Второй мировой войны.

Оригинальные работы Алана Тьюринга по биологии намного опередили своё время и не были оценены по достоинству его современниками.

Но наряду с привнесением революционных идей в информатику, искусственный интеллект и биологию, Алан Тьюринг внёс существенный вклад и в такой традиционный раздел математики, как теория чисел. К сожалению, даже о самом существовании таких исследований Алана Тьюринга за пределами круга теоретико-числовиков известно немногим. Цель этой публикации — познакомить широкую аудиторию с основным вкладом Алана Тьюринга в теорию чисел.

Все опубликованные им работы по теории чисел связаны с одним, но фундаментальным вопросом этой области математики — распределением простых чисел. По традиции, количество таких чисел, не превосходящих некоторого $x$, обозначается $\pi(x)$. Уже Евклид знал, что эта функция возрастает неограничено, но математиков интересовал вопрос более точной оценки скорости роста $\pi(x)$.

Ответ, который нашли в 1896 году независимо друг от друга Жак Саломон Адамар (Jacques Salomon Hadamard) и Шарль Жан де ла Валле Пуссен (Charles Jean de la Vallée Poussin), известен как

Закон распределения простых чисел.

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}\,. \tag{1}$$

Точный смысл символа $\sim$ в (1) таков:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln(x)}} = 1. \tag{2}$$

Неформально, формулу (1) можно интерпретировать так: *вблизи числа $x$ среднее расстояние между простыми числами равно* $\ln(x)$. Другая интерпретация такова: *вероятность того, что некоторое число, близкое к $x$, будет простым, равна* $1/\ln(x)$.

Эта вторая интерпретация подсказывает рассмотрение следующей функции, называемой *сдвинутым интегральным логарифмом*:

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

Легко проверить, что

$$\mathrm{Li}(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \tag{4}$$

и, соответственно, закон распределения простых чисел (1) можно записать в эквивалентном виде как

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) \tag{5}$$

или

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1. \tag{6}$$

При рассмотрении пределов отношений, как в (2) и (6), функция $\mathrm{Li}(x)$ не имеет никаких «преимуществ» перед «более простой» функцией $x/\ln(x)$. Ситуация становится другой, если вместо отношений правых и левых частей в (1) и (6) мы станем изучать их разности, некоторые из которых (округлённые до целых чисел) приведены в следующей таблице.

*Табл. 1. Приближения к $\pi(x)$*

| $x$ | $\pi(x) - x/\ln(x)$ | $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ |
|---|---:|---:|
| $10^2$ | 3 | −4 |
| $10^3$ | 23 | −8 |
| $10^4$ | 143 | −16 |
| $10^5$ | 906 | −36 |
| $10^6$ | 611 | −128 |
| $10^7$ | 44158 | −338 |
| $10^8$ | 332773 | −753 |
| $10^9$ | 2592591 | −1699 |
| $10^{10}$ | 20758029 | −3102 |
| $10^{11}$ | 169923159 | −11586 |
| $10^{12}$ | 1416705192 | −38261 |
| $10^{13}$ | 11992858451 | −108970 |
| $10^{14}$ | 102838308635 | −314888 |

В этой таблице разности $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ по абсолютной величине существенно меньше соответствующих разностей $\pi(x) - x/\ln(x)$. Кроме того, мы видим, что все приведённые там значения $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ отрицательны. Было проверено, что неравенство $\pi(x) < \mathrm{Li}(x)$ справедливо для всех $x$, не превосходящих $10^{14}$. Возникает вопрос — будет ли это так всегда?

Некоторый неформальный аргумент в пользу этого даёт следующая формула, которую установил Георг Фридрих Бернхард Риман (Georg Friedrich Bernhard Riemann) в своей основополагающей работе [13]:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{1/2}) + \sum_{\zeta(\rho)=0} \mathrm{Li}(x^{\rho}) + \text{малые члены}. \tag{7}$$

Суммирование в этой формуле идёт по невещественным комплексным нулям так называемой *дзета-функции Римана* $\zeta(s)$, о которой речь пойдёт дальше. Все слагаемые под знаком суммы в (7) осциллируют и можно ожидать, что в среднем они «гасят» друг друга, так что их сумма мала по сравнению с $\frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{1/2})$, абсолютной величиной второго члена в правой части (7). Оказалось, однако, что это не так — при некоторых $x$ многие слагаемые могут «попасть в резонанс», при котором их сумма станет больше $\frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{1/2})$. А именно, Джон Идензор Литлвуд (John Edensor Littlewood) доказал в 1914 году следующую теорему.

Теорема [10]. *Существует бесконечно много $x$ таких, что*

$$\pi(x) > \mathrm{Li}(x). \tag{8}$$

Доказательство, данное Литлвудом, было «чистым доказательством существования», не дающим ни конкретного значения $x$, удовлетворяющего (8), ни даже оценки сверху на величину такого $x$.

Этот «пробел» восполнил ученик Литлвуда Стенли Скьюз (Stanley Skewes), опубликовавший в 1933 году следующую оценку на наименьшее $x$, удовлетворяющее неравенству (8):

$$x < 10^{10^{10^{34}}}. \tag{9}$$

«Астрономическое число» в правой части (9) произвело в то время большое впечатление. Готфри Харолд Харди (Godfrey Harold Hardy) охарактеризовал его как «самое большое число, когда-либо использованное в математике для какой-либо конкретной цели» (см. [22]).

Правая часть неравенства (9) получила название *числа Скъюза*; когда впоследствии этот результат усиливался, новые оценки по-прежнему называли числами Скьюза. Сейчас числом Скьюза иногда называют наименьшее $x$, удовлетворяющее (8). Точное значение такого наименьшего $x$ до сих пор (2012 год) неизвестно, установлено однако, что оно не превосходит $10^{317}$.

В 1931 году Алан Тьюринг поступил в Кембриджский университет в Англии. Скьюз к тому времени уже окончил этот университет, но ещё там работал. Согласно [7], Алан и Стенли, занимаясь греблей, плавали в одной лодке, и весьма вероятно, что именно там, на реке Кем, Тьюринг узнал о числе Скьюза «из первых уст». Тьюринга привлекла идея получить меньшее значение, но как это сделать?

Найденная Скьюзом оценка (9) была условной, а именно, он получил следующий результат.

Теорема [14]. *Если гипотеза Римана верна, то существует число $x$, такое что выполнены неравенства* (8) *и* (9).

Использованная в доказательстве Скьюза гипотеза касается распределения комплексных нулей так называемой *дзета-функции Римана* $\zeta(s)$, определяемой *рядом Дирихле*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\,, \tag{10}$$

который сходится в полуплоскости $\mathrm{Re}(s) > 1$. Эту функцию при вещественных значениях аргумента изучал ещё Леонард Эйлер, и он указал её альтернативное определение в виде произведения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ простое}} \frac{1}{1-p^{-s}}\,, \tag{11}$$

сходящегося при $s > 1$.

*Тождество Эйлера* (11) является, по существу, аналитической формой *основной теоремы арифметики*, гласящей, что каждое натуральное число представимо, и единственным образом, в виде произведения степеней простых чисел: достаточно заметить, что

$$\frac{1}{1-p^{-s}} \quad = \quad 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots \tag{12}$$

подставить правую часть (12) в правую часть (11), раскрыть скобки и получить левую часть (11).

Тождество Эйлера объясняет, почему дзета-функция Римана играет такую важную роль в изучении простых чисел. В частности, Эйлер дал новое доказательство бесконечности количества простых чисел, по красоте сравнимое с классическим доказательством Евклида: *если бы количество простых чисел было конечно, то* (*расходящийся*) *гармонический ряд, получающийся из левой части* (11) *при* $s \to 1$, *имел бы конечную величину, равную произведению в правой части* (11) *при* $s = 1$.

В основе равенства (7) также лежит тождество Эйлера, но при этом надо рассматривать аналитическое продолжение дзета-функции на всю комплексную плоскость (за исключением точки $s = 1$, которая является полюсом этой функции). Риман доказал, что все отрицательные чётные числа, $-2, -4, \dots, -2m, \dots$, являются нулями дзета-функции, и эти нули принято называть *тривиальными*. Он также установил, что других вещественных нулей у дзета-функции нет, а остальные, *нетривиальные*, нули (по которым и ведётся суммирование в (7)) лежат в *критической* полосе $0 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant 1$. Эта полоса лежит вне полуплоскости сходимости ряда (10), что вызывает трудности в изучении нетривиальных нулей дзета-функции.

Доказательство закона распределения простых чисел, данное Адамаром и Валле Пуссеном, состояло, по сути, в усилении результата Римана до строгих неравенств $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Риман, однако, предполагал, что имеет место ещё более сильное утверждение, известное ныне как

Гипотеза Римана [13]. *Все нетривиальные нули дзета-функции лежат на* критической прямой $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

Эта гипотеза была опубликована Риманом в 1859 году. В 1900 году Давид Гильберт включил её в восьмую из 23 важнейших нерешённых математических проблем, которые уходящий девятнадцатый век оставлял в наследие наступающему двадцатому. Гипотеза Римана до сих пор (2012 год) остаётся недоказанной и неопровергнутой, и является одной из семи так называемых *проблем тысячелетия* [23].

Гипотеза Римана имеет много важных следствий как в самой теории чисел, так и вне её. Например, из гипотезы Римана следует, что

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = O(x^{1/2}\log(x)) \tag{13}$$

(и, наоборот, из (13) можно вывести справедливость гипотезы Римана).

То, что оценка (9) была получена Скьюзом в предположении справедливости гипотезы Римана, само по себе не является «грехом» — в современной теории чисел имеется огромное количество результатов, полученных только как следствия гипотезы Римана. Однако в данном случае ситуация была несколько иной — дело в том, что исходная теорема Литлвуда была получена безусловно. Точнее, её доказательство состояло из двух частей: в одной существование $x$, удовлетворяющего (8), устанавливалось в предположении истинности гипотезы Римана, в другой — в предположении её ложности. Скьюз вскоре получил и безусловное доказательство, но по какой-то причине только в 1955 году вышла из печати вторая часть его работы со следующим результатом:

Теорема [15]. *Если гипотеза Римана неверна, то существует число* $x$, *такое что выполнено неравенство* (8) *и*

$$x < 10^{10^{10^{10^{3}}}}. \tag{14}$$

Когда Алан Тьюринг учился в Кембридже, там одним из преподавателей математики (mathematics supervisors) был Альберт Эдвард Ингам (Albert Edward Ingham). В 1932 году вышло в свет первое издание его ставшей затем классической книги [8] «Распределение простых чисел» (книга была переиздана в 1964 и 1990 годах, её переводы на русский язык вышли в 1936 и в 2005 годах). В этой книге Ингам дал новое, более простое доказательство теоремы Литлвуда, состоящее также из рассмотрения двух случаев — справедливости и ложности гипотезы Римана.

Тьюринг много общался с Ингамом и во время обучения, и позднее по переписке. Когда Тьюринг сообщил Ингаму, что хочет уменьшить число

*Табл. 2. Проверка гипотезы Римана до А.Тьюринга*

| Год | Количество нулей | Автор |
|---|---:|---|
| 1903 | 15 | J. P. Gram |
| 1914 | 79 | R. J. Backlund |
| 1925 | 138 | J. I. Hutchinson |
| 1936 | 1041 | E. C. Titchmarsh |

Скьюза, следуя, как и Скьюз, доказательству Литлвуда, Ингам ответил, что более перспективным для этой цели ему представляется его новое доказательство из [9], и на этом пути Скьюз уже улучшил свой результат.

В той части доказательства, в которой предполагается справедливость гипотезы Римана, для получения хорошей оценки требовалось знать не только то, что все нули лежат на критической прямой, но также и где именно лежит достаточно большое количество начальных нулей. Для первых 15 нулей точные значения вещественных частей (равные $1/2$) и приблизительные значения мнимых частей были опубликованы Йоргеном Педерсеном Грамом (Jørgen Pedersen Gram) в 1903 году. К тому времени, когда Тьюринг вошёл в эту тематику, Эдвард Чарльз Титчмарш (Edward Charles Titchmarsh) довёл проверку гипотезы Римана до 1041 начального нуля (см. табл. 2).

Теория чисел была серьёзным увлечением Алана Тьюринга начиная от студенческих лет и до последних дней жизни, но, похоже, это увлечение никогда не было главным. В 1936 году Тьюринг опубликовал основополагающую работу [16], в которой ввёл свою знаменитую машину. В наши дни машину Тьюринга традиционно описывают как конечное устройство, работающее конечное время с конечным объёмом информации, но интересно отметить, что Тьюринг рассматривал (и это нашло своё отражение в названии [16]) введённые им вычислительные устройства как средство задания вещественных чисел — такие машины должны работать неограниченно долго, выписывая на ленте всё большее и большее количество десятичных знаков задаваемого вещественного числа. Не исключено, что Тьюринга привёл к этому его интерес к теоретико-числовым проблемам.

В 1938 году Тьюринг написал свою диссертацию (опубликована в [17]) по математической логике под руководством Алонзо Чёрча (Alonzo Church) в Принстоне, США. Однако возвратившись в том же году в Европу, Тьюринг снова стал заниматься дзета-функцией Римана.

Как было сказано выше, для улучшения оценки Скьюза на наименьшее $x$, удовлетворяющее (8), имелось два пути — или найти нуль дзета-функции, лежащий вне критической прямой, или для возможно большего количества начальных нулей этой функции определить их положение на критической прямой. Однако даже просто вычисление значения дзета-функции в какой-либо точке в критической полосе было нетривиальной задачей.

С необходимостью вычислить значение дзета-функции встретился ещё Эйлер, взявшийся за решение так называемой *Базельской проблемы*, которую поставил Пьетро Меньоли (Pietro Mengoli) в 1644 году — чему равно значение суммы

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}+\dots\ ? \tag{15}$$

Эйлер вычислил более дюжины десятичных знаков $\zeta(2)$ с помощью изобретённого им общего метода, который ныне носит название «суммирование Эйлера – Маклорена».

Риман нашёл другой метод, специфический для вычисления значений дзета-функции Римана. Этот метод не был им опубликован и только в 20-м столетии Карл Людвиг Зигель (Carl Ludwig Siegel), разбирая неопубликованные трудночитаемые рукописи Римана, смог сделать открытие Римана всеобщим достоянием.

В 1939 году Тьюринг подал заявку (см. рис. 1) на грант Королевского общества (the Royal Society), играющего в Великобритании ту же роль, что академии наук в других странах. В этой заявке Тьюринг просил средства для изготовления «аппарата» для вычисления значений дзета-функции. В качестве прототипа были взяты машины для расчётов высоты приливов. Такие машины использовались начиная с середины 19-го века и вплоть до появления ЭВМ. На рис. 2 изображена схема одной из таких машин, а на рис. 3 — фотография реальной машины.

Высота прилива в данный момент в данной точке зависит от нескольких периодических факторов: вращения Земли вокруг своей оси, вращения Луны вокруг Земли, вращения Земли вокруг Солнца, при этом для получения достаточной точности необходимо учитывать эксцентриситет орбит Луны и Земли. В итоге высота прилива определяется как сумма вида

$$\sum_{r=1}^{m} a_r \cos(\omega_r t-\theta_r). \tag{16}$$

Значение переменной $t$ — времени — задаётся поворотом рукоятки в левой части машины (см. рис. 2). Коэффициенты $\omega_k$ определяются соотношениями диаметров попарно сцепленных зубчатых колёс, расположенных в нижних рядах. На колёсах в точках с полярными координатами $\langle a_r, \theta_r\rangle$ имеются штырьки, вертикальные (декартовы) координаты которых, очевидно, равняются слагаемым из (16). Несложный механизм

**3. A. M. Turing..........................................£40.**

King's College,
Cambridge.
24 *March* 1939.

"1. It is proposed to make calculations of the Riemann zeta-function on the critical line for $1{,}450 < t < 6{,}000$ with a view to discovering whether all the zeros of the function in this range of $t$ lie on the critical line. An investigation for $0 < t < 1{,}464$ has already been made by Titchmarsh. The most laborious part of such calculations consists in the evaluation of certain trigonometrical sums

$$\sum_{r=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{r}} \cos\,(t \log r - \vartheta) \qquad m = \left[\sqrt{\frac{t}{2\pi}}\right]$$

In the present calculation it is intended to evaluate these sums approximately in most cases by the use of apparatus somewhat similar to what is used for tide prediction. When this method does not give sufficient accuracy it will be necessary to revert to the straightforward calculation of the trigonometric sums, but this should be only very rarely necessary. I am hoping that the use of the tide-predicting machine will reduce the amount of such calculation necessary in a ratio of 50 : 1 or better. It will not be feasible to use already existing tide predictors because the frequencies occurring in the tide problem are entirely different from those occurring in the zeta-function problem. I shall be working in collaboration with D. C. MacPhail, a research student who is an engineer. We propose to do most of the machine-shop work ourselves, and are therefore applying only for the cost of materials, and some preliminary computation.

"2. Cost of materials for making tide predictor, estimated at £25, and not exceeding £35. Cost of preliminary computation, estimated at £3 10s., and not exceeding £5. Some further computation may be necessary after the work with the tide predictor, but the amount of this cannot be accurately estimated at this stage, and might be negligible. No application is being made on this account at present.

"4. Fellow of King's College, Cambridge.

"5. Apparatus would be of little permanent value. It could be added to for the purpose of carrying out similar calculations for a wider range of $t$, and might be used for some other investigations connected with the zeta-function. I cannot think of any applications that would not be connected with the zeta-function.

"6. At Cambridge University, principally in the Engineering Laboratories. Professor Hardy and Professor Titchmarsh are, I believe, willing to support this application."

*Рис. 1. Заявка на грант*

http://www.turing.org.uk/sources/zetamachine.html

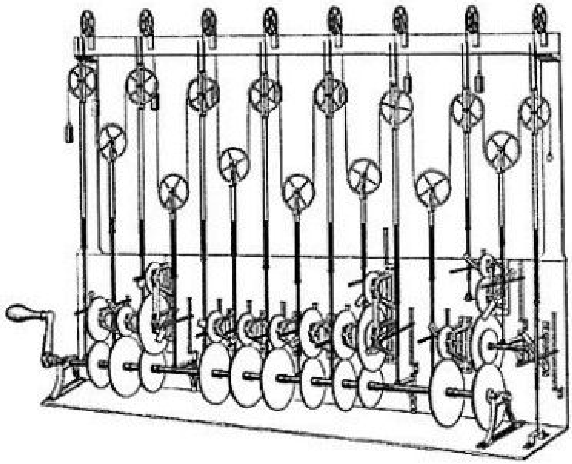

*Рис. 2.* *Третья машина для предсказания приливов сэра Уильяма Томсона, лорда Кельвина (William Thomson, Lord Kelvin), 1879–81*

`http://en.wikipedia.org/wiki/Tide-predicting_machine`

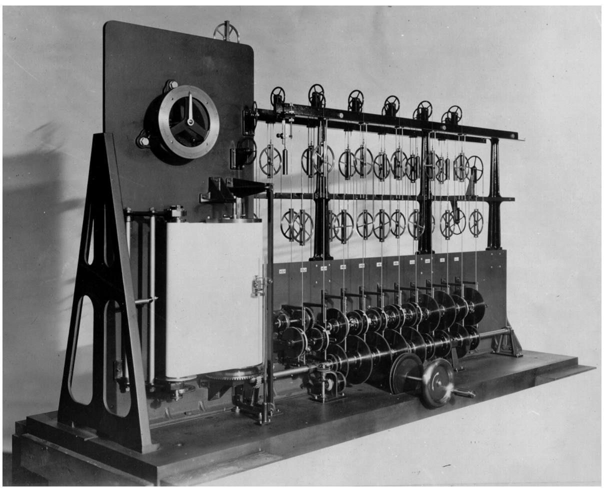

*Рис. 3.* *Машина для предсказания приливов*

`http://tidesandcurrents.noaa.gov/predma3.html` позволяет игнорировать горизонтальные перемещения штырьков, а вертикальные преобразовывать в строго вертикальные перемещения гладких (без зубьев) колёс, расположенных над шестерёнками. Для суммирования служит нить, огибающая все гладкие колеса. Правый конец нити жёстко закреплён, а на левом висит перемещающийся груз, положение которого определяется суммой (16) и тем самым предсказывает высоту прилива.

Таким образом, идея конструкции «аппарата для вычисления дзета-функции» не была новой, но оригинальным было применение подобного устройства не для практической цели — вычисления приливов, а для сугубо теоретических целей. В архиве Тьюринга [24] сохранились «синьки», показывающие, что конструкция «аппарата» не была слепым подражанием машине для расчёта приливов.

Тьюринг получил грант (запрошенные 40 фунтов стерлингов) и приступил к работе. Ему помогал студент инженерного факультета Дональд Макфейл (Donald C. MacPhail). Удивительно, что они взялись сделать этот достаточно сложный механизм вдвоём. Для требуемого интервала $1450 < t < 6000$ (см. рис. 1) значение $m$ в (16) равно 30, то есть одних зубчатых колёс требовалось изготовить более 60 штук.

Тьюрингу требовались в качестве $\omega_k$ в (16) логарифмы целых чисел, то есть числа иррациональные, и он использовал цепные дроби для приближения этих логарифмов рациональными числами, числители и знаменатели которых задавали бы количество зубьев на шестерёнках. Некоторое количество этих шестерёнок было изготовлено, но начавшаяся Вторая мировая война прервала работу, и работа над «аппаратом» Тьюринга для вычисления дзета-функции никогда не была завершена.

Понятно, что замена логарифмов натуральных чисел на их рациональные приближения приводила к дополнительной погрешности в вычислении значения дзета-функции (помимо ошибки, связанной с использованием конечной суммы вместо бесконечной), и в заявке на грант Тьюринг указал, что в некоторых случаях потребуется дополнить счёт на «аппарате» традиционным вычислением. Этому была посвящена работа Тьюринга [18], поданная в печать в том же мае 1939 года, что и заявка на грант для механического вычисления дзета-функции.

Техника из [18] стала новым инструментом для вычисления дзета-функции, но впоследствии эта работа Тьюринга была превзойдена. В частности, это сделали Эндрю Михаель Одлызко (Andrew Michael Odlyzko) и Арнольд Шёнхаге (Arnold Schönhage), которые предложили метод, особенно эффективный, когда надо найти значение $\zeta(s)$ не для одного, а для многих близких значений аргумента. Вот что они написали в [12].

> Only one other method, besides the Euler – Maclaurin and Riemann – Siegel ones, seems to have been proposed for computing

> $\zeta(s)$ to moderate accuracy at large heights, namely the one due to Turing. It was designed to provide higher accuracy than was guaranteed by the crude bounds on the remainder term in the Riemann – Siegel formula that were available at that time, and at the same time be more efficient than the Euler – Maclaurin formula. However, very good estimates for remainder terms in the Riemann – Siegel formula are now available, which seem to make Turing's method unnecessary.[1)]

Здесь под «методом Тьюринга» авторы имеют в виду предложенный им способ вычисления значений дзета-функции Римана. То, что в теории чисел традиционно называется «методом Тьюринга» — это средство для проверки того, что все нули дзета-функции с мнимыми частями в заданном интервале удовлетворяют гипотезе Римана.

Этот метод был введён Аланом Тьюрингом в работе [19], опубликованной в 1953 году. Вот как оценил её Эндрю Букер (Andrew R. Booker) в [3]:

> Reading Turing's paper on the subject, which was one of his last, one marvels at what he accomplished with the limited computational resources of the day. His method was truly ahead of its time.[2)]

По форме статья [19] выглядит как отчёт об одном конкретном вычислении, проведённом Тьюрингом в 1950 году на ЭВМ «Mark 1» в Манчестерском университете, но во Введении Тьюринг написал пророческие слова о значимости вводимого им метода:

> This paper is divided into two parts. The first part is devoted to the analysis connected with the problem. All results obtained in this part are likely to be applicable to any further calculations to the same end, whether carried on the Manchester Computer or by any other means.[3)]

---

[1)] Похоже, что только один метод, помимо методов Эйлера – Маклорена и Римана – Зигеля, был предложен для вычисления $\zeta(s)$ с умеренной точностью для больших высот, а именно, метод, принадлежащий Тьюрингу. Он был предназначен давать бо́льшую точность, чем та, которую гарантировали грубые оценки остаточного члена в формуле Римана – Зигеля, имевшиеся в то время, и в то же время быть более эффективным, чем формула Эйлера – Маклорена. Теперь, однако, имеются очень хорошие оценки остаточного члена в формуле Римана – Зигеля, которые делают метод Тьюринга излишним.

[2)] Читая работу Тьюринга по этому предмету, которая была одной из его последних, поражаешься тому, что он совершил с ограниченными вычислительными ресурсами тех дней. Его метод поистине опередил своё время.

[3)] Эта статья состоит из двух частей. Первая посвящена анализу рассматриваемой проблемы. Все результаты, полученные в этой части, вероятно, будут применимы ко всем последующим вычислениям, проводимым с той же целью, независимо от того, будут ли они они выполняться на Манчестерском Компьютере или другими средствами.

Интересно отметить, что Тьюринг не верил в справедливость гипотезы Римана:

> The calculations were done in an optimistic hope that a zero would be found off the critical line, and the calculations were directed more towards finding such zeros than proving that none existed.[4)]

При этом Тьюринг надеялся найти нуль $s = \sigma + \mathrm{i}t = \sigma + 2\pi\mathrm{i}\tau$, опровергающий гипотезу Римана, уже при сравнительно малой величине $t$:

> The principal investigation concerned the range $63^2 < \tau < 64^2$ ... The result of this investigation, so far as it can be relied on, was that ... all zeros of $\zeta(s)$ in the region $2\pi 63^2 < t < 2\pi 64^2$ are simple zeros on the critical line.[5)]

Понятно, что наличие нуля вне критической прямой можно установить, вычислив этот нуль с точностью, достаточной для вывода о том, что его вещественная часть не равна $\frac{1}{2}$, но каким образом проведя конечное вычисление с ограниченной точностью можно заключить, что рассматриваемые нули лежат ровно на критической прямой? Тьюринг придавал математической строгости большое значение:

> There is no reason in principle why computation should not be carried through with the rigour usual in mathematical analysis.[6)]

> The procedure was such that if it had been accurately followed, and if the machine made no errors in the period, then one could be sure that there were no zeros off the critical line in the interval in question.[7)]

> Even with the automatic computer this rigour can be rather tiresome to achieve, but in connexion with such a subject as the analytical theory of numbers, where rigour is the essence, it seems worth while.[8)]

---

[4)] Вычисления были проведены в оптимистической надежде найти ноль вне критической прямой и вычисления были направлены скорее на нахождение таких нулей, чем на доказательство их отсутствия.

[5)] Основное исследование относилось к области $63^2 < \tau < 64^2$ ... Результат этого исследования, насколько можно на него полагаться, состоит в том, что ... все нули $\zeta(s)$ в области $2\pi 63^2 < t < 2\pi 64^2$ лежат на критической прямой.

[6)] Нет причины, по которой нельзя было бы выполнить вычисление со строгостью, обычной в математическом анализе.

[7)] Процедура была такова, что если следовать ей аккуратно, и если машина не сделает в это время ошибки, то можно быть уверенным, что в пределах рассматриваемого интервала нет нулей вне критической прямой.

[8)] Даже с автоматическим компьютером достижение такой строгости является весьма утомительным, но в связи с таким предметом, как аналитическая теория чисел, для которой строгость является квинтэссенцией, это представляется заслуживающим усилий.

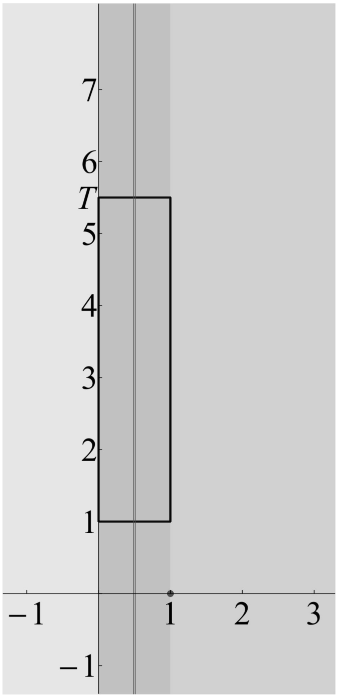


*Рис. 4. Полуплоскость сходимости, критические полоса и прямая, контур интегрирования*

Здесь интересно обратить внимание на словосочетание «автоматический компьютер» — чуть ранее Тьюринг написал следующее.

> The computer will probably have his own ideas as to how certain steps should be done. When certain steps may be omitted without serious loss of accuracy he will wish to do so.[9)]

Понятно, что под просто «компьютером» Тьюринг имеет в виду человека-вычислителя.

Предшественники Тьюринга в вычислении нулей дзета-функции Римана, проводя свои вычисления вручную, также получали математически строгое доказательство того, что найденные ими нули удовлетворяют гипотезе Римана. Грам использовал для этого *теорему Руше*, а последующие исследователи — *теорему Коши*.

[9)] Компьютер, вероятно, будет иметь свои собственные идеи по поводу того, каким образом следует выполнять определённые шаги. Когда некоторые шаги могут быть опущены без серьёзной потери точности, он пожелает это сделать.

Пусть $N(T)$ обозначает количество нулей дзета-функции, лежащих в прямоугольнике

$$0 \leqslant \mathrm{Re}(s) \leqslant 1,\ 1 \leqslant \mathrm{Im}(s) \leqslant T. \tag{17}$$

В предположении, что на его границе нет нулей дзета-функции, теорема Коши говорит, что

$$N(T) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\, \mathrm{d}s, \tag{18}$$

где контурный интеграл берётся по границе прямоугольника (17). Поскольку по определению $N(T)$ — число целое, для его нахождения достаточно вычислить правую часть (18) с ошибкой, не превосходящей, скажем, $1/3$, а затем провести округление до ближайшего целого числа. Такое вычисление и строгую оценку его погрешности можно сделать средствами численного анализа.

Теорема Коши — это общее свойство всех аналитических функций. В нашем конкретном случае дзета-функции есть ещё одна специфическая техника для подсчёта количества нулей.

Рассмотрим функцию

$$Z(t) = e^{\mathrm{i}\theta(t)}\zeta\big(\frac{1}{2} + \mathrm{i}t\big), \tag{19}$$

где

$$\theta(t) = \mathrm{Im}\ln\left(\Gamma\Big(\frac{\mathrm{i}t}{2} + \frac{1}{4}\Big)\right) - \frac{t}{2}\ln(\pi). \tag{20}$$

Экспоненциальный множитель в (19) нулей, очевидно, не имеет. Когда $t$ принимает вещественные значения, аргумент $\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}t$ у дзета-функции в (19) принимает значения на критической прямой, а значения функции $Z(t)$ оказываются вещественными.

Представим теперь, что мы нашли $N(T) + 1$ вещественное число $f_0$, …, $f_{N(T)}$ (белые точки на оси абсцисс на рис. 5) такое, что

$$1 \leqslant f_0 < \cdots < f_k < f_{k+1} < \cdots < f_{N(T)} \leqslant T \tag{21}$$

и

$$Z(f_{k-1})Z(f_k) < 0 \tag{22}$$

при $k = 1, \ldots, N(T)$. Очевидно, что в таком случае функция $Z(t)$ имеет, по крайней мере, один нуль в каждом из открытых интервалов $(f_0, f_1)$, …, $(f_{N(T)-1}, f_{N(T)})$ и, следовательно, функция $Z(t)$, а, значит, и функция $\zeta(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}t)$, имеют по крайней мере $N(T)$ нулей при $1 \leqslant t \leqslant T$. Поскольку $N(T)$ — количество нулей во всём прямоугольнике, то никаких других нулей дзета-функции в нём быть не может.

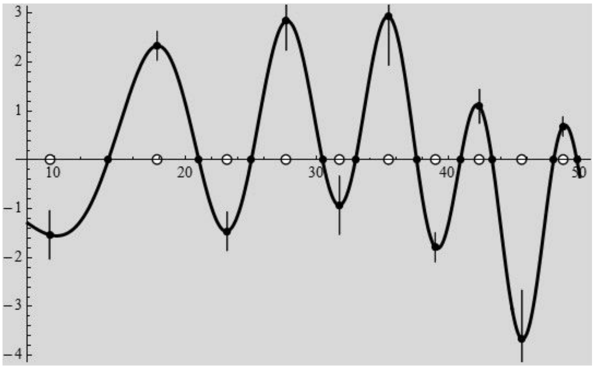


*Рис. 5.* *Функция* $Z(t)$

Отметим, что для проверки неравенств (22) нам не требуется вычислять точные значения функции $Z(t)$, мы можем делать это с некоторой погрешностью и оценивать её. Если оценка погрешности окажется по абсолютной величине меньше вычисленного приближенного значения $Z(t)$, то мы будем достоверно знать знак истинного значения $Z(t)$.

При практической реализации этого плана возникает вопрос — как найти числа $f_0, \ldots, f_{N(T)}$ с требуемыми свойствами? Конечно, можно вычислять значение $Z(1+kh)$ при $k = 1, \ldots, (T-1)/h$ и все уменьшающимися значения $h$ и ждать появления $N(T)$ перемен знака, но это очень трудоёмкий процесс.

Грам указал эвристический метод выбора значений $f_0, \ldots, f_{N(T)}$. Он рассмотрел мнимую часть экспоненциального сомножителя в (19)

$$\operatorname{Im}(e^{\mathrm{i}\theta(t)}) = \sin(\theta(t)). \tag{23}$$

Функция $\theta(t)$ имеет асимптотическое разложение

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{t}{2\pi}\right) - 1\right)t - \frac{\pi}{8} + O(t^{-1}), \tag{24}$$

из которого видно, что $\theta(t)$ растёт почти как линейная функция с логарифмически медленно увеличивающимся коэффициентом при $t$. Соответственно, график функции $\sin(\theta(t))$ выглядит как синусоида с возрастающей частотой (см. рис. 6).

Из рис. 7, на котором изображены функции $Z(t)$ и $\sin(\theta(t))$, видно, что они ведут себя подобно синусу и косинусу — нули каждой из этих функций соответствуют экстремумам другой. Положительные нули функции $\sin(\theta(t))$ получили название *точек Грама*, по традиции их обозначают $g_m$ и нумеруют так, что

$$\theta(g_m) = m\pi, \tag{25}$$

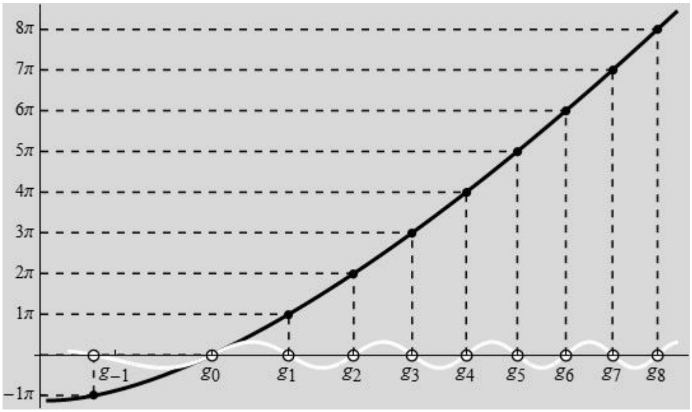


*Рис. 6.* *Функции* $\theta(t)$ *и* $\sin(\theta(t))$

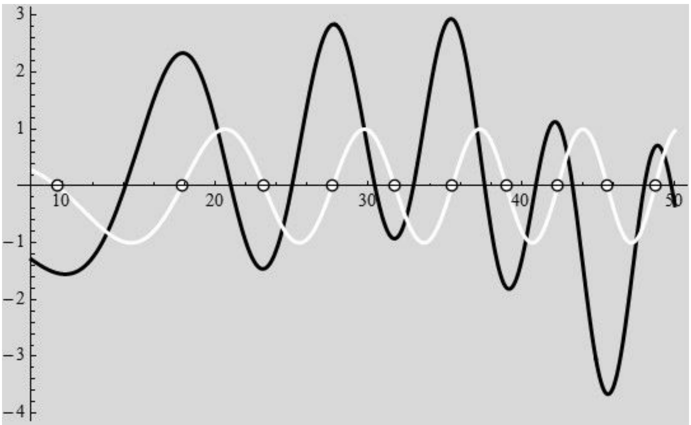


*Рис. 7.* *Функции* $Z(t)$ *и* $\sin(\theta(t))$

то есть первый нуль имеет индекс $-1$. Грам, вычислив начальные нули дзета-функции, обнаружил, что они чередуются с числами $g_m$ и при этом

$$(-1)^m Z(g_m) > 0. \tag{26}$$

Джон Ирвин Хатчинсон (John Irwin Hutchinson) назвал неравенство (26) *законом Грама*, и, по иронии судьбы, вычислив начальные 138 нулей, он же обнаружил первые исключения из этого «закона»

$$Z(g_{133}) = -0.7763\ldots,$$
$$Z(g_{134}) = -0.0169\ldots,$$
$$Z(g_{135}) = -3.4698\ldots.$$

Сейчас мы знаем, что «закон Грама» нарушается бесконечно часто, и можем различать *хорошие точки Грама*, удовлетворяющие неравенству (26), и *плохие*, ему неудовлетворяющие. Таким образом, при большой величине $T$ мы не можем брать точки Грама непосредственно на роль чисел $f_0, \ldots, f_{N(T)}$ в (21) и (22). Мы можем, однако, попытаться немного сдвинуть плохие точки, то есть найти такие (маленькие) числа $h_0, \ldots, h_{N(T)}$, для которых неравенства (21) и (22) выполняются при выборе $f_k = g_k + h_k$.

В итоге мы приходим к следующему классическому методу (использованному предшественниками Тьюринга) для проверки того, что все нули дзета-функции Римана, имеющие мнимую часть, не превосходящую некоторого числа $T$, лежат на критической прямой.

1. Вычислить с погрешностью не более $1/3$ интеграл

$$N(T) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,\mathrm{d}s,$$

округлить полученное значение до ближайшего целого числа, найдя тем самым $N(T)$ — количество нулей в прямоугольнике (17).

2. Найти $N(T)+1$ чисел $h_{-1}, h_0, \ldots, h_{N(T)-1}$ таких, что

$$1 < g_{-1} + h_{-1} < \ldots < g_m + h_m < \ldots < g_{N(T)-1} + h_{N(T)-1} < T,$$

и проверить, что при $k = 0, \ldots, N(T)-1$

$$Z(g_{k-1} + h_{k-1}) Z(g_k + h_k) < 0.$$

Если нам удастся это сделать, то мы докажем, что все нули функции $\zeta(s)$ в прямоугольнике (17) лежат ровно на критической прямой.

Что же, кроме возможной ошибочности гипотезы Римана, может помешать нам в осуществлении этого плана? Количество нулей можно подсчитывать двумя способами — с учётом кратности и без учёта кратности. Интеграл Коши (18) учитывает кратность, но когда мы оцениваем количество нулей через количество перемен знаков, каждый нуль нечётной кратности считается за один нуль, а нули чётных кратностей вообще не могут быть обнаружены по перемене знака функции. По этому поводу Тьюринг написал:

> We know no way of dealing with multiple zeros, and simply hope that none are present.[10)]

Надежда Тьюринга до сих пор оправдывалась — кратные нули дзета-функции Римана пока не обнаружены.

[10)] Мы не знаем никакого способа для работы с кратными нулями и просто надеемся, что их нет.

Усовершенствование, которое Тьюринг внёс в описанный выше метод проверки гипотезы Римана, относится к первой части — вычислению $N(t)$. Метод Тьюринга основан на одной теореме, опубликованной Литлвудом в 1914 году. Она производит сравнение $N(T)$ с количеством точек Грама, не превосходящих $T$, которое легко определить. Действительно, неравенство $g_m < T$ в силу монотонности функции $\theta$ эквивалентно неравенству $\theta(g_m) < \theta(T)$ и, согласно (25), неравенству $\pi m < \theta(T)$, то есть имеется $\lfloor \theta(T)/\pi \rfloor + 2$ точки Грама, не превосходящие $T$ (слагаемое 2 вызвано нумерацией точек начиная с $-1$). Определив функцию $S(T)$ через равенство

$$N(T) = \frac{\theta(T)}{\pi} + 1 + S(T), \tag{27}$$

мы можем ожидать, что она будет принимать не слишком большие значения. Теорема, доказанная Литлвудом, утверждает, что это верно в среднем.

Теорема [10].

$$\int_0^T S(t)\,\mathrm{d}t = O(\ln(T)). \tag{28}$$

Сам Литлвуд не указал, как эта теорема может быть использована для вычисления $N(T)$. Не увидел этого и Титчмарш, проверивший в 1936 году гипотезу Римана для первых 1041 нулей, и только Тьюринг нашёл применение результата Литлвуда для упрощения вычислений.

Теорема Литлвуда сформулирована с использованием символа $O$ и по этой причине она сама по себе бесполезна для каких-либо фактических вычислений, ибо не утверждает ничего ни про одно конкретное значение $T$. В связи с этим Тьюринг пишет:

> In analysis it is customary to use the notation $O\{f(x)\}$ to indicate 'some function whose ratio to $f(x)$ is bounded'. In the theory of a computation one needs a similar notation, but one is interested in the value of the bound concerned. We therefore use the notation $\Theta(\alpha)$ to indicate 'some number not greater in modulus than $\alpha$'. The symbol $\Theta$ has been chosen partly because of a typographical similarity to $O$, partly because of the relation with the use $\vartheta$ to indicate 'a number less than 1'.[11)]

[11)] В анализе принято использовать запись $O\{f(x)\}$ для обозначения «некоторой функции, отношение которой к $f(x)$ ограниченно». В теории вычислений необходимо подобное обозначение, но при этом интерес представляет значение такой границы. Соответственно, мы будем использовать запись $\Theta(\alpha)$ для обозначения «некоторого числа, не превосходящего по модулю числа $\alpha$». Символ $\Theta$ выбран отчасти из-за типографской схожести с $O$, отчасти из-за использования $\vartheta$ для обозначения «некоторого числа, меньшего 1».

Используя введённое обозначение, Тьюринг уточнил теорему Литлвуда, доказав, что если $168\pi < T_1 < T_2$, то

$$\int_{T_1}^{T_2} S(t)\,\mathrm{d}t = \Theta\left(2.30 + 0.128\ln\left(\tfrac{T_2}{2\pi}\right)\right). \tag{29}$$

Доказательство занимает в [19] пять страниц традиционных теоретико-числовых оценок.

Дальнейший ход мыслей Тьюринга можно описать так. Наша конечная цель — установить положение нулей дзета-функции Римана с мнимыми частями, не превосходящими по абсолютной величине некоторого числа $T$. Вместо этого мы можем попытаться проделать это для некоторого $T_0$, которое больше $T$, поскольку может оказаться, что вычислить $N(T_0)$ легче, чем вычислить $N(T)$. И действительно, оказалось, что этого можно достичь, если вместо того, чтобы вычислять $S(T_0)$, исходя из значения $T_0$, поступить наоборот — потребовать, чтобы

$$S(T_0) = 0, \tag{30}$$

и искать такое значение $T_0$.

Из (30) и (27) следует, что значение $\theta(T_0)$ кратно $\pi$ и по определению $T_0$ должно быть некоторой точкой Грама $g_m$. Наоборот, если $T_0 = g_m$, то $\theta(T_0)$ также кратно $\pi$ и согласно (27) $S(T_0)$ — число целое. Это означает, что для установления равенства (30) достаточно показать, что выполнены неравенства

$$-1 < S(T_0) < 1. \tag{31}$$

Более того, нетрудно проверить, что если в качестве $T_0$ мы возьмём не произвольную, а хорошую точку Грама, то $S(T_0)$ обязательно будет чётным числом, и вместо неравенств (31) достаточно получить более слабые неравенства

$$-2 < S(T_0) < 2. \tag{32}$$

Итак, пусть $g_m$ — хорошая точка Грама. Несколько последующих точек могут оказаться плохими, и нам потребуется найти сдвиги $h_{m+1}, \ldots, h_{m+k-1}$ такие, что

$$\begin{array}{rcl} (-1)^{m+1}Z(g_{m+1}+h_{m+1}) & > & 0, \\ & \vdots & \\ (-1)^{m+k-1}Z(g_{m+k-1}+h_{m+k-1}) & > & 0. \end{array} \tag{33}$$

Рано или поздно (а обычно весьма скоро) мы найдём следующую хорошую точку Грама $g_{m+k}$, для которой $(-1)^{m+k}Z(g_{m+k}) > 0$. Используя свою версию (29) теоремы Литлвуда, Тьюринг доказал, что

$$S(g_m) \leqslant 1 + \frac{2.30 + 0.128 \ln\left(\frac{g_{m+k}}{2\pi}\right) + \sum_{j=1}^{k-1} h_{m+j}}{g_{m+k} - g_m}\,. \tag{34}$$

Аналогично можно получить двойственную оценку снизу:

$$S(g_m) \geqslant -1 - \frac{2.30 + 0.128 \ln\left(\frac{g_m}{2\pi}\right) - \sum_{j=1}^{k-1} h_{m-j}}{g_m - g_{m-k}}\,. \tag{35}$$

Если в (34) и (35) слагаемые под знаками сумм достаточно малы, то мы получаем требуемые неравенства (32). Таким образом, главное преимущество метода Тьюринга состоит в замене трудоёмкого вычисления контурного интеграла в (18) на вычисление значений функции $Z(t)$ в небольшом количестве дополнительных точек.

Вторая часть статьи [19], представляющая ныне главным образом исторический интерес, посвящена конкретному счёту, проведённому Тьюрингом. Это было одно из первых применений ЭВМ для получения нетривиальных математических результатов, и Тьюринг приводит много деталей, которые сегодня уже не принято публиковать в математических журналах. В частности, он описывает устройство машины:

> The storage of the machine is of two kinds, known as ‘electronic’ and ‘magnetic’ storage. The electronic storage consisted of four ‘pages’ each of thirty-two lines of forty binary digits. The magnetic storage consisted of a certain number of tracks each of two pages of similar capacity. Only about eight of these tracks were available for the zeta-function calculations.[12)]

Тьюринг далее приводит таблицу распределения памяти — см. рис. 8.

Результаты счёта выдавались на перфоленту с пятью рядами отверстий, и потому использовалась система счисления с основанием 32. Содержимое ленты можно было потом распечатать. Тьюринг счёл нужным привести таблицу соответствия цифр и символов на распечатке — см. рис. 9.

Про использование десятичной записи Тьюринг написал следующее:

> More conventionally the scale of 10 can be used, but this would require the storage of a conversion routine, and the writer was entirely content to see the results in the scale of 32, with which he is sufficiently familiar.[13)]

[12)] Память машины была двух типов, известных как «электронная» и «магнитная» памяти. Электронная память состояла из четырёх «страниц», каждая из которых имела по тридцать две строки из сорока двоичных разрядов. Магнитная память имела некоторое количество треков по две страницы такого же размера. Только примерно восемь из этих треков были доступны при вычислениях дзета-функции.

[13)] Более традиционно можно использовать основание 10, но это потребовало бы

The storage available was distributed as follows:

| | |
|---|---|
| *Magnetic store* | |
| Logarithms routine (for $\kappa$) | 1 page |
| Table of logarithms and reciprocal square roots | 4 pages |
| Routine for calculating the terms $n^{-\frac{1}{2}}\cos 2\pi(\tau \log n - \kappa)$ and table of cosines | 2 pages |
| Remainder of routine for calculating the function $Z(\tau)$ | 2 pages |
| Input routine | 2 pages |
| Output routine | 2 pages |
| *Electronic store*, as occupied during the greater part of the time | |
| Instructions and cosines | 2 pages |
| Logarithms and reciprocal square roots | 1 page |
| Miscellaneous data and working space | 1 page |

*Рис. 8. Распределение памяти*

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| / | E | @ | A | : | S | I | U | ½ | D | R | J | N | F | C | K | T | Z | L | W |

| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| H | Y | P | Q | O | B | G | \|\| | M | X | V | £ |

*Рис. 9. Кодировка цифр системы счисления с основанием 32*

Большой проблемой была работоспособность машины. Тьюринг пишет:

> If it had not been for the fact that the computer remained in serviceable condition for an unusually long period from 3 p.m. one afternoon to 8 a.m. the following morning it is probable that the calculations would never have been done at all.[14)]

Помимо интервала $2\pi 63^2 < t < 2\pi 64^2$, Тьюринг хотел продолжить вычисления Титчмарша:

> Another investigation was also started with a view to extending the range of relatively small values of $t$ for which the Riemann hypothesis holds. Titchmarsh has already proved that it holds up to $t = 1468$, i.e. to about $\tau = 231\ldots$ It was intended to continue the work up to about $\tau = 500\ldots$[15)]

---

памяти для процедуры преобразования, а автор [Тьюринг] был вполне удовлетворён увидеть результаты с основанием 32, к которому он достаточно привычен.

[14)]Если бы не тот факт, что компьютер однажды оставался в рабочем состоянии необычно долгий период от 3 часов пополудни до 8 часов утра следующего дня, то вычисления вообще никогда не были бы проведены.

[15)]Было начато другое исследование с целью расширить область сравнительно маленьких значений $t$, для которых гипотеза Римана справедлива. Титчмарш уже доказал, *Табл. 3. Проверка гипотезы Римана, начиная с А. Тьюринга*

| Год | Количество нулей | Автор |
|---|---|---|
| 1953 | 1104 | A. M. Turing |
| 1956 | 25000 | D. H. Lehmer |
| 1958 | 35337 | N. A. Meller |
| 1966 | 250000 | R. S. Lehman |
| 1968 | 3500000 | J. B. Rosser, J. M. Yohe, L. Schoenfeld |
| 1977 | 40000000 | R. P. Brent |
| 1979 | 81000001 | R. P. Brent |
| 1982 | 200000001 | R. P. Brent, J. van de Lune, H. J. J. te Riele, D. T. Winter |
| 1983 | 300000001 | J. van de Lune, H. J. J. te Riele |
| 1986 | 1500000001 | J. van de Lune, H. J. J. te Riele, D. T. Winter |
| 2004 | 900000000000 | S. Wedeniwski |
| 2004 | 10000000000000 | X. Gourdon |

> The interval $1414 < t < 1608$ was investigated and checked, but unfortunately at this point the machine broke down and no further work was done. Furthermore this interval was subsequently found to have been run with a wrong error value, and the most that can consequently be asserted with certainty is that the zeros lie on the critical line up to $t = 1540$, ... a negligible advance.[16)]

Действительно, если сравнить количество нулей, проверенных Тьюрингом, с количеством нулей, проверенных до него (таблица 2) и после него (таблица 3), то достижения Тьюринга кажутся незначительными. На самом деле вклад Тьюринга огромен. Он не только был первым, кто применил компьютер для проверки гипотезы Римана (рано или поздно это сделал бы кто-либо иной), но, что гораздо важнее, как и предвидел

---

что она верна до $t = 1468$, то есть примерно до $\tau = 231\ldots$ Предполагалось продолжить работу до примерно $\tau = 500\ldots$

[16)] Интервал $1414 < t < 1608$ был исследован и проверен, но, к сожалению, в этот момент машина сломалась и никакой дальнейшей работы проведено не было. Впоследствии было обнаружено, что счёт для этого интервала был проведён с неправильной величиной ошибки, и самое большое, что можно утверждать с уверенностью, — это то, что нули лежат на критической прямой вплоть до $t = 1540$, ... несущественное продвижение.

Тьюринг, все последующие вычисления, вплоть до наших дней, проводились по его методу.

Традиционно в описаниях исследований Алана Тьюринга по теории чисел говорится, что его научное наследие состоит из нескольких писем к другим математикам, неопубликованных рукописей, и только двух печатных работ — [18, 19]. Это, однако, не совсем так. Есть ещё одна опубликованная Тьюрингом работа, где он изучает гипотезу Римана. По какой-то причине эта работа практически не цитируется специалистами по теории чисел. Возможно, они не ценят полученный там результат, а, возможно, они просто не знают, что в работе [17], названной *Systems of logic based on ordinals*[17) ] Тьюринг изучает, в частности, гипотезу Римана (эта статья — изложение диссертации Тьюринга).

Третий раздел этой работы назван «Теоретико-числовые теоремы». Тьюринг начинает его с того, что даёт формальное определение:

> By a number-theoretic theorem we shall mean a theorem of the form “$\theta(x)$ vanishes for infinitely many natural numbers $x$”, where $\theta(x)$ is a primitive recursive function.[18)]

Тьюринг тут же делает подстрочное примечание:

> I believe that there is no generally accepted meaning for this term, but it should be noticed that we are using it in a rather restricted sense.[19)]

Затем Тьюринг даёт второе, эквивалентное определение «теоретико-числовых теорем» в его смысле:

> An alternative form for number-theoretic theorems is “for each natural number $x$ there exists a natural number $y$ such that $f(x, y)$ vanishes”, where $f(x, y)$ is primitive recursive.[20)]

Оба этих определения, по-видимому, чужды специалистам по теории чисел, поскольку в них используется понятие примитивно рекурсивной функции из теории вычислимости. Можно, однако, дать третье определение, более близкое по духу к теории чисел.

Обозначим через $\Pi^0_0$ и через $\Sigma^0_0$ класс всех арифметических формул, в которых все кванторы ограничены. После выбора значений свободных

---

[17)] *Системы логики, основанные на ординалах.*

[18)] Под теоретико-числовой теоремой мы будем понимать теорему вида «$\theta(x)$ обращается в ноль для бесконечно многих натуральных $x$», где $\theta(x)$ — примитивно рекурсивная функция.

[19)] Я полагаю, что нет общепринятого понимания этого термина, но следует отметить, что мы используем его в очень узком смысле.

[20)] Альтернативной формой теоретико-числовых теорем является «для каждого натурального числа $x$ существует натуральное число $y$, при котором $f(x, y)$ обращается в ноль», где $f(x, y)$ — примитивно рекурсивная функция.

переменных в таких формулах мы, очевидно, можем установить их истинность или ложность. Далее, пусть $\Pi_n^0$ обозначает при $n > 0$ класс всех формул вида

$$\forall x_1 \dots x_m \varphi \tag{36}$$

где $\varphi$ — формула из класса $\Sigma_{n-1}^0$, и аналогично $\Sigma_n^0$ — класс формул вида

$$\exists x_1 \dots x_m \psi \tag{37}$$

где $\psi$ — формула из класса $\Pi_{n-1}^0$. Мы получаем *арифметическую иерархию*, в которой каждый класс содержит любой другой класс, расположенный левее него на этой схеме:

$$\begin{array}{lllll} & \Pi_1^0 & \Pi_2^0 & \Pi_3^0 & \dots \\ \Pi_0^0 = \Sigma_0^0 & & & & \\ & \Sigma_1^0 & \Sigma_2^0 & \Sigma_3^0 & \dots \end{array} \tag{38}$$

Теоретико-числовые теоремы в смысле Тьюринга — это в точности (истинные) формулы из класса $\Pi_2^0$.

Чтобы мотивировать введённое название, Тьюринг приводит пример — *Великую теорему Ферма*. В качестве менее очевидного примера Тьюринг указывает гипотезу Римана.

Сначала вообще непонятно, почему где-то в арифметической иерархии лежит гипотеза Римана, поскольку исходно она была сформулирована как утверждение про комплексные числа. Тем не менее, их можно представить как пары вещественных чисел, которые, в свою очередь, могут быть представлены как пределы (сходящихся) последовательностей рациональных чисел. Мощная техника *арифметизации*, развитая Куртом Гёделем, позволяет в итоге записать гипотезу Римана как арифметическую формулу с больши́м числом кванторов по натуральным числам.

Таким образом, в арифметической иерархии (38) есть формулы, эквивалентные гипотезе Римана, причём они могут встречаться в разных классах. Возникает естественный вопрос — сколь малым может быть такой класс?

Поставленный в такой форме, этот вопрос является бессодержательным или тривиальным, поскольку ответ очевиден — конечно, это самый маленький класс $\Pi_0^0 = \Sigma_0^0$. Действительно, гипотеза Римана — это конкретное утверждение, не содержащее параметров, и оно либо истинно, либо ложно. В первом случае гипотеза Римана эквивалентна формуле $0 = 0$, во втором — формуле $0 = 1$, и обе эти формулы принадлежат классу $\Pi_0^0 = \Sigma_0^0$.

Более корректной является следующая постановка вопроса: где в арифметической иерархии (38) мы можем указать, *при нашем нынешнем уровне знаний*, формулу, эквивалентную гипотезе Римана?

Алан Тьюринг нашёл такую формулу в классе $\Pi^0_2$, то есть в его классе теоретико-числовых теорем. Несложное доказательство, занимающее чуть больше одной страницы, не вызвало, по-видимому, большого интереса у специалистов по теории чисел.

В 1958 году математический логик Георг Крайзель (Georg Kreisel) усилил результат Тьюринга, построив формулу из класса $\Pi^0_1$, эквивалентную гипотезе Римана. Идею его конструкции можно пояснить следующим образом.

Известно, что все невещественные нули дзета-функции Римана расположены симметрично относительно прямых $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ и $\mathrm{Im}(s) = 0$, разбивающих всю комплексную плоскость на четыре квадранта, поэтому достаточно проверить, что нет нулей, скажем, в открытом квадранте $\mathrm{Re}(s) > 1/2$ & $\mathrm{Im}(s) > 0$.

Мы можем представить этот квадрант как счётное объединение содержащихся в нём прямоугольников и сформулировать гипотезу Римана как утверждение, что ни один из этих прямоугольников не содержит нулей дзета-функции. К сожалению, непосредственно записать это утверждение как неравенство с соответствующим контурным интегралом мы не можем, поскольку a priori ноль может лежать на границе использованного нами прямоугольника, но Крайзель нашёл способ обойти эту трудность.

Следующим шагом в усилении результатов Тьюринга и Крайзеля стало бы помещение гипотезы Римана в класс $\Pi^0_0 = \Sigma^0_0$, то есть её доказательство или опровержение, но это сейчас находится вне пределов наших возможностей.

Тем не менее, это направление исследований получило некоторое развитие. В 1970 году была доказана так называемая DPRM-теорема[21)], устанавливающая, что в определении класса $\Pi^0_1$ в роли формулы $\varphi$ всегда можно брать формулу вида $P(x_1 \ldots x_m) \not\equiv 0$, где $P$ — многочлен с целыми коэффициентами. Совместно с результатом Крайзеля это дало такое следствие: *можно построить конкретный многочлен $R(x_1 \ldots x_m)$ с целыми коэффициентами такой, что гипотеза Римана эквивалентна утверждению об отсутствии решения у диофантова уравнения $R(x_1 \ldots x_m) = 0$* (конкретный способ построения такого уравнения описан, например, в [1]).

Гипотеза Римана была включена Давидом Гильбертом в его 8-ю проблему, а в 10-й проблеме он предлагал найти алгоритм для распознавания разрешимости произвольного диофантова уравнения. Таким образом, начатое Тьюрингом выяснение вопроса о положении гипотезы Римана в

21) Аббревиатура в названии теоремы образована из первых букв фамилий математиков Мартина Дэвиса (Martin Davis), Хилари Патнема (Hilary Putnam), Джулии Робинсон (Julia Robinson) и Юрия Матиясевича. — *Прим. ред.*


*Рис. 10. Памятник Алану Тьюрингу в Сэквиль-парке, Манчестер*

арифметической иерархии привело к установлению неожиданной для специалистов по теории чисел связи между 8-й и 10-й проблемами Гильберта — оказалось, что гипотезу Римана можно переформулировать как очень частный случай 10-й проблемы Гильберта.

Без тезиса Чёрча – Тьюринга мы не могли бы даже сформулировать, что означает неразрешимость 10-й проблемы Гильберта, установление которой было стимулом для доказательства DPRM-теоремы. Сейчас мы имеем формальное доказательство того, что никакая машина Тьюринга не может распознавать, имеет ли произвольное диофантово уравнение решение или нет. Свед́ение же гипотезы Римана к конкретному диофантову уравнению, первый шаг на пути к которому сделал Алан Тьюринг, даёт «психологическое» объяснение трудности диофантовых уравнений — было бы удивительно ожидать существование требуемого Гильбертом алгоритма для диофантовых уравнений, ибо тогда можно было бы, по крайней мере в принципе, «механически» установить справедливость или ложность такой трудной гипотезы, как гипотеза Римана.

## Список литературы

[1] Матиясевич Ю. В. *Десятая проблема Гильберта*. М.: Физматлит, 1993. `http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/H10Pbook`,

[2] Booker A. R. *Turing and the Riemann Hypothesis* // Notices Amer. Math. Soc. Vol. 53, no. 10. 2006 P. 1208–1211.

[3] Booker A. R. *Artin's Conjecture, Turing's Method, and the Riemann Hypothesis* // Experiment. Math. Vol. 15, issue 4. 2006. P. 385–408.

[4] *Alan Turing—His Work and Impact*. Под ред. S. B. Cooper, J. van Leeuwen. Elsevier, 2013.

[5] *The Undecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvable Problems and Computable Functions*. Под ред. M. Davis. Hewlett, NY: Raven Press, 1965. Переиздано Dover Publications, 2004.

[6] Hejhal D. A. *A few comments about Turing's method* // [4].

[7] Hejhal D. A., Odlyzko A. M. *Alan Turing and the Riemann zeta function* // [4].

[8] Ingham A. E. *The Distribution of Prime Numbers*. Cambridge University Press, 1932; Перепечатано Stechert-Hafner, Inc., New York, 1964; Cambridge University Press, Cambridge, 1990. Переводы на русский язык: Главная редакция общетехнической литературы и номографии, Москва–Ленинград, 1936; Едиториал УРСС, 2005.

[9] Ingham A. E. *A note on the distribution of primes* // Acta Arithmetica. Vol. 1. 1936. P. 201–211.

[10] Littlewood J. E. *Sur la distribution des nombres premiers* // Comptes rendus de l'Academie des sciences. Vol. 158. 1914. P. 1869–1872. Перепечатано в *Collected Papers of J. E. Littlewood*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1982.

[11] Kreisel G. *Mathematical significance of consistency proofs* // Journal of Symbolic Logic. Vol. 23(2). 1958. P. 155–182.

[12] Odlyzko A. M., Schönhage A. *Fast Algorithms for Multiple Evaluations of the Riemann Zeta Function* // Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 309. No 2. 1988. P. 797–809.

[13] Riemann B. *Über die Anzhal der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. Monatsberichter der Berliner Akademie, 1859. // Riemann B. *Gesammelte Werke*. Teubner, Leipzig, 1892; reprinted by Dover Books, New York, 1953. `http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/1859_manuscript/zeta.pdf` , English translation `http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/EZeta.pdf` .

[14] Skewes S. *On the Difference* $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ (I) // Journal of the London Mathematical Society. Vol. 8. 1933. P. 227–283.

[15] Skewes S. *On the Difference* $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ (II) // Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 5. 1955. P. 48–70.

[16] Turing A. M. *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem* // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. Vol. 42. 1937. P. 230–265. Correction, ibid. Vol. 43. 1938. P. 544–546. Перепечатано в [4, 5, 20]

[17] Turing A. M. *Systems of logic based on ordinals* // Proceedings of the London Mathematical Society. Ser. 2. Vol. 45. 1939. P. 161–228. Перепечатано в [4, 5, 20]

[18] Turing A. M. *A method for the calculation of the zeta-function* // Proceedings of the London Mathematical Society. Ser. 2. Vol. 48. 1943. P. 180–197. Перепечатано в [4, 21].

[19] Turing A. M. *Some calculations of the Riemann zeta-function* // Proceedings of the London Mathematical Society. Ser. 3. Vol. 3. 1953. P. 99–117. Перепечатано в [4, 21].

[20] Turing A. M. *Collected Works of A. M. Turing: Mathematical Logic*. (Под ред. R. O. Gandy, C. E. M. Yates.) Amsterdam: Elsevier Science Publishers. 2001.

[21] Turing A. M. *Collected Works of A. M. Turing: Pure Mathematics*. (Под ред. J. L. Britton.) Amsterdam: North-Holland. 1992.

[22] Welles D. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*. London: Penguin Books. 1997.

[23] Clay Mathematics Institute Millenium Problems `http://www.claymath.org/millennium`

[24] the Turing Digital Archive. `http://www.turingarchive.org`

Ю. В. Матиясевич, академик РАН, Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова. 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, д. 27.
Email: `yumat@pdmi.ras.ru`