Оригами, или что можно получить с помощью складывания листа бумаги

Д. И. Грищенко

1. Введение

Хорошо известно, что множество координат точек, которые можно получить при построениях с помощью циркуля и линейки, есть поле, получающееся из $\mathbb{Q}$ итерированием операции извлечения квадратного корня. Естественно поставить вопрос о множествах точек, получающихся в результате других геометрических построений.

В этой работе мы изучим множество чисел оригами, то есть множество координат точек, которые можно получить при помощи складывания листа бумаги (при этом образуются прямые, которые, конечно, при пересечении дают нам точки). Оказывается, с помощью оригами выполнимы такие операции как удвоение куба, трисекция угла ... Более того, множество чисел оригами есть поле, получающееся из $\mathbb{Q}$ итерированием операций извлечения квадратного и кубического корней.

Основой для данной работы послужила статья [3], в которой формулируется результат об описании чисел оригами. Однако, многие существенные доказательства в [3] отсутствуют, в том числе и доказательство того, что множество чисел оригами не выходит за рамки того, что описано в теореме о характеризации чисел оригами. Кроме восполнения недостающих доказательств, мы получаем новые результаты, отсутствовавшие в [3]. Среди прочего, это теорема о характеризации фалесовых чисел и теорема о выделении полной независимой системы аксиом оригами.

Основываясь на [5], мы берем естественный набор из шести аксиом, описывающих процесс складывания из бумаги. Мы последовательно изучаем все увеличивающиеся множества точек, получающиеся добавлением к первым трем аксиомам четвертой, пятой, а потом рассматривая все шесть аксиом (числа Фалеса, Пифагора, Евклида и числа оригами). Основной результат описывает следующая теорема:

Теорема. *Множество точек, построимых с помощью складывания из бумаги при изначально данных точках* 0 *и* 1 *— это наименьшее подполе*

$\mathbb{C}$, *замкнутое относительно операций извлечения квадратного и кубического корня.*

В конце нами доказана теорема, выделяющая из шести аксиом независимую подсистему, состоящую из аксиом 2, 3 и 6.

2. Аксиомы складывания

В этой работе мы будем рассматривать только так называемое "One-Fold Origami", когда разрешается складывать только по одной линии и нельзя осуществлять одновременное складывание по двум и более линиям. Помимо этого есть "Two-Fold Origami" и "Multi-Fold Origami", когда разрешается складывать лист бумаги в двух (или трех и более) местах одновременно. Эти варианты и многое другое подробно описано в статье Р. Альперина и Р. Ленга [4].

Имеется шесть аксиом складывания листа бумаги, выполнение которых легко проверить. Мы не будем этого делать, как и обсуждать вопрос о том, почему эти аксиомы описывают все возможные складывания. Наша цель — описать множество построимых точек.

(A1) Если точки A и B построимы, то прямая l, проходящая через A и B, построима.

(A2) Если прямые k и l построимы, то точка $k \cap l$ построима.

(A3) Можно построить серединный перпендикуляр к отрезку с концами в построимых точках.

(A4) Можно построить биссектрису любого построимого угла (угол считаем построимым, если мы можем построить его стороны).

(A5) Если дана построимая прямая l и построимые точки P, Q, то построима такая прямая, проходящая через Q, что при симметрии относительно нее P попадает на l (при условии, что такая прямая существует).

(A6) Если даны прямые k, l и точки P, Q, то мы можем построить такую прямую m (если она существует), что при симметрии относительно m, точка P переходит на k, а точка Q переходит на l.

Эти аксиомы являются зависимыми и эквивалентная им независимая подсистема аксиом будет описана в седьмом разделе.

Конструкции, которые можно получить, используя только первые три аксиомы называются фалесовскими, четыре — пифагоровыми, пять — евклидовыми. До перехода к полю чисел оригами, опишем множества точек, получаемых с помощью каждой из этих конструкций.

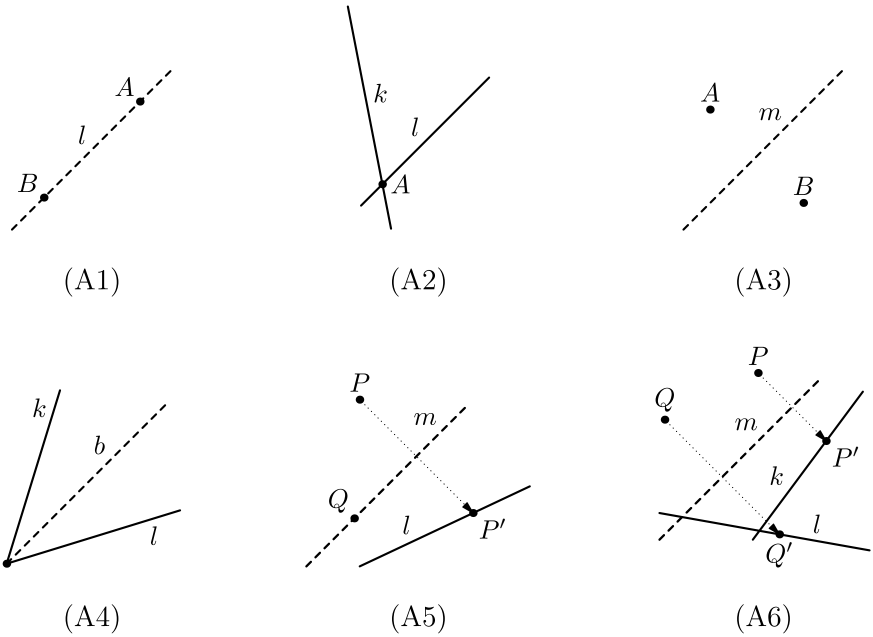

Рис. 1. *Аксиомы складывания*

3. Фалесовские конструкции

Для начала хотелось бы разобраться с тем, что мы можем получить при использовании только первых трех аксиом.

Хотелось бы предупредить читателя, что не все факты, описанные в этом разделе, является обязательными для доказательства основной теоремы. Если интересует только часть, связанная с ней, то достаточно прочесть только леммы 3.1–3.2, следствия 3.1–3.5, предложение 3.1.

Все конструкции мы рассматриваем над полем $\mathbb{C}$ (т. е. используем на плоскости комплексную координату).

Пусть даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Определим множества точек $\Pi = \Pi(A, B, C)$ и прямых $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A, B, C)$ как наименьшие множества, элементы которых — точки и прямые над $\mathbb{C}$ со следующими свойствами:

(0) Π содержит точки A, B, C;

(1) прямая, проходящая через точки множества Π, принадлежит $\mathcal{L}$;

(2) точка пересечения двух прямых из $\mathcal{L}$ принадлежит Π;

(3) серединный перпендикуляр к отрезку с концами в точках из Π принадлежит $\mathcal{L}$.

Будем называть точку построимой, если она принадлежит П. Будем называть прямую построимой, если она принадлежит $\mathcal{L}$.

Заметим, что П — это множество, которые мы можем получить из точек A, B, C, складывая лист бумаги с использованием только первой, второй и третьей аксиом.

На протяжении этого параграфа мы будем работать именно с такими построениями.

Лемма 3.1. *Если имеется отрезок AB и точка P, то мы можем построить отрезок с концом в этой точке, параллельный исходному и равный ему по длине.*

Доказательство. Пусть точка P не лежит на отрезке AB (см. рис. 2). Соединим точки A и B с точкой P. Отметим середины сторон получившегося треугольника p, a, b, лежащие против соответствующих вершин (эти точки построимы по третьей аксиоме).

Пересечем Pp с ba, получим точку O. Пересечем pa и AO, получим точку T. Заметим, что $PT \parallel AB$ и $|AB| = 2|PT|$.

Теперь пересечем прямые Aa и PT получим точку V. Тогда PV — требуемый отрезок.

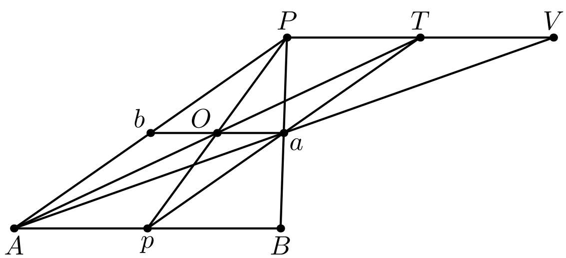

Рис. 2.

Пусть P лежит на AB, тогда воспользуемся некоторой точкой Q, не лежащей на AB (она существует, так как по условию точки A, B, C не лежат на одной прямой), по первой части доказательства из нее можно отложить отрезок, затем отложим равный данному отрезок из точки P. $\square$

Следствие 3.1. *Из данной точки можно опустить перпендикуляр на данную прямую.*

Доказательство. По лемме 3.1 мы можем провести через данную точку P прямую m' параллельную данной прямой m (мы можем провести параллельную прямую, так как по лемме 3.1 мы можем провести отрезок равный и параллельный данному, а через него можно провести прямую). Теперь возьмем на m' такой отрезок что, P — его середина (см. рис. 3).

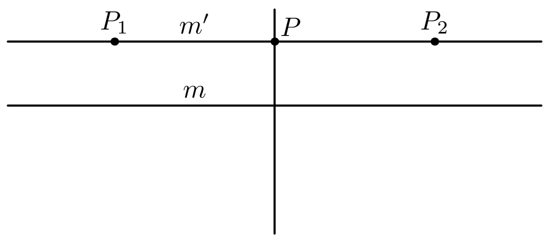

Рис. 3.

Проведем к нему серединный перпендикуляр (это возможно по аксиоме 3). Это и будет требуемый перпендикуляр. □

Следствие 3.2. *Если даны три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, и точка P, не лежащая на ней, то мы можем построить такую точку D, что $\triangle ABD \sim \triangle ACP$ (см. рис. 4).*

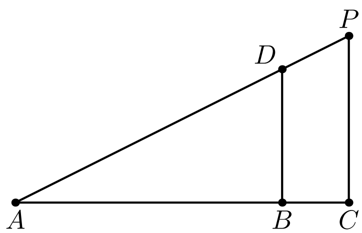

Рис. 4.

Доказательство. Через точку B (рис. 4) проведем прямую, параллельную PC, это возможно по лемме 3.1. Она пересечет прямую AP в некоторой точке, это и будет точка D (очевидное подобие по 2 углам). □

Следствие 3.3. *Если даны точка P и прямая l, то мы можем отразить P относительно l. Если даны прямые k, l, то мы можем отразить k относительно l.*

Доказательство. Если мы умеем отражать точку, то, очевидно, мы умеем отражать прямую (отразив две точки, лежащие на этой прямой).

Если P лежит на прямой l, то ее образ есть она сама. Если нет, то проведем через точку P прямую l_1, параллельную l (см. рис. 5). Теперь мы возьмем на l_1 точку A, отличную от P. Из точек A и P опустим перпендикуляры на прямую l. Они пересекут l в точках B и C соответственно. Теперь по лемме 3.1 мы можем построить отрезок из точки C, равный и параллельный AB, не совпадающий с PC (это возможно, так как мы

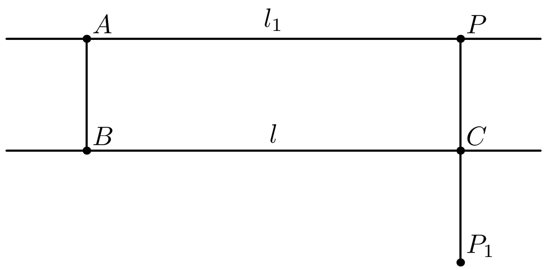

Рис. 5.

умеем строить два таких отрезка). Тогда его конец, отличный от C, и будет образом P при отражении относительно прямой l. □

Следствие 3.4. *Множество* Π *замкнуто относительно добавления отрезков в* $\mathbb{C}$, *т. е. если у нас есть два отрезка, то мы можем пририсовывать их друг к другу и получать построимые точки. Если положить* $A = 0$, *то* Π *— абелева группа.*

Доказательство. Возьмем AQ, RT, тогда мы можем из точки Q отложить отрезок, равный и параллельный RT, получим отрезок QO. Тогда A и O построимы, а значит отрезок AO построим.

Если мы положим, что $A = 0$, то мы получим абелеву группу, так как все свойства абелевой группы выполнены. □

Без ограничения общности полагаем, что $A = 0$ и $B = 1$. Тогда $\Pi = \Pi(0, 1, C)$ зависит только от комплексного числа C. Обозначим $C \equiv z$ и будем далее писать $\Pi(z)$ вместо $\Pi(0, 1, C)$.

Теперь мы можем построить координатные оси как подмножества $\mathbb{R}$ (мы можем провести прямую AB, назвав ее осью $\mathcal{X}$, и перпендикулярную к ней прямую через A, котоую мы назовем осью $\mathcal{Y}$). Обозначим через $\mathcal{X}(z)$ проекцию $\Pi(z)$ на ось $\mathcal{X}$, а через $\mathcal{Y}(z)$ проекцию $\Pi(z)$ на ось $\mathcal{Y}$. Считаем что $\mathcal{X}(z), \mathcal{Y}(z) \subset \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{X}(z)$ и $i\mathcal{Y}(z)$ это подмножества Π. Так как Π абелева группа, то $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ тоже абелевы группы. Очевидно, что $\Pi(z) = \mathcal{X}(z) \oplus i\mathcal{Y}(z)$ (по следствию 3.4 мы можем «складывать отрезки», а все элементы $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ построимы, так как мы можем опустить перпендикуляр на каждую ось).

Следствие 3.5. *Для любого* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *множество* $\Pi(z)$ *— векторное пространство над* $\mathbb{Q}$, *замкнутое относительно операции комплексного сопряжения и содержащее подпространства* $\mathcal{X}(z)$ *и* $i\mathcal{Y}(z)$.

Доказательство. Если нам дана точка W и некоторое натуральное число n, то мы можем решить относительно U (то есть найти точку U) уравнение $nU = W$. Действительно, возьмем некоторую точку V, не лежащую на прямой, проходящей через 0 и W. По лемме 3.1, мы можем построить точку nV (отрезок $0(nV)$ в n раз длиннее отрезка $0V$ и они сонаправлены). По следствию 3.2, взяв за точку P точку W, за точку C — точку nV, за точку B — точку V, мы можем построить точку D, которая как раз и будет искомой точкой U. Из этого факта следует что $\Pi(z)$ — векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Замкнутость относительно комплексного сопряжения получаем из следствия 3.3. $\square$

Лемма 3.2. *Если $t \neq 0$ и $t \in \mathcal{Y}$, то $1/t \in \mathcal{Y}$.*

Доказательство. Мы можем построить точку P с координатами $(1, t)$ (выберем на оси $\mathcal{Y}$ точку t (см. рис. 6) и отложим от нее отрезок единичной длины, параллельный оси $\mathcal{X}$). Теперь мы можем восставить

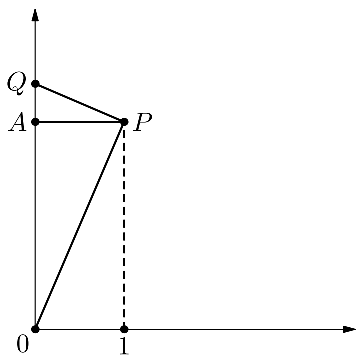

Рис. 6.

из P перпендикуляр к отрезку OP, тогда он пересечет ось $\mathcal{Y}$ в точке Q. Из простых геометрических соображений (формула для высоты в прямоугольном треугольнике) $AQ = 1/t$, где $A = (0, t)$. Но тогда этот отрезок можно отложить из $(0, 0)$ и получить точку $1/t$. $\square$

Предложение 3.1. *Пусть $x \in \mathcal{X}$ и $v, y \in \mathcal{Y}$, тогда выполнено следующее:*

1. $vy \in \mathcal{X}$, $xy \in \mathcal{Y}$.
2. $x^2 \in \mathcal{X}$ *и* $\mathcal{X}$ *есть* $\mathbb{Q}$*-алгебра.*
3. *Если* $y \neq 0$, *то* $\mathcal{Y} = Xy$.
4. *Если* $x \neq 0$, *то* $1/x \in \mathcal{X}$ *и* $\mathcal{X}$ *— поле.*
5. *Если* $\mathcal{Y} \cap \mathcal{X} \neq \{0\}$, *то* $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ *и* $\Pi(z) = \mathcal{X}(i)$.
6. $\mu \in \mathbb{R}$ *является угловым коэффициентом построимой прямой, тогда и только тогда, когда* $\mu \in \mathcal{Y}$.

Доказательство. 1. Пусть у нас есть две точки $u, x \in \mathcal{X}$ и точка $y \in \mathcal{Y}$. Тогда мы можем построить точку (x, y), а значит и точку $(u, uy/x)$ тоже можно построить по следствию 3.3, следовательно $uy/x \in \mathcal{Y}$. Если $u = 1$, то $y/x \in \mathcal{Y}$.

Пусть $x \in \mathcal{X}$ и $v, y \in \mathcal{Y}$, тогда аналогичные рассуждения приводят к тому, что $vx/y \in \mathcal{X}$. Если $x = 1$, то $v/y \in \mathcal{X}$.

Выводы по поводу vy легко сделать, пользуясь написанным выше, а именно $1/v \in \mathcal{Y}$, а значит $y/(1/x) \in \mathcal{X}$. Положим $1 = u$, $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$, тогда по лемме 3.2 $1/y \in \mathcal{Y}$, а значит и $1/xy \in \mathcal{Y}$, но тогда по лемме 3.2 $xy \in \mathcal{Y}$.

2. Для начала построим точку (x, y). Тогда прямая, проходящая через (0,0) и (x, y), и прямая, параллельная оси $\mathcal{X}$, проведенная на высоте xy, пересекаются в точке (x^2, xy), а значит $x^2 \in \mathcal{X}$. Так как $\mathcal{X}$ содержит $\mathbb{Q}$, то это векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Замкнутость относительно умножения следует из равенства:

$$2uv = (u + v)^2 - u^2 - v^2.$$

3. Из пункта 1 мы знаем, что $\mathcal{X}y \subset \mathcal{Y}$. Возьмем $v, y \in \mathcal{Y}$, $x \in \mathcal{X}$, тогда $xy \in \mathcal{Y}$, а значит $vx/(xy) \in \mathcal{X}$. Перенесем все, кроме v, в правую часть и получим, что $v \in \mathcal{X}y$, а значит $\mathcal{Y} \subset Xy$.

4. Пусть $x \neq 0$, $x \in \mathcal{X}$, $y \neq 0$, $y \in \mathcal{Y}$. Тогда из пункта 2 и леммы 3.2 следует, что $1/xy \in \mathcal{Y}$ и $y^2 \in \mathcal{X}$, но $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y}\dfrac{y}{x} \in \mathcal{X}$ по лемме 3.2. Тогда из этого и пункта 3 следует, что $\mathcal{X}$ — это поле.

5. Если $y \neq 0$ и $y \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$, то $1/y \in \mathcal{Y}$, и тогда $1 \in \mathcal{Y}$, а значит $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, следовательно $\Pi(z) = \mathcal{X}(i)$.

6. Возьмем прямую, проходящую через начало координат и имеющую тангенс наклона μ. Она пересекает вертикальную прямую, проходящую через (1,0) в точке $\mu \in \mathcal{Y}$, а значит точка $(0, \mu)$ построима. Отсюда $\mathcal{Y} \cup \infty$ — это множество построимых μ. $\square$

Теорема 3.1. (i) *Для любого* $z = a + bi$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *множество* $\Pi(z)$ — *это поле, являющееся расширением* $\mathbb{Q}$ *и содержащее элемент* z, *замкнутое относительно операции компексного сопряжения и содержащееся в поле* $\mathbb{Q}(a, b, i)$.

(ii) $\Pi(z) = \mathbb{Q}(a, b^2) + \mathbb{Q}(a, b^2)bi$.

Доказательство. (i) Покажем, что $\Pi(z)$ — это поле. Сумма и разность построимых точек, очевидно, построимы. Из предложения 3.1 следует, что для любого построимого $u = x + yi$ точка $u^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ также построима. Если w и z построимы, то wz построима, так как

$$2wz = (u + w)^2 - w^2 - z^2.$$

Сумма квадратов координат $r^2 = x^2 + y^2$ построимой точки $z = x + yi = re^{it}$ построима и принадлежит $\mathcal{X}$ по предложению 3.1. По лемме 3.2 точка $1/r^2$ построима, значит $1/z = re^{-it}/r^2$ построима. Таким образом, $\Pi(z)$ — поле. Кроме того, $\overline{w} = r^2/w$, а значит построима, то есть наше поле замкнуто относительно операции комплексного сопряжения.

Если у нас есть точка $z = a + bi$, тогда серединные перпендикуляры к любым построимым отрезкам лежат в множестве, порожденном a, b и i над $\mathbb{Q}$. Это утверждение легко доказать индукцией по построению множества Π. Кроме того, любая построимая прямая имеет угловой коэффициент из $\mathbb{Q}(a, b)$. Тогда координаты любых построимых точек принадлежат $\mathbb{Q}(a, b)$. А значит, для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ поле $\Pi(z) \subseteq \mathbb{Q}(a, b, i)$.

(ii) Докажем индукцией по построению множества Π. База очевидно верна. Пусть имеется подмножество $\mathbb{Q}(a, b^2) + \mathbb{Q}(a, b^2)bi$. Покажем, что применив любую аксиому к точкам этого подмножества, мы не выйдем за пределы множества. Действительно, запишем наши три аксиомы в координатах.

(A1) Пусть у нас были точки $A(0, 0)$ и $B(c, d)$ (мы умеем сдвинуть первую точку в (0,0), какая бы она ни была). Тогда прямая l, проходящая через эти точки, будет иметь уравнение: $dx - cy = 0$.

(A2) Пусть у нас есть прямые $l\colon l_1x + l_2y = l_3$ и $m\colon m_1x + m_2y = m_3$, тогда точка их пересечения P имеет координаты
$$\left(\frac{m_2l_3 - l_2m_3}{m_1l_2 - m_2l_1}, \frac{m_1l_3 - l_1m_3}{m_1l_2 - m_2l_1}\right).$$

(A3) Если концы отрезка — это точки $A(0, 0)$ и $B(c, d)$, то серединный перпендикуляр задается уравнением: $cx - dy = (c/2)^2 + (d/2)^2$.

Проверим что первая аксиома не выводит нас из множества $\mathbb{Q}(a, b^2) + \mathbb{Q}(a, b^2)bi$. Мы знаем из предложения 3.1, что угловой коэффициент прямой всегда лежит в $\mathcal{Y}$. Но мы также знаем, что наши c, d таковы, что $c \in \mathbb{Q}(a, b^2)b$, а $d \in \mathbb{Q}(a, b^2)$, а значит по предложению 3.1 $-\frac{d}{c} \in \mathbb{Q}(a, b^2)b$, то есть с аксиомой 1 мы разобрались.

Теперь проверим для второй аксиомы. Нетрудно, заметить что x-координата будет принадлежать $\mathbb{Q}(a, b^2)$, так как числитель и знаменатель дроби принадлежат $\mathbb{Q}(a, b^2)bi$. А y-координата принадлежит $\mathbb{Q}(a, b^2)bi$, так как числитель принадлежит $\mathbb{Q}(a, b^2)$, а знаменатель $\mathbb{Q}(a, b^2)bi$.

Осталось проверить условие для третьей аксиомы, это делается из соображений, использовавшихся для первой аксиомы. □

4. Пифагоровские числа и конструкции

В этом разделе мы будем работать уже с первыми четырьмя аксиомами. К использованным в предыдущем разделе аксиомам добавляется

(A4) прямая, делящая любой построимый угол пополам, построима.

Как и выше, мы предполагаем, что у нас есть точки 0 и 1. Будем называть это свойство аксиомой 0.

Предложение 4.1. *Если нам даны аксиомы* 0–3, *то следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Аксиома* 4.
2. *Отрезок единичной длины может быть отложен в любом построимом направлении и из любой построимой точки.*
3. *Любой построимый отрезок может быть отложен в любом построимом направлении и из любой построимой точки.*

Доказательство. ($3 \Rightarrow 2$) Очевидно.

($2 \Rightarrow 1$) Можно считать, что угол, образованный нашим направлением с вещественной осью, меньше 180°. Отложим на каждой из сторон угла единичный отрезок. Затем из вторых концов отложенных отрезков A, B (не являющихся вершиной угла) восставим перпендикуляры к соответствующим сторонам. Они пересекутся в некоторой точке C. Соединим вершину угла и C. Тогда образовались два прямоугольных треугольника, которые равны по катету и гипотенузе, а значит полученная прямая — биссектриса угла.

($1 \Rightarrow 3$) Мы предполагаем, что можно провести биссектрису у любого построимого угла. Предположим, что отрезок AB построим и дано построимое направление CL, в котором требуется отложить отрезок с началом в точке C, равный отрезку AB. Для начала подвинем отрезок AB так, чтобы он начинался в C, получим отрезок CD. Отразим его относительно биссектрисы угла LCD и получим некоторый отрезок CS, лежащий на стороне CL. Это и есть требуемый отрезок, так как биссектриса является осью симметрии угла. □

Очевидно, что точка i построима (мы можем провести биссектрису прямого угла, образованного координатными осями, и отразить относительно нее любую точку из $\mathcal{X}$), а значит, в обозначениях предыдущего раздела, $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$. Легко видеть, что с добавлением новой аксиомы мы получаем возможность строить точки пересечения окружности любого построимого радиуса и с центром в любой построимой точке и прямой, проходящей через центр с любым построимым коэффициентом. Оказывается, множество x-координат построимых точек замкнуто относительно $\sqrt{a^2+b^2}$ для любой построимой точки (a, b). Получившееся множество x-координат построимых точек $\mathcal{X}$ принято называть пифагоровскими числами, $\mathcal{P}$.

Теорема 4.1. *Пусть π это множество чисел, построимых с помощью аксиом 0–4. Тогда $\pi = \mathcal{P} \oplus i\mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — такое подполе действиельных чисел, что положительные элементы из $\mathcal{P}$ — это всевозможные длины построимых отрезков.*

Доказательство. Заметим, что мы можем построить любую точку вида $\sqrt{a^2 + b^2}$, где $a, b \in \Pi(z)$. Действительно, мы можем отложить отрезок, равный данному, в любом построимом направлении, а, так как направление перпендикулярное данному построимо, то мы можем построить прямоугольный треугольник с катетами a и b. Тогда его гипотенуза будет искомым элементом.

Докажем индукцией по построению, что никаких других точек не добавится.

Исходно имеются элементы 0 и 1.

Предположим, что в результате k применений аксиом 1–4 получаются лишь элементы из требуемого в условии теоремы множества. Применим к полученным точкам одну из аксиом 1–4 и посмотрим, что происходит с координатами точек.

$(A1)$ Пусть у нас были точки $A(0, 0)$ и $B(a, b)$ (мы умеем сдвинуть первую точку в (0,0), какая бы она ни была). Тогда прямая l, проходящая через эти точки будет иметь уравнение: $bx - ay = 0$

$(A2)$ Пусть у нас есть прямые $l\colon l_1x + l_2y = l_3$ и $m\colon m_1x + m_2y = m_3$, тогда точка их пересечения

$$P = \left(\frac{m_2l_3 - l_2m_3}{m_1l_2 - m_2l_1}, \frac{m_1l_3 - l_1m_3}{m_1l_2 - m_2l_1}\right).$$

$(A3)$ Если концы отрезка это точки $A(0, 0)$ и $B(a, b)$, то серединный перпендикуляр задается уравнением: $ax - by = (a/2)^2 + (b/2)^2$.

$(A4)$ Если стороны угла это прямые $l\colon l_1x + l_2y = 0$ и $m\colon m_1x + m_2y = 0$ (можно переместить точку пересечения в $(0, 0)$), то уравнение биссектрисы будет

$$\left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} + \frac{m_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}\right)x + \left(\frac{l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}\right)y = 0.$$

Так как все коэффициенты в начальных прямых и координаты точек были из нашего поля, то и все коэффициенты в уравнениях конечных прямых и координаты конечных точек будут из нашего поля. □

5. Евклидовы конструкции и числа

Теперь пришло время разобраться, что получится, если у нас даны аксиомы 0–5. Напомним пятую аксиому:

(A5) Если дана построимая прямая l и построимые точки P, Q, то построима такая прямая, проходящая через Q, что при симметрии относительно нее P попадает на l (при условии, что такая прямая существует).

Если нам даны точки 0 и 1, эти аксиомы позволяют получить так называемые евклидовы числа $\mathcal{E}$. На самом деле, $\mathcal{E}$ — это в точности то же самое поле, которое мы можем получить с помощью циркуля и линейки. А это, как известно [2], наименьшее поле, содержащее $\mathbb{Q}$, и замкнутое относительно операции извлечения квадратного корня.

Опишем, как мы можем извлечь квадратный корень из комплексного числа $z = re^{i\theta}$ с помощью аксиом 1–5. Этот процесс можно выполнить в два шага.

1. Извлечение квадратного корня из положительного действительного числа r.

2. Построение угла $\theta/2$ посредством проведения биссектрисы угла θ.

Мы умеем извлекать корень из некоторых пифагоровских чисел, но только из тех, что имеют вид $a^2 + b^2$ для построимых a и b. Пора использовать пятую аксиому: она как раз и добавляет замкнутость поля относительно операции извлечения квадратного корня. Рассмотрим параболу $\mathcal{T}$ с директрисой l и фокусом F.[1)] Тогда пятая аксиома позволяет нам построить точки пересечения этой параболы с построимыми прямыми и касательные в них. Чтобы в этом убедиться, возьмем некую вспомогательную точку Q и проведем через нее такую прямую t, что при симметрии относительноо нее F попадает на l. Перпендикулярная прямая, t, проходящая через F, пересечет t в построимой точке R. Теперь построим перпендикуляр к l из точки R. Он пересечет прямую t в точке S. Так как t — это серединный перпендикуляр к FR, точка S равноудалена от точек F, R, а значит она лежит на параболе $\mathcal{T}$. Прямая t — касательная к параболе в точке S, так как она является биссектрисой $\angle FSR$.

С помощью точек параболы легко получать квадратные корни. Положим, $P = (0, 1)$, и в качестве директрисы l рассмотрим прямую $y = -1$. Тогда нетрудно заметить, что соответствующая парабола задается уравнением $y = \dfrac{1}{4}x^2$. Касательная к этой параболе в точке $(x_0, \frac{1}{4}x_0^2)$ имеет

[1)] Фокус и директриса — это точка и прямая, связанные с параболой. Они характеризуются следующим свойством: парабола — это множество точек, равноудаленных от фокуса и директрисы.

угловой коэффициент $m = \frac{1}{2}x_0$, а значит уранение касательной имеет вид $y - \frac{1}{4}x_0^2 = \frac{1}{2}x_0(x - x_0)$. Пересечение этой прямой с прямой $x = 0$ назовем точкой $Q = (0, -\frac{1}{4}x_0^2)$. Тогда, выбрав в качестве точки Q точку $(0, -\frac{1}{4}r)$, мы с помощью описанных выше конструкций можем получить на параболе построимую точку с абсциссой $\sqrt{r}$.

Теорема 5.1. *Построимые с использованием только первых пяти аксиом складывания из начальных точек* 0 *и* 1 *элементы поля* $\mathbb{C}$, *то есть поле евклидовых чисел* $\mathcal{E}$, *— наименьшее подполе* $\mathbb{C}$, *замкнутое относительно операции извлечения квадратного корня.*

Доказательство. То, что из всех построимых чисел можно извлечь квадратный корень, мы уже показали выше. Чтобы доказать, что ничего другого построить нельзя, воспользуемся тем фактом, что наименьшее подполе $\mathbb{C}$, замкнутое относительно операции извлечения квадратного корня — это поле построимых с помощью циркуля и линейки точек.[2] Теперь для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что действия описанные в любой из первых пяти аксиом складывания, можно осуществить с помощью циркуля и линейки. Заметим, что про первые 4 аксиомы это очевидно, так как построимое с помощью них поле было описано выше, и оно содержится в множестве построимых точек с помощью циркуля и линейки. Рассмотрим пятую аксиому и опишем соответствующее построение с помощью циркуля и линейки:

1. Строим окружность с центром в точке Q и радиусом QP. Точка пересечения этой окружности с прямой l есть точка Q_1.
2. Строим серединный перпендикуляр к отрезку QQ_1 — это и будет искомая прямая

Мы доказали вложение в обе стороны, а значит мы доказали утверждение теоремы. □

6. Конические конструкции и поле чисел оригами

Добавим шестую и последнюю аксиому складывания:

(A6) Если даны прямые k, l и точки P, Q, то мы можем построить такую прямую m (если она существует), что при симметрии относительно m, P переходит на k, Q переходит на l.

Чтобы построить такую прямую с помощью складывания бумаги, надо отразить P в какую-то точку прямой k, а потом начать непрерывно двигать полученную точку до выполнения второго условия.

[2] Другое доказательство теоремы 5.1 содержится в доказательстве теоремы 6.1.

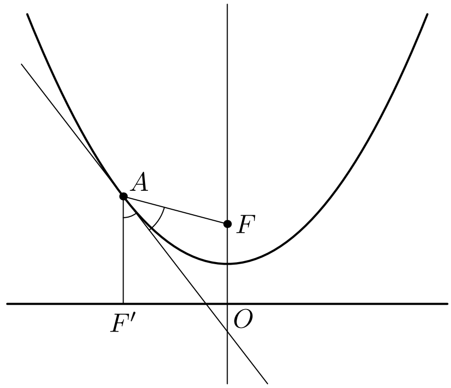

Рис. 7.

Предложение 6.1. *Аксиома* 6 *позволяет построить общую касательную к двум параболам, которые заданы своими фокусами и директрисами.*

Доказательство. Действительно, пусть две прямые, о которых идет речь в аксиоме шесть, — это директрисы, а точки — это фокусы парабол (P и l у одной, Q и k у другой). Тогда построенная в аксиоме прямая — это общая касательная этих двух парабол, так как у параболы есть следующее свойство: образ фокуса при отражении относительно касательной лежит на директрисе (см. рис. 7). □

Общая касательная существует не для всякой пары парабол, поэтому в условии аксиомы существование такой прямой оговаривается отдельно.

Аксиомы 1 – 6 называются аксиомами оригами. Множество чисел, которые можно получить с их использованием, — это множество чисел оригами $\mathcal{O}$. Эти конструкции позволяют нам построить вещественные решения кубических уравнений с вещественными коэффициентами из поля $\mathcal{O}$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим две параболы:

$$\left(y - \frac{1}{2}a\right)^2 = 2bx, \quad y = \frac{1}{2}x^2.$$

Эти параболы имеют фокусы и директрисы, построимые в поле, в котором построимы a и b. Поэтому к ним можно провести общую касательную. Она пересечет их в точках (x_0, y_0), (x_1, y_1) соответственно. Из доказательства предложения 3.1 видно, что прямая построима только тогда, когда ее угловой коэффициент μ принадлежит полю или прямая вертикальна. Если продифференцировать уравнения парабол, то получим уравнения, определяющие касательные: $\dfrac{b}{y_0 - \frac{a}{2}} = \mu = x_1$ и $y_1 = \dfrac{1}{2}\mu^2$, $x_0 = \dfrac{(y_0 - \frac{a}{2})^2}{2b} = \dfrac{1}{2}\mu^2$.

Отсюда

$$\mu = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\dfrac{\mu^2}{2} - \dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{\mu}}{\mu - \dfrac{b}{2}\mu^2}, \quad \text{т. е.}$$

$$\mu^3 + a\mu + b = 0.$$

Значит, мы можем найти все действительные корни любого кубического уравнения такого вида, если $a, b \in \mathcal{O} \cap \mathbb{R}$.

В частности, мы можем извлекать кубический корень из числа $b \in \mathcal{O} \cap \mathbb{R}$ с помощью уравнения $x^3 - b = 0$.

Кроме того, мы можем сделать трисекцию угла. Для этого достаточно воспользоваться уравнением Чебышёва: если $4x^3 - 3x = \cos(3\theta)$, то $x = \cos(\theta)$.

Отсюда следует, что мы можем извлекать кубические корни из построимых чисел (при извлечении кубического корня из комплексного числа угол уменьшается в три раза, а модуль меняется, как у вещественных чисел). Значит, корни кубических уравнений с коэффициентами из $\mathcal{O}$ также построимы, что видно из формулы для решения кубического уравнения (формула Кардано), которая включает в себя только извлечение квадратных и кубических корней из многочленов от коэффициентов уравнения. Корни уравнений четвертой степени также построимы, так как для них имеется формула Феррари, включающая в себя только извлечение квадратных и кубических корней (корень 4 степени — это квадратный корень, взятый от квадратного корня).

Теперь мы готовы доказать основную теорему:

Теорема 6.1. *Построимые из начальных точек* 0 *и* 1 *с помощью аксиом* 1–6 *точки в* $\mathbb{C}$, *то есть множество построимых чисел оригами* $\mathcal{O}$, *— это наименьшее подполе* $\mathbb{C}$, *замкнутое относительно операций извлечения квадратного и кубического корня.*

Доказательство. Заметим, что мы можем построить любую точку такого вида, как описано в условии теоремы (это было разобрано выше).

Докажем индукцией по построению, что других точек нет.

Исходно имеются элементы 0 и 1.

Предположим, что в результате k применений аксиом 1–6 получаются лишь элементы из описанного в условии теоремы множества. Применим к полученным точкам одну из аксиом 1–6 и посмотрим, что происходит с координатами точек.

(A1) Пусть у нас были точки $A(0,0)$ и $B(a,b)$ (мы умеем сдвинуть первую точку в $(0,0)$, какая бы она ни была). Тогда прямая l, проходящая через эти точки, будет иметь уравнение: $bx - ay = 0$.

(A2) Пусть у нас есть прямые $l\colon l_1x + l_2y = l_3$ и $m\colon m_1x + m_2y = m_3$, тогда точка их пересечения
$$P = \left(\frac{m_2l_3 - l_2m_3}{m_1l_2 - m_2l_1}, \frac{m_1l_3 - l_1m_3}{m_1l_2 - m_2l_1}\right).$$

(A3) Если концы отрезка это точки $A(0, 0)$ и $B(a, b)$, то серединный перпендикуляр задается уравнением: $ax - by = (a/2)^2 + (b/2)^2$.

(A4) Если стороны угла это прямые $l\colon l_1x + l_2y = 0$ и $m\colon m_1x + m_2y = 0$ (можно переместить точку пересечения в (0,0)), то уравнение биссектрисы будет:
$$\left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} + \frac{m_1}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}\right)x + \left(\frac{l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}}\right)y = 0.$$

(A5) Если даны точки $P = (a, b)$ и $Q = (0, 0)$ (можем подвинуть точку) и прямая $l\colon x + y = -1$ (можем повернуть относительно Q и сжать/растянуть), то прямая m, описываемая в условии аксиомы 5, будет задаваться уравнением: $(a + t)x - (b + t + 1)y = 0$, где $t = \dfrac{-1 + \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 1}}{2}$.

(A6) Проверим для шестой аксиомы. Точка в проективном пространстве — это набор из трех вещественных чисел (x, y, z), не все из которых равны 0, причем для любого $c \neq 0$, точка $(x, y, z) \equiv (cx, cy, cz)$. Стандартная аффинная карта в таком пространстве — это карта $z = 1$ ($z \neq 0$). Тогда бесконечно удаленная прямая — это множество точек, для которых $z = 0$. Однородное уравнение второй степени от трех переменных описывает на проективной плоскости точки коники. В матричном виде такое уравнение выглядит следующим образом:
$$F(x, y, z) = (x, y, z)A(x, y, z)^t = 0,$$
где A — ненулевая симметрическая матрица 3×3.

Мы хотим доказать, что к двум параболам можно провести общую касательную, не выходя за пределы нашего поля. Для доказательства нам понадобится понятие проективной двойственности (более подробное изложение см в [1]). Для векторного пространства V через V^* обозначим двойственное ему векторное пространство. Проективные пространства $\mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}(V^*)$ называются двойственными проективными пространствами. Геометрически, каждое из них — это пространство гиперплоскостей в другом, так как уравнение $\xi(v) = 0$, где $\xi \in V^*$, а $v \in V$ при фиксированном ξ задает гиперплоскость в $\mathbb{P}(V)$, а при фиксированном v — гиперплоскость в $\mathbb{P}(V^*)$. Двойственная кривая к кривой $\mathcal{F}$ — это множество гиперплоскостей, касающихся $\mathcal{F}$. Построение общей касательной к двум кривым — это построение общей точки двойственных кривых. Двойственная кривая к конике $F(x, y, z) = 0$ задается уравнением $H(u, v, w) = (u, v, w)\mathrm{Adj}(A)(u, v, w)^t$, где $\mathrm{Adj}(A)$ — матрица, комплексно-сопряженная к A. Эта кривая тоже коника. Например, если $F(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 - yz = 0$, то уравнение двойственной коники — $H(u, v, w) = -uw + \frac{1}{2}v^2 = 0$. Заметим, что, если в матрице A все элементы были из нашего поля, то и в матрице $\mathrm{Adj}(A)$ они тоже будут из нашего поля.

Для того, чтобы доказать, что построение общих касательных к коникам не выводит из нашего поля, мы можем перевести одну из двух прямых и соответствующую ей точку в прямую $y = -1$ и точку $(0, 1)$ с помощью поворота, гомотетии и параллельного переноса, которые не выводят за пределы поля (прямая $y = -1$ и точка $(0, 1)$ — это фокус и директриса параболы $y = \frac{1}{2}x^2$). Тогда вторая прямая и точка будут директрисой и фокусом некоторой параболы с коэффициентами из поля. Возьмем двойственные коники к этим двум параболам, у них тоже коэффициенты из поля, причем уравнение первой из них — $-uw + \frac{1}{2}v^2 = 0$, так что u легко выразить через v и w. Сделаем это и подставим в уравнение второй коники, получим уравнение четвертой степени с коэффициентами из $\mathcal{O}$, его решения тоже принадлежат $\mathcal{O}$. Но эти решения задают уравнения общих касательных к исходным параболам, а значит коэффициенты в уравнениях общих касательных из $\mathcal{O}$. □

7. О независимости аксиом

В этом разделе будут описаны некоторые факты про зависимость аксиом.

Предложение 7.1. *Аксиома* 4 *следует из аксиомы* 5.

Доказательство. Действительно, возьмем угол с вершиной A. Пусть точка B лежит на стороне угла, а прямая l — та его сторона, которая не содержит B. По пятой аксиоме мы можем через A провести такую прямую k, что образ B при симметрии относительно нее лежит на l. Но тогда несложно убедиться в том, что k — биссектриса данного угла. □

Предложение 7.2. *Если даны аксиомы* 1, 2, 3 *и* 6, *то мы можем сделать построение, описанное в* 5.

Доказательство. Возьмем две точки A, B и прямую l, о которых говорится в аксиоме 5. Проведем такую прямую l', что l' параллельна l и l' проходит через B (это можно сделать, потому что у нас есть первые три аксиомы). Теперь по шестой аксиоме мы проведем такую прямую m, что образ A при симметрии относительно нее попадет на l, а образ B — на l'. Тогда имеется два случая. Либо m перпендикулярна l', то есть перпендикулярна l, но тогда образ A никак не может попасть на l, если A не лежит на l (если лежит, то прямая, удовлетворяющая условию пятой аксиомы — это либо прямая, проходящая через AB, либо перпендикуляр к l, опущенный из B, но обе этих прямых мы можем построить). Либо m проходит через B, тогда это и есть прямая, которая удовлетворяет условию пятой аксиомы. □

Предложение 7.3. *Если даны аксиомы* 2, 3 *и* 6, *то мы можем сделать построение, описанное в первой аксиоме.*

Доказательство. Опишем построение.

1. Построим серединный перпендикуляр l (см рис. 8).

2. Воспользуемся шестой аксиомой, применив ее к точкам P, Q и прямой l. Получим прямую m. Точка пересечения l и m — это точка R.

3. Проведем серединные перпендикуляры к отрезкам PR и QR. Они пересекут прямую m в точках S и T соответственно.

4. Проведем серединные перпендикуляры к отрезкам SR и TR. Они пересекут прямую l в точках X и Y соответственно.

5. Проведем серединный перпендикуляр к отрезку XY — это и будет искомая прямая. □

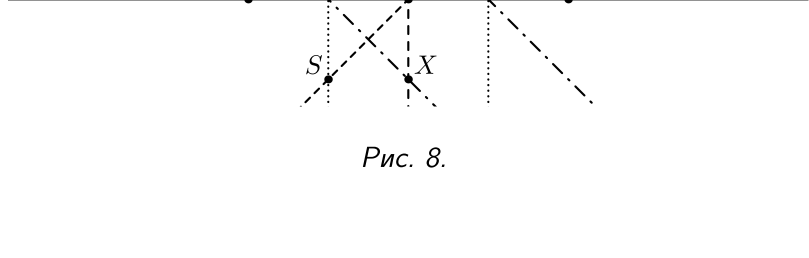

Рис. 8.

Теорема 7.1. (i) *Набор аксиом* 2, 3 *и* 6 *эквивалентен набору из всех шести аксиом. Кроме того это минимальный (нельзя выкинуть никакой аксиомы) набор, удовлетворяющий этому требованию.*

(ii) *Если у нас есть третья точка, не лежащая на прямой, проходящей через* 0 *и* 1, *и прямые, проходящие через любые две из этих трех точек, то минимальным будет набор аксиом* 2 *и* 6.

Доказательство. (i) Из предложений 7.1, 7.2 и 7.3 следует, что мы можем все построить. Проверим, что ни одну аксиому нельзя выкинуть.

(A2) Аксиома 2 — это единственная аксиома, которая описывает, как можно получить точку, а так как мы строим поле из координат точек, то она нам необходима.

(A3) Если убрать аксиому 3, то с помощью оставшихся трех аксиом мы не сможем выйти за пределы прямой, проходящей через 0 и 1.

(A6) Аксиома 6 расширяет поле фалесовских чисел, поэтому ее нельзя выкинуть.

(ii) Достаточно доказать, что можно построить серединный перпендикуляр к отрезку AB. Возьмем точку A и две прямые: первая проходит через A и B, а вторая проходит через B и построимую точку, не лежащую на первой прямой (такая существует по условию). Тогда, по шестой аксиоме, мы можем провести такую прямую l, что точка A при симметрии относительно l попадет на первую прямую, а также попадет и на вторую прямую. Образ при симметрии единственен, значит образ — точка пересечения первой и второй прямых, то есть l — серединный перпендикуляр к отрезку AB. □

Замечание. Если считать, что образы точек, упомянутых в аксиоме 6, построимы и есть третья построимая точка (кроме 0 и 1), не лежащая на прямой, проходящей через 0 и 1, и прямые, проходящие через любые две из этих трех точек, то можно обойтись только шестой аксиомой для построения поля оригами.

Действительно, возьмем две прямые, точку пересечения которых надо построить и произвольную построимую точку P. Применим шестую аксиому и получим, что образ P — это точка пересечения двух данных прямых, то есть требуемая в условии точка, а она по условию построима. Значит, по теореме 7.1 достаточно только аксиомы 6.

Иногда к списку аксиом оригами добавляют еще одну.

(A7) Если дана точка P и прямые k и l, то мы можем провести такую прямую m, перпендикулярную k, что образ точки P при симметрии относительно нее попадет на прямую l.

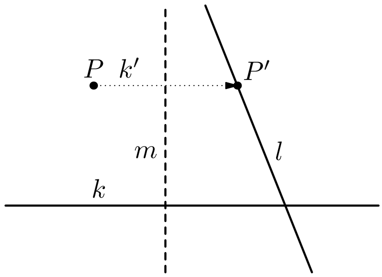

Рис. 9. Избыточная аксиома 7

На самом деле, добавление этой аксиомы никак не расширит поле построимых точек. Проверим это.

Предложение 7.4. *Аксиома* 7 *является следствием аксиом* 1–3.

Доказательство. Выполним с помощью первых трех аксиом действие, описанное в седьмой аксиоме.

1. Проведем через P прямую k', параллельную k (см. рис. 9). Она пересечет l в точке Q.
2. Построим серединный перпендикуляр m к отрезку PQ — это и будет искомая прямая.

Действительно, образ точки P при симметрии относительно m попадет в точку Q. Кроме того, так как прямая k' параллельна k, то $m \perp k$. □

Список литературы

[1] Городенцев А. Л. *Алгебра–*1*. Учебник для студентов-математиков первого курса*. М.: ВШЭ, 2011. 526 с.

[2] Кириченко В. А. *Построения циркулем и линейкой и теория Галуа*. 2005. www.mccme.ru/~valya/dubna05.pdf

[3] Alperin R. C. *A mathematical theory of origami constructions and numbers* // New York Journal of Mathematics. Vol. 6. 2000. P. 119–133.

[4] Alperin R. C., Lang R. J. *One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms* // Origami (Robert J. Lang, ed.). London: A K Peters Ltd. 2009. P. 371–394.

[5] Lang R. J. *Origami and Geometric Constructions*. 2003. www.langorigami.com/science/math/hja/hja.php

Д. И. Грищенко, факультет математики НИУ-ВШЭ