Наш семинар: математические сюжеты

Короткое опровержение гипотезы Борсука

А. Б. Скопенков*

Приводится простейшее из известных опровержений следующей гипотезы Борсука: *любое ограниченное подмножество n-мерного евклидова пространства, содержащее более n точек, можно разбить на $n+1$ непустых частей меньшего диаметра.*

Доказательство принадлежит Н. Алону и является замечательным приложением комбинаторики и алгебры к геометрии.

Эта методическая заметка доступна студентам, старшеклассникам и учителям, интересующимся математикой.

Теорема 1 (Борсук). *Любое ограниченное подмножество плоскости, в котором более двух точек, можно разбить на три непустые части меньшего диаметра.*[1)]

Диаметром непустого подмножества плоскости называется наибольшее расстояние между его точками (точнее, супремум таких расстояний). Подмножество плоскости называется *ограниченным*, если его диаметр конечен.

Точкой $x = (x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного евклидова пространства называется упорядоченный набор n чисел. *Расстояние* между точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ определяется формулой

$$|x, y| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}\,.$$

*Поддержан грантом фонда Саймонса.

1) *Указание к доказательству.* Сначала, используя «соображения непрерывности», докажите, что любую плоскую фигуру диаметра 1 можно заключить в правильный шестиугольник, диаметр вписанной окружности которого равен 1. Затем докажите, что хотя диаметр полученного правильного шестиугольника больше 1, его можно разрезать на три части диаметра меньше 1. Ср. [11].

Диаметр и *ограниченность* подмножества n-мерного евклидова пространства определяются точно так же, как и в случае плоскости.

Борсук предложил следующее обобщение своего результата, которое долгие годы было одной из наиболее интригующих проблем комбинаторной геометрии.

Гипотеза 1 (Борсук). *Любое ограниченное подмножество n-мерного евклидова пространства, содержащее более n точек, можно разбить на $n+1$ непустых частей меньшего диаметра.*

В 1993 г. Д. Кан и Дж. Калаи, следуя идеям Болтянского, Эрдёша и Лармана о применении комбинаторики для построения контрпримера, нашли контрпример к гипотезе Борсука [7, 10]. Подробно история вопроса описана в [3, 6].

Теорема 2. *Существует n и ограниченное подмножество n-мерного евклидова пространства, содержащее более n точек и которое невозможно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра.*

Мы приведем простейшее из известных доказательств, принадлежащее Н. Алону, ср. [1, 3, 5, 6, 8, 9]. (При этом другие доказательства дают более сильные результаты.) Это удивительный пример важного результата в современной математике, не требующего для полного понимания полугодового специального университетского курса (после двухгодового обязательного курса). Более простые применения аналогичных алгебраических соображений в комбинаторике можно найти в [2, 4].

Через $|X|$ обозначается число элементов в множестве X. *Скалярное произведение* векторов $x=(x_1,\dots,x_n)$ и $y=(y_1,\dots,y_n)$ определяется как $x\cdot y := x_1y_1+\dots+x_ny_n$. Векторы x и y называются *ортогональными*, если $x\cdot y=0$.

Доказательство теоремы 2. Обозначим

$$\begin{aligned} M =&\{(x_1,\dots,x_n) \mid x_1=1,\ x_k\in\{1,-1\} \\ &\quad \text{и среди } x_2,\dots,x_n \text{ число минус единиц четно}\}. \end{aligned}$$

Вершина n^2-мерного куба — набор длины n^2 из плюс или минус единиц. Его удобно представлять себе как таблицу $n\times n$. Поставим в соответствие каждой точке $x=(x_1,\dots,x_n)\in M$ таблицу fx, определенную формулой $(fx)_{ij} := x_ix_j$. Например,

$$f(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что контрпримером к гипотезе Борсука является f-образ множества M для достаточно большого простого числа p и $n=4p$.

Пусть $x, y \in M$. Тогда $(x_i x_j - y_i y_j)^2 = (1 - x_i y_i x_j y_j)^2$. Обозначим через a количество индексов i, для которых $x_i = y_i$. Тогда $x_i y_i = 1$ для a индексов i и $x_i y_i = -1$ для $n-a$ индексов i. Поэтому $|fx, fy|^2 = 4a(n-a)$. Это выражение максимально при $a = n/2$. Значит, условие $|fx, fy| = \operatorname{diam} fM$ равносильно условию $a = n/2$ и равносильно условию $x \cdot y = 0$.

Поэтому если множество fM разбито на k частей $Z_1, \ldots, Z_k$ меньшего диаметра, то в каждом $f^{-1}Z_i$ никакие два вектора не ортогональны. Так как $x_1 = 1$ для любого $x \in M$, то f инъективно. Значит, $|Z_i| = |f^{-1}Z_i|$. Теперь теорема вытекает из следующих леммы 1 об оценке и утверждения 1. □

Лемма 1 (оценка). *Пусть p — простое (не обязательно большое), $n = 4p$, $A \subset M$ и никакие два вектора из A не ортогональны. Тогда*

$$|A| \leqslant \alpha(n) := C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \cdots + C_{n-1}^{n/4-1}.$$

Утверждение 1. *$\alpha(n)(n^2+1) < |M| = 2^{n-2}$ для достаточно больших n.*

Доказательство. Для достаточно больших n и любых $1 \leqslant s, k \leqslant n/4$ имеем $\dfrac{5n}{4} > 5k - s - 2$, откуда $\dfrac{n-k-s+1}{\frac{n}{4}+k-s} > \dfrac{3}{2}$. Значит,

$$\frac{C_{n-1}^{n/4+k-1}}{C_{n-1}^{k-1}} = \frac{(n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot(n-k-\frac{n}{4}+1)}{(\frac{n}{4}+k-1)(\frac{n}{4}+k-2)\cdot\ldots\cdot k} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n/4} > n^2.$$

Поэтому $\alpha(n)(n^2+1) < C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \cdots + C_{n-1}^{n/2-1} = 2^{n-2}$. □

Осталось доказать лемму об оценке. При ее доказательстве можно забыть про конструкцию отображения f. Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 2. *Для простого p и целого t число*

$$G(t) := (t-1)(t-2)\cdot\ldots\cdot(t-p+1)$$

делится на p тогда и только тогда, когда t не делится на p.

Рациональной линейной комбинацией многочленов $F_1, \ldots, F_s$ называется любой многочлен $\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_s F_s$ с рациональными $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$. Например, многочлен x_2 является рациональной линейной комбинацией многочленов $2x_1$, 1 и $x_1 + x_2$.

Многочлены называются *линейно независимыми*, если любая их рациональная линейная комбинация, в которой не все λ_k нулевые, не равна нулю. Например, n многочленов $1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ являются линейно независимыми.

Многочлен с рациональными коэффициентами от $n-1$ переменной $x_2, \ldots, x_n$ называется *степени менее $n/4$ и свободным от квадратов*, если он является рациональной линейной комбинацией многочленов

$$\begin{aligned} &x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_s}, \quad \text{где} \quad s = 0, \ldots, p-1 \\ &\text{и} \quad i_1, \ldots, i_s \ \text{— различные числа от 2 до } n. \end{aligned} \qquad (*)$$

Лемма об оценке вытекает из нижеследующих леммы 2 о линейной независимости и утверждения 3.

Лемма 2 (линейная независимость). *Пусть p простое, $n = 4p$, $A \subset M$ и никакие два вектора из A не ортогональны. Возьмем вектор $a \in A$. Раскроем скобки в произведении $G(a \cdot (1, x_2, \ldots, x_n))$. В каждом из полученных одночленов для каждого i будем заменять x_i^2 на 1 пока это возможно. Полученный многочлен обозначим $F_a(x_2, \ldots, x_n)$. Тогда каждый многочлен $F_a(x_2, \ldots, x_n)$, $a \in A$, степени меньше $n/4$ и свободен от квадратов; эти многочлены линейно независимы.*

Утверждение 3. *Любое линейно независимое семейство многочленов от $x_2, \ldots, x_n$ степени менее $n/4$ и свободных от квадратов, содержит не более $\alpha(n)$ многочленов.*

Доказательство леммы о линейной независимости. Утверждения о степени и о свободе от квадратов очевидны. Докажем линейную независимость. Пусть, напротив, $\lambda_1 F_{a_1} + \cdots + \lambda_s F_{a_s} = 0$ для некоторых $a_1, \ldots, a_s \in A$ и рациональных $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, причем не все λ_k нулевые. Здесь $a_1, \ldots, a_s$ — векторы, а не координаты. Можно считать, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ целые (иначе умножим это равенство на произведение их знаменателей). Можно также считать, что не все они делятся на p (иначе поделим это равенство на их наибольший общий делитель). Не уменьшая общности считаем, что λ_1 не делится на p. Подставим в полученное равенство значения $x_2 = (a_1)_2, \ldots, x_n = (a_1)_n$.

Из $a_1 \cdot a_1 = n = 4p$ и утверждения 2 вытекает, что $\lambda_1 F_{a_1}$ не делится на p.

Так как n делится на 4 и для любых $x, y \in M$ число минус единиц в x и в y нечетно, $x \cdot y$ делится на 4. Поэтому $x \cdot y \notin \{\pm p, \pm 2p, \pm 3p\}$. Так как $x \cdot y \neq 0$, то $x \cdot y$ не делится на p. Значит, по утверждению 2 $\lambda_k F_{a_k}$ делится на p при любом $k > 1$. Противоречие. □

Набросок доказательства утверждения 3. Обозначим через $Q_1, \ldots, Q_{\alpha(n)}$ семейство многочленов $(*)$ и через $F_1, \ldots, F_k$ данное линейно независимое семейство. Возьмем таблицу $k \times \alpha(n)$ рациональных чисел λ_{ij}, для которых $F_i = \sum_j \lambda_{ij} Q_j$ при любом $i = 1, \ldots, k$. Семейство многочленов, полученное из семейства $F_1, \ldots, F_k$ заменой F_i на $F_i + \lambda F_j$, $j \neq i$, линейно независимо. Такими заменами и перестановками многочленов $Q_1, \ldots, Q_{\alpha(n)}$ можно провести рассматриваемую таблицу $k \times \alpha(n)$ к «верхнетреугольному» виду. Так как в новой таблице нет нулевой строки, то $k \leqslant \alpha(n)$. □

Благодарности. Благодарю Н. П. Долбилина и А. М. Райгородского, от которых я узнал контрпримеры к гипотезе Борсука, учеников физ.-мат. школы им. А. Н. Колмогорова и школы №57 г. Москвы, которые узнали эти контрпримеры от меня, а также М. Б. Ахмедова, В. Н. Дубровского и А. Д. Руховича за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Гервер М. Л. *О разбиении множеств на части меньшего диаметра: теоремы и контрпримеры* // Мат. Просвещение. Сер. 3. Вып. 3. 1999. С. 168–183.

[2] Ильинский Д., Купавский А., Райгородский А., Скопенков А. *Дискретный анализ для математиков и программистов (подборка задач)* // Мат. Просвещение. Сер. 3. Вып. 17. 2013. С. 162–181.

[3] Райгородский А. М. *Проблема Борсука*. М.: МЦНМО. 2006.

[4] Райгородский А. М. *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*. М.: МЦНМО, 2007.

[5] Скопенков А. *N-мерный куб, многочлены и решение проблемы Борсука* // Мат. Просвещение. Сер. 3. Вып. 3. 1999. С. 184–188. Эл. версия arXiv:0712.4009v1.

[6] Aigner M., Ziegler G. *Proofs from the Book*. NY, Berlin, Heidelberg: Springer. 2004. Рус. пер. Айгнер М., Циглер Г. *Доказательства из Книги*. М.: Мир. 2006.

[7] Kahn J., Kalai G. *A counterexample to Borsuk's conjecture* // Bull. AMS. Vol. 29(1). 1993. P. 60–62.

[8] Nilli A. *On Borsuk's problem* // Contemp. Math. Vol. 178. 1994. P. 209–210.

[9] Raigorodskii A. M. *The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary* // Math. Intelligencer. Vol. 26 (3). 2004. P. 4–12.

[10] Skopenkov A. *The Borsuk problem* // Quantum. Vol. 7 (1). 1996. P. 16–21, 63.

[11] Yang D. *An elementary proof of Borsuk theorem*. arXiv:1010.1990. 2010.

А. Б. Скопенков, Московский физико-технический институт (государственный университет), Независимый московский университет и ГБОУ Центр педагогического мастерства

Email: `skopenko@mccme.ru`

Личная страница: `www.mccme.ru/~skopenko`