

Бильярдные шары вычисляют π

Г. А. Гальперин

Подсчёт числа соударений в простой динамической системе с двумя бильярдными шарами позволяет вычислить число π с любой заданной точностью. Описание этой изобретённой автором системы приводилось в его заметке «Бильярдная динамическая система для числа π » [3]. В настоящей статье приводится доказательство этого утверждения и обсуждается «тонкая структура» числа π .

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В самом начале замечательной книги В. И. Арнольда о дифференциальных уравнениях [2] можно найти следующее высказывание: «уже одно введение фазового пространства позволяет решить трудную задачу»¹⁾. Далее указанная задача формулируется и решается. Результат данной статьи подкрепляет высказывание Арнольда о полезности фазового пространства на примере ещё одной задачи — задачи вычисления числа π с любой точностью.

Существует много способов вычисления π с хорошей точностью; некоторые из них известны с античных времён, другие придуманы относительно недавно. Эти методы используют различные, подчас довольно элегантные идеи [8]: *геометрические* (вписывание и описывание правильных многоугольников вокруг окружности даёт, в частности, известные в античности значения $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$ для π); *теоретико-числовые* (теория непрерывных дробей позволяет найти обыкновенную дробь $\frac{355}{113}$ — простейшую аппроксимацию числа π с точностью до одной миллионной); *аналитические* (с использованием рядов, интегралов и бесконечных произведений); и многие другие, требующие использования современных электронных устройств — мощных калькуляторов или компьютеров.

Имеется также любопытный *экспериментальный* метод для нахождения π , открытый французским математиком Жоржем-Луи Леклерком

¹⁾ Фазовое пространство понимается обобщённо, как пространство состояний системы. В этой статье мы пользуемся понятием *конфигурационного* пространства, состоящего из положений точек, но не включающего их скоростей.

де Бюффоном (1707–1788) в статье «Мемуар об игре franc-carreau»²⁾ [9], опубликованной в 1777 году³⁾. Бюффон рассматривал случайные бросания иглы длины $L = D/2$ на решётку параллельных линий с шагом D . Иглу бросают N раз и подсчитывают число пересечений R с линиями решётки (заметим, что, поскольку игла короче, чем расстояние между двумя последовательными линиями, она каждый раз либо пересекает ровно одну линию, либо не пересекает ни одной). Частота появления пересечений с линиями равна R/N ; с другой стороны, можно показать, что вероятность того, что игла пересекает некоторую линию решётки, равна $1/\pi$ (для иглы произвольной длины L вероятность равна $2L/(\pi D)$). Сравнивая частоту и вероятность пересечений, мы заключаем, что π приблизительно равняется N/R — отношению числа попыток к числу зафиксированных пересечений с линиями плоскости. Разумеется, увеличение точности достигается за счёт увеличения числа попыток⁴⁾.

Читатель может поэкспериментировать с «иглой Бюффона» и найти хорошее приближение для π на интернет-сайте [13]. Он вскоре убедится, что требуется достаточно много бросаний, чтобы получить более-менее хорошую оценку для π ; к тому же необходимо обеспечить условия, при которых бросания являются *равновероятными*. Недостаток метода Бюффона связан с его вероятностной природой и невозможностью гарантировать получение какой-либо заданной точности в вычислениях π с использованием этого метода.

В этой статье мы представим абсолютно новую идею вычисления числа π , которую можно назвать *бильярдной*. Как и метод Бюффона, наш метод является экспериментальным и совершенно не требует использования каких-либо современных устройств. Однако, в отличие от метода Бюффона, этот метод полностью *детерминистический*: единственное, что нужно сделать — это «запустить» динамическую систему, состоящую всего из двух бильярдных шаров и абсолютно упругой преграды (стенки), подсчитать общее число соударений Π в такой системе и затем выписать это число на (возможно, достаточно длинном!) листе бумаги. Древние греки так именно и поступили бы; в наш же компьютерный век процедуру подсчёта числа ударов в описанной динамической системе естественно доверить компьютеру — и на этом пути даже создать наглядный мультфильм. (См. вебсайт [14] под названием «Billiard balls count π ».)

²⁾ Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon, *Le Mémoire sur le jeu de Franc-Carreau*.

³⁾ По другим данным, статья опубликована в 1733 году.

⁴⁾ Элементарное доказательство этого утверждения, без вычислений, имеется в книге В. И. Арнольда [1]. Его идею он позаимствовал из книги Я. И. Перельмана [5].

Это выписанное на листе целое число будет равно

$$314159265358979323846264338327950288419716939937510 \dots$$

Оно всегда начинается с цифры 3 и содержит первые N десятичных цифр числа $\pi = 3,14159265 \dots$, которые требуется узнать.

С другой стороны, наш метод чисто теоретический и, по всей вероятности, никогда не будет использоваться как практический способ для нахождения аппроксимаций числа π . Однако он является простейшим среди всех известных методов (начиная с древних греков!). Более того, этот метод даёт возможность вычислить π с любой точностью, т. е. позволяет найти каждую отдельную цифру⁵⁾ числа π .

Чтобы получить точность в N десятичных знаков, необходимо лишь взять шары с соответствующими массами; *отношение масс должно быть выбрано*⁶⁾ как N -я степень числа 100.

§ 2. ПРОЦЕДУРА

Рассмотрим два шара как материальные точки с массами m и M . (Таким образом, размеры шаров и их «округлость» во внимание вообще не принимаются; название «шары» мы используем для наглядности изложения.) Шары будут перемещаться вдоль положительной x -полуоси и сталкиваться друг с другом при каждой встрече. Кроме того, меньший шар m будет отражаться от вертикальной стенки, расположенной в точке $x = 0$.

Каждое столкновение в этой системе, как между шарами, так и шара m со стенкой, считается *абсолютно упругим*. Это означает, что столкновение между шарами удовлетворяет двум законам механики: закону сохранения *импульса* и закону сохранения *кинетической энергии*. Кроме того, при отражении малого шара от стенки его вектор скорости меняется на противоположный. Другими словами, стенку можно представлять себе как неподвижный бильярдный шар бесконечной массы.

Будем следовать описанной ниже ПРОЦЕДУРЕ.

1. Пусть N — фиксированное натуральное число. Возьмём два бильярдных шара с отношением масс $M/m = 100^N$.

⁵⁾ Отметим сразу, что вычисление π с заданной точностью — это не совсем то же самое, что нахождение каждой отдельной цифры π . В параграфах 2–8 мы доказываем, что шары «вычисляют» π с любой заданной точностью, а в оставшихся параграфах 9–11 отдельно обсуждаем интригующий вопрос о «тонкой структуре» числа π — о вычислении *всех его цифр* в десятичной записи.

⁶⁾ Как вскоре станет ясно читателю, число $100 = 10^2$ берётся лишь потому, что мы находим *десятичное* представление π . Для представления π в системе счисления с основанием b необходимо положить $M/m = b^{2N}$.

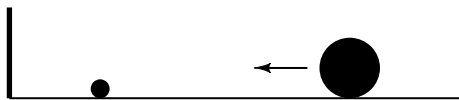


Рис. 1. Большой шар M движется в сторону малого шара t

2. Поместим меньший шар t между стенкой, расположенной в начале координат, и большим шаром M .
3. Толкнём⁷⁾ большой шар с произвольной скоростью по направлению к малому (см. рис. 1).
4. Сосчитаем полное число ударов в системе: число столкновений между шарами плюс число отражений малого шара от стенки.
5. Запишем число Π ударов, найденное в пункте 4, на листе бумаги.

(Заметим, что нам неизвестно априори, будет ли число ударов конечным или бесконечным; мы докажем, что оно всегда конечно.)

§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТНОГО СЛУЧАЯ

Для различных значений N предшествующая процедура даёт различные значения числа Π (некоторые из которых могли бы оказаться бесконечными). Таким образом, $\Pi = \Pi(N)$ является функцией показателя степени N числа 100^N .

Рассмотрим простейший случай $N = 0$, который соответствует равенству масс: $m = M$. Законы сохранения приводят к следующему поведению системы: если один из шаров покоится, а другой сталкивается с ним, то после столкновения неподвижный шар начинает двигаться в точности с той же скоростью и в том же направлении, как двигался до столкновения второй шар, тогда как второй шар останавливается. Это выглядит так, будто движущийся шар проходит сквозь неподвижный без изменения скорости и какого-либо влияния на неподвижный шар⁸⁾.

⁷⁾ Величина скорости не важна: если правильно изменить масштаб времени, то быстро движущийся большой шар станет двигаться медленно в новом масштабе. Изменение масштаба времени меняет энергию всей системы, что эквивалентно изменению масштаба энергии. Как мы увидим позднее, изменение масштаба времени сохраняет параллельность развёртки конфигурационной траектории с осью Oy в конфигурационном пространстве и поэтому не меняет числа пересечений развёрнутой траектории с границей развёртки конфигурационного пространства.

⁸⁾ На самом деле, то же самое наблюдается, когда оба одинаковых шара движутся: после столкновения они просто обмениваются скоростями; или, что эквивалентно, проникают друг сквозь друга без какого-либо взаимного влияния. Это рассуждение поз-

Затем движущийся шар ударяется о стенку и отражается от неё. Скорость шара меняется на противоположную, после чего он проходит через «прозрачный» неподвижный шар и улетает на бесконечность.

Мы видим, что общее число соударений в нашей системе с $m = M$ равно 3: два столкновения и одно отражение. Следовательно, $\Pi = \Pi(0) = 3$.

Заметим, что цифра 3 — это первая цифра числа π . Далее мы убедимся, что число соударений Π равно 31 (первые два знака π) и 314 (три знака π) для случаев $M = 100m$ и $M = 100^2m$ соответственно, т. е. $\Pi(1) = 31$ и $\Pi(2) = 314$. Ну а если $M = 100^{50}m$, то компьютер напечатает астрономическое число $\Pi(50)$, первые 50 цифр которого выписаны в теореме 1 и совпадают с первыми 50 цифрами числа π .

§ 4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

ТЕОРЕМА 1. *Количество соударений $\Pi = \Pi(N)$ в динамической системе, описанной в процедуре, всегда конечно и выражается числом с $N+1$ знаками $\Pi(N) = 314159265358979323846264338327950288419716939937510 \dots$, где первые N цифр, идущие после цифры 3, совпадают с первыми N десятичными знаками числа π .*

Остаток статьи посвящён доказательству этого утверждения.

§ 5. КОНФИГУРАЦИОННОЕ ПРОСТРАНСТВО СИСТЕМЫ. ПОВЕДЕНИЕ КОНФИГУРАЦИОННОЙ ТОЧКИ

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ шары m и M расположены в точках x_0 и y_0 на горизонтальной прямой ℓ . В ходе перемещения шаров их координаты x и y меняются во времени t , так что $x = x(t)$ и $y = y(t)$, $t \geq 0$ (см. рис. 2).

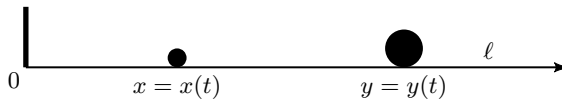


Рис. 2. Координаты шаров

воляет мгновенно решить следующую достаточно сложную (на первый взгляд) задачу: n одинаковых шаров движутся на некотором расстоянии друг от друга с одинаковыми скоростями вдоль горизонтальной прямой слева направо, а m других таких же шаров движутся аналогичным образом с одинаковыми скоростями (возможно, отличными от скоростей «левых» n шаров) вдоль той же прямой справа налево; вопрос: сколько столкновений произойдёт в этой системе? После всего сказанного ответ очевиден: общее число ударов в системе будет mn , поскольку можно считать, что каждый шар из первой группы проникает беспрепятственно сквозь каждый шар второй группы.

В частности, $x(0) = x_0$ и $y(0) = y_0$. Заметим, что в каждый момент времени t малый шар расположен между стенкой и большим шаром M . Следовательно,

$$0 \leq x(t) \leq y(t) \quad \forall t \geq 0.$$

В момент отражения малого шара m от стенки этот шар всегда расположен в начале координат: $x(t) = 0$.

Рассмотрим упорядоченную пару $(x(t), y(t))$ позиций шаров. Её можно представлять себе как точку на xy -плоскости \mathbb{R}^2 . Такая точка называется *конфигурационной точкой*, а о множестве всех конфигурационных точек говорят как о *конфигурационном пространстве*⁹⁾. (См. книгу [4].)

Конфигурационное пространство для рассматриваемой динамической системы из двух шаров представляет собой угол 45° с его внутренними точками, образованный осью y и биссектрисой первого квадранта плоскости xy , т. е. лучом $\{(x, y) \mid x = y, x \geq 0\}$ (см. рис. 3).

Таким образом, наряду с исходной («физической») системой двух шаров на полупрямой, мы будем рассматривать также другую («математическую») систему — математическую «тень» или «образ» исходной системы. Обе эти системы называются *динамическими системами*; они являются различными формальными описаниями одного и того явления. В наших рассуждениях мы будем свободно переходить от одного описания к другому¹⁰⁾.

Рассмотрим поведение фазовой точки $P(t) = (x(t), y(t))$.

Шаг 0 (до первого столкновения). В начальный момент $t = 0$ конфигурационная точка P имеет координаты (x_0, y_0) . С началом отсчёта времени точка $P = P(t)$ начинает двигаться в плоскости Oxy . Малый шар до первого столкновения неподвижен, следовательно, x -координата движущейся точки P не меняется. С другой стороны, большой шар M движется в сторону малого шара m , а следовательно, его координата y уменьшается, оставаясь, однако, большей чем x_0 в течение всего отрезка

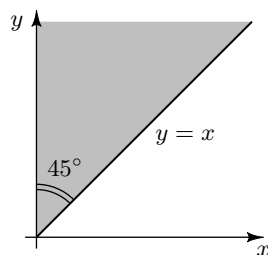


Рис. 3. Конфигурационное пространство системы

⁹⁾ Конфигурационное пространство может иметь размерность как меньшую трёх, так и большую или равную 3; мы сохраняем стандартный термин «пространство» даже для случая двумерной плоскости.

¹⁰⁾ Эта идея часто используется в математических исследованиях. Заданная модель подменяется её математическим кодом, который формально описывает модель в новых терминах. Подобное описание помогает исследовать проблему в целом. Другим ярким примером является игра в шахматы и её символическое описание в буквенно-цифровой форме.

времени перед первым столкновением. Следовательно, конфигурационная точка P движется строго вниз к оси x (параллельно оси y) вплоть до первого столкновения шаров.

Шаг 1 (*первое столкновение шаров*). Затем большой шар сталкивается с малым; в этот момент времени t_1 мы имеем $y(t_1) = x_0$. Далее шары отскакивают друг от друга, и начинается следующая стадия движения.

Шаг 2 (*между первым столкновением и первым отражением*). В момент времени t_1 оба шара начинают двигаться вдоль горизонтальной прямой ℓ . Малый шар движется с некоторой скоростью u , а большой — со скоростью v , причём выполняются законы сохранения импульса и энергии:

$$tu + Mv = MV, \quad \frac{mu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = \frac{MV^2}{2}, \quad (1)$$

где V — начальная (возможно, весьма большая!) скорость шара M . Мы не станем решать эту систему уравнений относительно переменных u и v . Наша цель состоит лишь в том, чтобы описать поведение фазовой точки *после* первого соударения.

Возвращаясь к исходной динамической системе и пользуясь системой уравнений (1), мы приходим к заключению, что после первого столкновения шар t будет очень быстро двигаться в сторону стенки (поскольку большой шар сообщил ему большой импульс); шар M также продолжит своё движение в сторону стенки, но будет двигаться несколько медленнее, чем раньше. Обе координаты $x(t)$ и $y(t)$ конфигурационной точки P убывают на временном отрезке между первым столкновением и отражением шара t от стенки. Следовательно, конфигурационная точка $P(t)$ движется

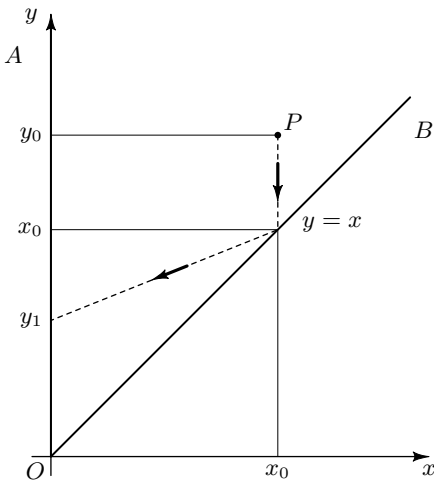


Рис. 4. Движение до и после первого столкновения шаров

вдоль прямолинейного отрезка внутри угла AOB , где O — начало системы координат, OA — вертикальная полуось y , а OB — луч $y = x$, исходящий из начала координат и лежащий в первом квадранте. Точка $P(t)$ перемещается со стороны OB на сторону OA , приближаясь к началу системы координат O (см. рис. 4).

Шаг 3 (*отражение шара t от стенки*). Несложно проверить, что малый шар t движется после первого столкновения быстрее, чем большой шар, т. е. $u > v$.

В самом деле, заметим для начала, что $v < V$. Это объясняется тем, что большой шар передал некоторый импульс малому шару и поэтому скорость v большого шара оказывается меньше исходной.

Умножая первое уравнение системы (1) на V и вычитая из полученного равенства удвоенное второе равенство (чтобы избавиться от двоек в знаменателях), получаем

$$\begin{array}{r} mu \cdot V + Mv \cdot V = MV^2 \\ - \\ mu^2 + Mv^2 = MV^2 \\ \hline mu(V - u) + Mv(V - v) = 0 \\ \downarrow \\ Mv(V - v) = mu(u - V). \end{array}$$

Поскольку $V - v > 0$, $Mv > 0$ и $mu > 0$, мы приходим к выводу, что $u - V > 0$, т. е. $u > V$. Таким образом, $u > V > v$ ¹¹⁾.

Далее, шар m достигает стенки в некоторый момент t_2 , при этом большой шар все ещё продолжает своё движение по направлению к стенке. В момент t_2 малый шар отражается от стенки, его скорость мгновенно изменяется с u на $-u$; импульс шара становится равным $-mu$, тогда как его энергия остаётся прежней:

$$\frac{m(-u)^2}{2} = \frac{mu^2}{2}.$$

Поэтому угол падения φ и угол отражения ψ , образованные отрезками траектории и осью y , равны друг другу: $\varphi = \psi$ (см. рис. 5).

Шаг 4 (после первого отражения от стенки). После первого отражения точка $P(t)$ движется от оси y по прямолинейному отрезку к диагонали $y = x$, приближаясь к началу координат O : её x -координата увеличивается, а y -координата уменьшается. Это соответствует тому, что шары сближаются после отражения шара m от стенки.

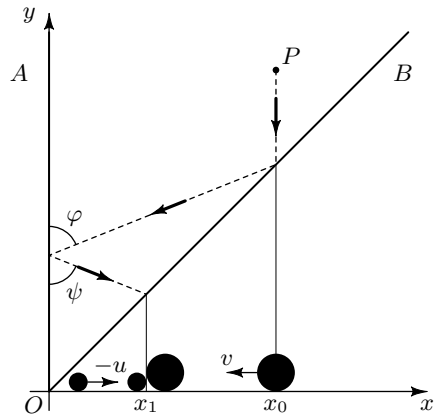


Рис. 5. Равенство $\varphi = \psi$ и второе столкновение шаров

¹¹⁾ Для упрощения мы рассматриваем скорость шара, движущегося справа налево, как положительную величину, а при его движении слева направо считаем скорость отрицательной. Вместо векторов скорости можно оперировать просто с числами — с абсолютными значениями скоростей.

Важно отметить, что поскольку стенка не рассматривается как часть системы шаров, полный импульс системы меняется при отражении от стенки с величины $tu + Mv = MV$ на $-tu + Mv$, тогда как полная энергия остаётся той же $-MV^2/2$. Полный импульс системы остаётся неизменным в промежутке времени между двумя последовательными отражениями от стенки.

Шаг 5 (второе столкновение шаров). В тот момент, когда точка P достигает стороны $y = x$ фазового угла AOB , происходит второе столкновение шаров. Пусть оно происходит в точке прямой ℓ с координатой x_1 . Скорости шаров изменяются в результате столкновения; если u_1 и v_1 суть новые значения скоростей, то выполняются равенства

$$tu_1 + Mv_1 = -tu + Mv, \quad \frac{tu_1^2}{2} + \frac{Mv_1^2}{2} = \frac{tu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = \frac{MV^2}{2}. \quad (2)$$

В силу рассуждений, аналогичных вышеприведённым, мы имеем

$$|u_1| > |v| > |v_1|.$$

Шаги 6, 7, ... После шага 5 повторяется исходная ситуация:

1. Малый шар t движется со скоростью u_1 в сторону стенки, тогда как большой шар M меняет свою скорость с v на v_1 , но, как и ранее, продолжает двигаться в сторону стенки.
2. Малый шар отражается от стенки, в результате чего его скорость меняется с u_1 на $-u_1$.
3. Малый шар встречает большой и взаимодействует с ним.

После этого процесс повторяется заново. Такое поведение системы находит отражение в движении конфигурационной точки P внутри угла (см. рис. 6).

Однако абсолютно неясно, какого рода поведение демонстрирует точка P :

- (i) приближается ли она к вершине O конфигурационного угла AOB бесконечно долго;
- (ii) или же точка P приближается к вершине O конечное время и затем удаляется от O , отражаясь от сторон угла AOB бесконечно много раз¹²⁾;

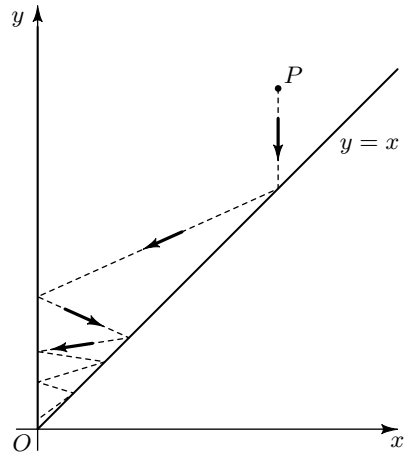


Рис. 6. Конфигурационная траектория

¹²⁾ Кстати говоря, даже если точка P и будет приближаться к вершине O конечное время, она могла бы за это конечное время совершить бесконечное число столкновений со сторонами угла AOB , прежде чем начать удаляться от O .

(iii) или же, наконец, точка P совершает в сумме лишь конечное число отражений от сторон угла и, начиная с некоторого момента T_0 , движется равномерно и прямолинейно.

Случаи (i) и (ii) соответствуют *бесконечному* числу соударений в системе, т. е. столкновений между шарами и отражений малого шара от стенки, а случай (iii) — *конечному* числу столкновений и отражений. Теорема утверждает, что реализовываться будет всегда только третий случай, причём полное число соударений в системе будет равно $\Pi = 314159265 \dots$

§ 6. РЕДУКЦИЯ К ЗАДАЧЕ О БИЛЬЯРДЕ ВНУТРИ УГЛА

Чтобы доказать теорему, мы сведём задачу о движении фазовой точки P в угле AOB с раствором 45° к задаче о бильярде внутри некоторого другого угла со специальным раствором α .

Бильярдной системой называется динамическая система, состоящая из области (замкнутой, подобно кругу или квадрату, или открытой, как угол) и точки, движущейся внутри этой области. Точка движется прямолинейно с постоянной скоростью и отражается от границы области по бильярдному (или оптическому) закону: *угол падения равен углу отражения*. Иначе говоря, точка в бильярдной системе ведёт себя как луч света в комнате (области) с зеркальными стенами (границей).

Чтобы перейти к бильярдной задаче, выполним специальное линейное преобразование T плоскости xy . Это преобразование было впервые рассмотрено Я. Г. Синаем в книгах [6] и [10]. Матрица преобразования T в xy -координатах есть

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{m} & 0 \\ 0 & \sqrt{M} \end{pmatrix}.$$

Преобразование T растягивает x -координату любого вектора в \sqrt{m} раз и y -координату — в \sqrt{M} раз. Введём новые переменные

$$\begin{cases} X = \sqrt{m} \cdot x, \\ Y = \sqrt{M} \cdot y. \end{cases} \quad (3)$$

Линейное преобразование T отображает угол AOB , $\angle AOB = 45^\circ$, в угол $A'OB'$, $\angle A'OB' = \alpha$, где

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{X}{Y} = \frac{\sqrt{m} \cdot x}{\sqrt{M} \cdot y} = \sqrt{\frac{m}{M}},$$

поскольку $y = x$ для точек луча OB (см. рис. 7).

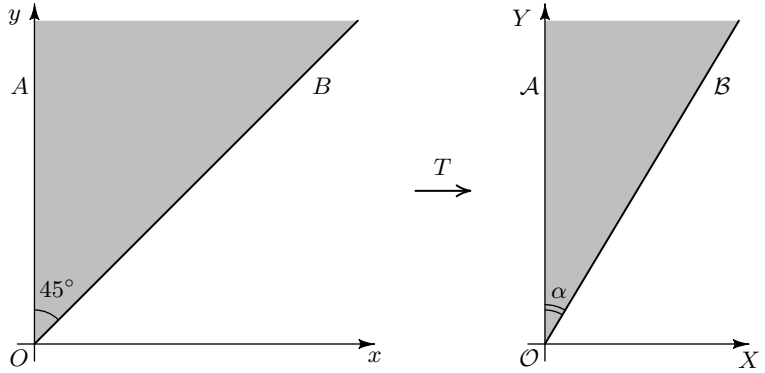


Рис. 7. Линейное преобразование T конфигурационного пространства

Ломаная, соответствующая траектории конфигурационной точки $P(x, y)$ внутри угла AOB , отобразится в ломаную, соответствующую траектории отображённой точки $\mathcal{P} = \mathcal{P}(X, Y) = \mathcal{P}(\sqrt{m}x, \sqrt{M}y)$ внутри угла $A\mathcal{O}\mathcal{B}$.

ЛЕММА 1. *Поведение новой конфигурационной точки \mathcal{P} внутри угла α подчиняется бильярдному закону.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что точке $P(x, y)$ соответствует вектор скорости $(u, v) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ в момент времени t (отличный от времени отражения), то точка $\mathcal{P}(t)$ имеет в тот же момент времени вектор скорости

$$\mathbf{w} = (\sqrt{m}\dot{x}(t), \sqrt{M}\dot{y}(t)) = (\sqrt{m}u, \sqrt{M}v).$$

Таким образом, линейное преобразование T конфигурационного пространства $\{(x, y)\}$ индуцирует то же самое линейное преобразование в пространстве скоростей $\{(\dot{x}, \dot{y})\}$.

Рассмотрим следующие два случая: случай 1, когда точка $\mathcal{P}(X, Y)$ отражается от вертикальной стороны $X = 0$ угла $A\mathcal{O}\mathcal{B}$ (т. е. от оси Y), и случай 2, когда точка $\mathcal{P}(X, Y)$ отражается от наклонной стороны угла $Y = \sqrt{\frac{M}{m}}X$.

Случай 1: отражение от оси Y .

Когда малый шар отражается от стенки, его скорость u меняется на $(-u)$. Тогда вектор \mathbf{w} переходит в вектор

$$\mathbf{w}' = (\sqrt{m}(-u), \sqrt{M}v),$$

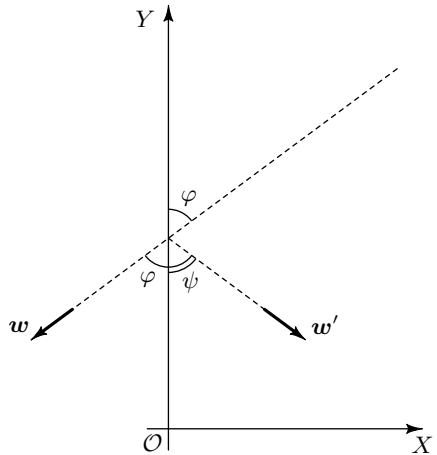


Рис. 8. Отражение от оси Y

что означает выполнение равенства $\varphi = \psi$ — т. е. бильярдный закон отражения (см. рис. 8).

Случай 2: отражение от стороны $Y = \sqrt{\frac{M}{m}}X$. Отражение этого типа соответствуют столкновению шаров в исходной динамической системе. Мы будем рассматривать интервал времени, в течение которого происходит только это столкновение (т. е. интервал времени между двумя последовательными отражениями шара m от стенки). В течение этого интервала времени система движущихся шаров имеет неизменный импульс, и столкновение шаров не меняет его. Энергия также сохраняется (она постоянна в ходе всего процесса).

Для удобства обозначим импульс p через const_1 , а удвоенную энергию $2E$ — через const_2 . Предположим, что малый шар имеет скорость u , а большой шар имеет скорость v . Система (1) может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} mu + Mv = \text{const}_1, \\ mu^2 + Mv^2 = \text{const}_2. \end{cases} \quad (4)$$

В системе (4) скрыта интересная геометрия. А именно рассмотрим постоянный вектор

$$\mathbf{n} = (\sqrt{m}, \sqrt{M})$$

в плоскости xy (он направлен вдоль прямой $Y = \sqrt{\frac{M}{m}}X$) и зависящий от времени вектор

$$\mathbf{w} = (\sqrt{m}u, \sqrt{M}v).$$

Тогда систему (4) можно переписать так:

$$\begin{cases} \mathbf{n} \bullet \mathbf{w} = \text{const}_1, \\ |\mathbf{w}| = \text{const}_2. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь « \bullet » — скалярное произведение в плоскости xy , а « $|\cdot|$ » — евклидова длина вектора. Формулы (5) отражают тот факт, что евклидова метрика заменена на другую риманову метрику — так называемую «метрику кинетической энергии» (в которой квадрат длины вектора (u, v) есть удвоенная кинетическая энергия $mu^2 + Mv^2$).

В силу равенств

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{w} = |\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{w}| \cos \varphi = \text{const}_1,$$

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{m + M}, \quad |\mathbf{w}| = \text{const}_2$$

мы имеем

$$\cos \varphi = \frac{\text{const}_1}{\text{const}_2} \cdot (m + M)^{-1/2} = \text{const}_3.$$

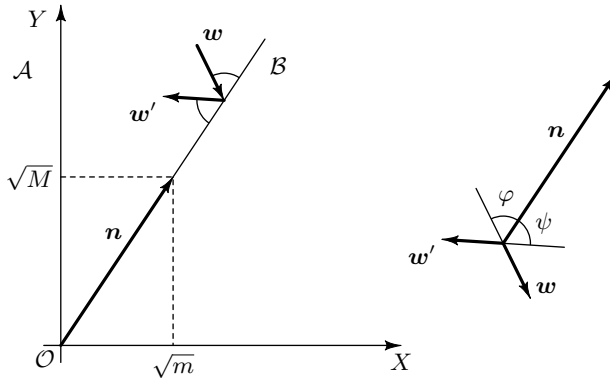


Рис. 9. Отражение от стороны OB ($Y = \sqrt{\frac{M}{m}}X$)

После отражения точка \mathcal{P} движется с новой скоростью w' , удовлетворяющей этой же системе уравнений (5). Поэтому из тех же самых соображений для угла отражения ψ точки \mathcal{P} от стороны $Y = \sqrt{\frac{M}{m}}X$ угла AOB следует равенство (см. рис. 9)

$$\cos \psi = \text{const}_3.$$

Следовательно,

$$\psi = \varphi,$$

и бильярдный закон доказан для этого отражения. Сведение к бильярдной системе внутри угла с раствором α закончено. Мы будем называть угол AOB «бильярдным конфигурационным пространством» исходной динамической системы. \square

§ 7. ЧИСЛО БИЛЬЯРДНЫХ ОТРАЖЕНИЙ ВНУТРИ УГЛА AOB

ЛЕММА 2. 1. Максимальное число отражений бильярдной точки внутри угла AOB по всем возможным бильярдным траекториям конечно.

2. Это число равно π/α , если π/α — целое число, и равно $[\pi/\alpha] + 1$, если π/α не является целым (здесь $[\cdot]$ означает целую часть числа).

3. Если начальный луч бильярдной траектории параллелен одной из сторон угла α , то полное число отражений для траектории такого вида на единицу меньше максимального (т. е. равно $\pi/\alpha - 1$ при $\pi/\alpha \in \mathbb{Z}$ и $[\pi/\alpha]$, если $\pi/\alpha \notin \mathbb{Z}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим развёртку угла AOB вместе с бильярдной траекторией γ внутри него. Для этого нужно просто отразить угол относительно его сторон и рассмотреть образ траектории γ при этих

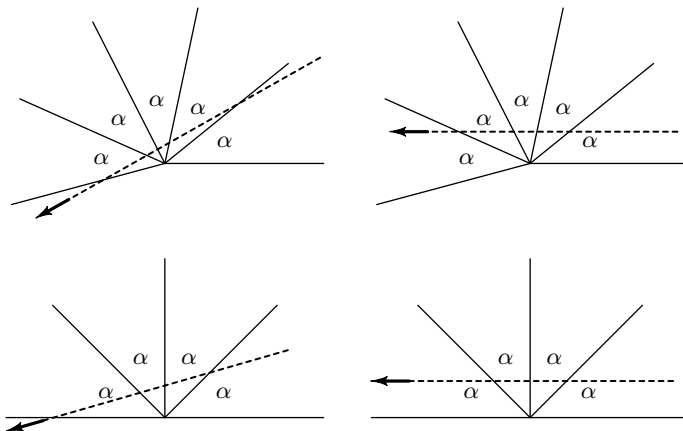


Рис. 10. Развёртка бильярдной траектории

отражениях. Образ траектории представляет собой прямую k , проходящую через всю последовательность отражённых углов — «коридор» (см. рис. 10).

Прямая k пересекает, очевидно, лишь конечное число копий угла α в этом коридоре. Но число пересечений со сторонами отражённых углов в коридоре равно числу отражений траектории γ от сторон исходного угла. Следовательно, число бильярдных отражений конечно. Если n — максимально возможное число отражений, то либо $n\alpha = \pi$, либо $n\alpha > \pi > (n - 1)\alpha$ (см. рис. 10). В первом случае мы имеем $n = \pi/\alpha$, тогда как во втором случае прямая k не пересекает последнюю сторону угла в коридоре, и, стало быть, число пересечений будет на единицу меньше: $n = [\pi/\alpha] - 1$. Если же прямая k параллельна стороне угла α , то последнее возможное пересечение со стороной угла исключается. Тем самым лемма доказана. \square

§ 8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ: $\Pi = 314159265\dots$

Мы хотели бы обратить внимание читателя на следующую существенную особенность системы «стенка — шар — шар». Движение в этой системе соответствует особому лучу r на развёртке бильярдного конфигурационного пространства $\alpha = AOB$: этот луч должен быть параллелен оси Y (см. рис. 11).

В самом деле, первый отрезок бильярдной траектории направлен вниз к оси X , и следовательно, параллелен оси Y , поскольку малый шар был неподвижен в самом начале процесса. Значит, луч k — развёртка бильярдной траектории γ , т. е. продолжение первого, вертикального её отрезка, — параллелен оси Y . Заметим, что указанная параллельность луча k оси Y имеет место вне зависимости от значения начальной скорости V шара M (смотри сноску к пункту 3 Процедуры).

Таким образом, в соответствии с леммой 2, пункт 2, число отражений от сторон угла α равно $[\pi/\alpha]$, за исключением того случая, когда π/α — целое число. В нашем случае имеем

$$\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{m}{M}} = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{m}{m \cdot 100^N}} = \operatorname{arctg} 10^{-N}.$$

Для $N=0$ получаем $\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$ и $\pi/\alpha = 4 \in \mathbb{Z}$, так что выполнена лемма 2, пункт 3: число отражений равно $[4] - 1 = 3$. Однако в случае $N \geq 1$ угол $\alpha = \operatorname{arctg} 10^{-N}$ не может быть представлен в виде π/k , где $k \geq 1$ целое; в действительности этот угол, так же как и произвольный угол вида $\operatorname{arctg}(p/q)$, где p и q — различные натуральные числа, не может измеряться рациональным числом градусов, в частности числом $(180/k)^\circ$ (доказательство этого факта приведено в [7]). Следовательно, в этом случае работает вторая часть леммы 2: число отражений равно

$$\Pi(N) = \left[\frac{\pi}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} \right]. \quad (6)$$

Это — точная формула; сейчас мы воспользуемся аппроксимацией для числа $\operatorname{arctg} 10^{-N}$, чтобы упростить выражение (6).

Основная идея оставшейся части этого параграфа состоит в следующем. Если мы заменим знаменатель дроби $\pi/\operatorname{arctg} 10^{-N}$ на немного большее число 10^{-N} , то получим несколько меньшее отношение $\frac{\pi}{10^{-N}} = \pi \cdot 10^N$; в том случае, когда целая часть исходной дроби совпадает с целой частью уменьшенной дроби, мы можем заменить её на $\left[\frac{\pi}{10^{-N}} \right]$. Это и даст нам N точных знаков числа π .

Однако ситуация немного сложнее, чем это может показаться на первый взгляд:

целые части двух дробей, исходной (6) и аппроксимированной $[\pi/10^{-N}]$, могут, вообще говоря, оказаться различными!

К счастью, если число N достаточно велико, то они всегда будут отличаться самое большее на 1. Объясним, почему это так.

Обозначим $x = 10^{-N}$. Напомним, что

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

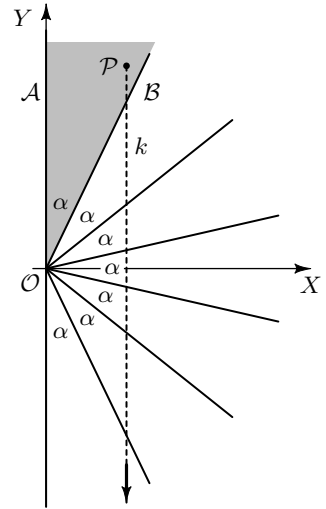


Рис. 11. Луч k параллелен оси Y

а следовательно, $\operatorname{arctg} x \approx x$ когда $x \rightarrow 0$. Мы собираемся подставлять x вместо $\operatorname{arctg} x$ в формулу (6).

ЛЕММА 3. (а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right) = 0$; (б) $\left(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right) < x$ для $x > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Заменяя $\operatorname{arctg} x$ его тейлоровским разложением, получаем

$$\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x \operatorname{arctg} x} = \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \right)}{x \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \right)} = x \cdot \frac{\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5} + \dots}{1 - \frac{x^2}{3} + \dots} \rightarrow 0$$

при $x \rightarrow 0$, поскольку предел дробного сомножителя равен $1/3$.

(б) Это неравенство можно легко вывести из доказательства пункта (а). Однако есть другое, независимое, доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x - x$. Поскольку $f'(x) = 2x \operatorname{arctg} x > 0$ для $x > 0$ и $f(0) = 0$, мы имеем $f(x) > 0$ для всех $x > 0$. Ч. т. д. \square

Из пункта (а) леммы 3 следует, что

$$\frac{\pi}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} - \frac{\pi}{10^{-N}} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\frac{\pi}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} \approx \pi \cdot 10^N,$$

если N достаточно велико. Поэтому либо

$$\begin{aligned} \Pi(N) &= \left[\frac{\pi}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} \right] = [\pi \cdot 10^N] = \\ &= [(3,1415 \dots a_{N-1} a_N \dots) \cdot 10^N] = 31415 \dots a_{N-1} a_N, \end{aligned} \quad (7)$$

либо

$$\Pi(N) = \left[\frac{\pi}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} \right] = [\pi \cdot 10^N] + 1 = 31415 \dots a_{N-1} a_N + 1. \quad (8)$$

Последняя возможность создаёт дополнительную проблему. Действительно, формулы (7) и (8) гарантируют, что $(N+1)$ -значное число $\Pi(N)$ содержит либо первые N , либо первые $N + 1$ точных цифр числа π (начиная с цифры 3),

**за исключением случая,
когда какие-то $k \geq 1$ последних цифр
числа $31415 \dots a_N$ суть девятки.**

Ниже (см. конец § 10) мы придём к заключению, что последний случай не может иметь места (по крайней мере когда N не превосходит 200

миллионов) или же реализуется с ничтожной вероятностью. Так или иначе,

$$\Pi(N) - [\pi \cdot 10^N] = \begin{cases} 0, \\ 1. \end{cases} \quad (9)$$

Таким образом, не считая этого последнего предположения, теорема доказана:

**бильярдные шары вычисляют π
с произвольной наперёд заданной точностью.**

§ 9. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ЧИСЛА π

Если

$$\pi = 3,1415 \dots a_k \underbrace{999 \dots 9}_{N-k \text{ девяток}} a_{N+1} \dots,$$

причём $a_k < 9$, $a_{N+1} < 9$, то из формулы (8) следует равенство

$$\Pi(N) = [\pi \cdot 10^N] + 1 = 31415 \dots a_k \underbrace{999 \dots 9}_{N-k \text{ девяток}} + 1 = 31415 \dots (a_k + 1) \underbrace{000 \dots 0}_{N-k \text{ нулей}}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $\Pi(N)$ даёт только $k < N$ точных цифр π , тогда как последние $N - k$ цифр в $\Pi(N)$ не совпадают с соответствующими цифрами числа π .

К счастью, это случается (если вообще случается!) чрезвычайно редко и не влияет на общий результат, касающийся *полной последовательности целых чисел* $\Pi(N)$ при $N \rightarrow \infty$: последовательность первых цифр чисел $\Pi(0)$, $\Pi(1)$, $\Pi(2)$, ..., $\Pi(N)$, ... стабилизируется, начиная с некоторого числа $\Pi(N)$, поэтому мы в конечном счёте всё-таки сможем узнать **все цифры** числа π (увеличивая массу $M = m \cdot 100^N$ в 100 раз для каждого следующего приближения).

Однако намного более вероятно, что формула (8) ложна для всех N . В этом случае всегда работает формула (7), и тогда число $\Pi(N)$ даёт ровно N точных десятичных цифр числа π . Мы обсудим эту, более вероятную, возможность в следующем параграфе.

§ 10. НЕСКОЛЬКО АРИФМЕТИЧЕСКИХ ВОПРОСОВ И ОДНА ГИПОТЕЗА: «ТОНКАЯ СТРУКТУРА ЧИСЛА π »

Было бы прекрасно, если бы при всех N правильной оказывалась формула (7), дающая точное значение $\Pi(N)$, а равенство (8) никогда бы не имело места.

В этой связи можно поставить следующие четыре вопроса.

Вопрос 1. Верна ли формула (7)

$$\left[\frac{\pi}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} \right] = \left[\frac{\pi}{10^{-N}} \right]$$

для всех достаточно больших N ?

Вопрос 2. Верно ли, что для любого положительного *иррационального* числа a и для любого достаточно малого положительного x имеет место равенство

$$\left[\frac{a}{\operatorname{arctg} x} \right] = \left[\frac{a}{x} \right] ?$$

Вопрос 3. Выполняется ли для всех достаточно больших N равенство

$$\left[\frac{\pi}{\operatorname{arctg}(1/N)} \right] = \left[\frac{\pi}{1/N} \right] ?$$

Вопрос 4. Верно ли равенство

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} \right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{10^{-N}} \right]$$

для всех достаточно больших N ?

Вопрос 2 представляет собой далеко идущее обобщение вопроса 1, тогда как вопросы 3 и 4 вполне аналогичны вопросу 1 и получаются, если заменить 10^{-N} на $1/N$ или же π на $\sqrt{2}$ соответственно. Автор уверен, что ответ на вопрос 1 — «ДА», хотя и не может этого доказать. В то же время автору известны точные ответы со строгими доказательствами на остальные три вопроса (см. следующий параграф).

Что касается вопроса 1, то современная математика не в состоянии на него ответить; во всяком случае, несколько ведущих специалистов в теории чисел и смежных вопросах убеждали автора этой статьи, что современная математика куда как далека от решения данной проблемы. Вот перевод на русский язык цитаты из электронного письма известного австралийского математика Алфа ван дер Пуртена (Alf van der Poorten) автору: «...Сегодняшний уровень знаний настолько слаб, что, лишь обнаружив примерно $7N$ девяток, следующих подряд вслед за N первыми десятичными цифрами числа π , я мог бы утверждать, что такого быть не может. Но к моему глубокому сожалению, уровень развития современной математики не позволяет сказать (а тем более доказать), что вслед за N первыми десятичными знаками числа π не могут идти $N + \varepsilon$ (где $\varepsilon \ll N$) девяток подряд. Говорю об этом с сожалением, поскольку для Вас это — возвращение к исходному предположению. Простейшая известная мне работа на данную тему — моя

старая статья [11] „Доказательство, которое пропустил Эйлер“, опубликованная в журнале „Mathematical Intelligencer“ в 1979 г.».

Иными словами, Алф ван дер Пуртен утверждает, что в числе π за первой цифрой 3 не идут 7 девяток; за цифрами 31 не идут 14 девяток, и так далее, как бы далеко мы ни продвинулись в десятичной записи π . Авторский вопрос 1 состоит в том, что сразу же за первыми N цифрами числа π не может идти набор из N девяток; дать ответ на этот вопрос математика пока бессильна, что с сожалением и отмечает ван дер Пуртен в своём письме.

С другой стороны, имеется ряд фактов, которые оправдывают уверенность автора в том, что ответ на вопрос 1 положителен. Прежде всего, можно показать, что

равенство (8) (когда к ответу (7) добавляется лишняя единица) справедливо в том и только том случае, когда строка первых $2N$ десятичных знаков числа π содержит $N-1$ девяток в своей правой половине.

В самом деле, для $x > 0$ согласно лемме 3, пункт 2,

$$\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} < x.$$

Подставляя $x = \pi \cdot 10^{-N}$, получаем

$$\frac{\pi}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} - 10^N \pi < \frac{\pi}{10^N}.$$

Для того чтобы числа $[10^N \pi]$ и $\left[\frac{\pi}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} \right]$ были различны (а значит, отличались бы ровно на 1), необходимо, чтобы за первыми N цифрами в десятичном представлении π следовали $N-1$ девяток. Но если бы это выполнялось для бесконечного множества значений N , то (верхнее) значение плотности девяток в десятичном представлении π составило бы по крайней мере $1/2$. А это весьма неправдоподобно!

Читатель может легко проверить, используя интернет-сайт

mathoverflow.net/questions/62868,

что

«последовательность 999999999 (9 девяток) ни разу не встречается в строке первых 200 000 000 цифр числа π , начиная с позиции 0».

То же самое относится вообще ко всем десятичным цифрам, кроме цифры 6, которая появляется в этой же строке из 200 000 000 цифр 9 раз подряд, начиная с позиции 45 681 781 от начала десятичного разложения π .

Таким образом, не только **половина** из первых 200 миллионов цифр числа π не состоит из девяток (как должно было бы случиться, если бы равенство (8) выполнялось), но максимальная цепочка из последовательных девяток имеет лишь длину восемь!

Это показывает, прежде всего, что наш метод для нахождения числа π точен, по крайней мере до 200 миллионов знаков.

Кроме того, несложно подсчитать вероятность события, состоящего в том, что некоторое целое число содержится в объединении всех интервалов с концами $\pi/10^{-n}$ и $\pi/\operatorname{arctg} 10^{-n}$ для $n > 2 \cdot 10^8$. Длина одного такого интервала составляет примерно $\pi \cdot 10^{-n}/3$; будем считать, что это как раз и есть вероятность того, что в интервал попадает некоторое целое число. Суммируя величины этих вероятностей по всем значениям $n \geq 2 \cdot 10^8$, получаем оценку для полной вероятности

$$p = \sum_{n=2 \cdot 10^8}^{\infty} \pi \cdot \frac{10^{-n}}{3} = \frac{\pi \cdot 10^{-2 \cdot 10^8 + 1}}{27}.$$

Это практически нуль!

Все эти рассуждения позволяют нам сформулировать вопрос 1 в виде следующей гипотезы.

Гипотеза: (А). Для любого натурального числа N имеет место равенство

$$\left[\frac{\pi}{\operatorname{arctg} 10^{-N}} \right] = \left[\frac{\pi}{10^{-N}} \right].$$

(Б). Для любого натурального числа N последовательность $2N$ первых цифр числа π не может оканчиваться $N-1$ последовательными девятками:

$$\pi \neq 3, \underbrace{1415 \dots a_N}_{N \text{ цифр}} \underbrace{99 \dots 99}_{N-1 \text{ девяток}} \dots$$

Таким образом, мы доказали эту гипотезу для всех N , не превосходящих 200 миллионов, и с вероятностью

$$1 - \frac{\pi \cdot 10^{-2 \cdot 10^8 + 1}}{27} \approx 1$$

для всех N , больших 200 миллионов.

§ 11. ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ 2, 3 и 4

Вопрос 2. Ответ на вопрос 2 отрицателен.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Равенство $\left[\frac{a}{\operatorname{arctg} x} \right] = \left[\frac{a}{x} \right]$ не может выполняться для всех значений x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a — положительное число (неважно, рациональное или нет). Положим $x = \operatorname{tg}(a/n)$. Тогда левая часть равенства принимает значение n , в то время как правая часть строго меньше n (поскольку $a/n < \operatorname{tg}(a/n)$). (Малое изменение значения $x = \operatorname{tg}(a/n)$ не меняет неравенства $\left[\frac{a}{\operatorname{arctg} x}\right] > \left[\frac{a}{x}\right]$, так что для целого интервала значений x равенство из утверждения 1 не может выполняться.) \square

Вопрос 3. Введём обозначение $L_N = \left[\frac{\pi}{\operatorname{arctg}(1/N)}\right]$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для всех значений $N \geq 23$ выполняется одно из двух равенств — либо $L_N = [\pi N]$, либо $L_{N+1} = [\pi(N+1)]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное: $L_N \neq [\pi N]$ и $L_{N+1} \neq [\pi(N+1)]$. Тогда $L_N > \pi N$ и $L_{N+1} > \pi(N+1)$. Согласно лемме 3, пункт 2,

$$\frac{\pi}{\operatorname{arctg} x} < \pi x + \frac{\pi}{x},$$

откуда, полагая $x = 1/N$ и $x = 1/(N+1)$, получаем два неравенства:

$$\pi N + \frac{\pi}{N} > L_N > \pi N \quad \text{и} \quad \pi(N+1) < L_{N+1} < \pi(N+1) + \frac{\pi}{N+1}.$$

Вычитание этих неравенств даёт

$$\pi - \frac{\pi}{N} < L_{N+1} - L_N < \pi + \frac{\pi}{N+1}.$$

Если $N \geq 23$, то $\pi - \frac{\pi}{N} > 3$ и $\pi + \frac{\pi}{N+1} < 4$, так что мы получаем неравенство

$$3 < L_{N+1} - L_N < 4,$$

которое невозможно, ибо $L_{N+1} - L_N$ целое. Утверждение доказано. \square

Вопрос 4. Ответ на вопрос 4 — «ДА».

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для достаточно больших целых N имеет место равенство $\left[\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{arctg} 10^{-N}}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{10^{-N}}\right]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы пишем $g(x) = \bar{o}(f(x))$ при $x \rightarrow 0$, если $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

При $x \rightarrow 0$ имеем

$$\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{arctg} x} = \frac{\sqrt{2}}{x - \frac{x^3}{3} + \bar{o}(x^4)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{x}}{1 - \frac{x^2}{3} + \bar{o}(x^3)} = \frac{\sqrt{2}}{x} \left(1 + \frac{x^2}{3} + \bar{o}(x^3)\right).$$

Положим

$$M_N = \left[\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{arctg} x_N}\right], \quad \text{где } x_N = 10^{-N}.$$

Тогда

$$\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{arctg} x_N} \geq M_N,$$

и значит,

$$\frac{\sqrt{2}}{x_N} \left(1 + \frac{x_N^2}{3} + \bar{o}(x_N^3) \right) \geq M_N \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{2}}{x_N} \geq \frac{M_N}{1 + \frac{x_N^2}{3} + \bar{o}(x_N^3)}.$$

Допустим, что, напротив, $[\sqrt{2}/x_N] < M_N$ для некоторого N . (Заметим, что в этом случае $M_N - [\sqrt{2}/x_N] = 1$.) Тогда выполняется также неравенство $\sqrt{2}/x_N < M_N$ (целое число M_N лежит между нецелыми $\sqrt{2}/x_N$ и $\sqrt{2}/\operatorname{arctg} x_N$), а значит,

$$M_N > \frac{\sqrt{2}}{x_N} \geq \frac{M_N}{1 + \frac{x_N^2}{3} + \bar{o}(x_N^3)}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{\sqrt{2}}{x_N} \left(1 + \frac{x_N^2}{3} + \bar{o}(x_N^3) \right) \geq M_N > \frac{\sqrt{2}}{x_N}.$$

Подставим вместо x_N значение 10^{-N} ; получим

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cdot 10^N < M_N \leq \sqrt{2} \cdot 10^N \left(1 + \frac{10^{-2N}}{3} + \bar{o}(10^{-3N}) \right) = \\ = \sqrt{2} \cdot \left(10^N + \frac{10^{-N}}{3} + \bar{o}(10^{-2N}) \right). \end{aligned}$$

Возводя в квадрат, получаем неравенство

$$2 \cdot 10^{2N} < M_N^2 \leq 2 \left(10^{2N} + \frac{2}{3} + \frac{10^{-2N}}{9} + \bar{o}(10^{-N}) \right) = 2 \cdot 10^{2N} + \frac{4}{3} + \bar{o}(10^{-N}).$$

В интервале

$$\left(2 \cdot 10^{2N}, 2 \cdot 10^{2N} + \frac{4}{3} \right)$$

имеется лишь одно целое число, а именно $2 \cdot 10^{2N} + 1$. Значит,

$$M_N^2 = 2 \cdot 10^{2N} + 1.$$

Но

$$2 \cdot 10^{2N} + 1 \equiv 2 \cdot 1 + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

и

$$2 \cdot 10^{2N} + 1 \equiv 2 \cdot 1 + 1 = 3 \not\equiv 0 \pmod{9}.$$

Это противоречит тому факту, что если полный квадрат делится на 3, то он должен делиться и на 9. Следовательно, $M_N = \left[\frac{\sqrt{2}}{10^{-N}} \right]$, и утверждение доказано. \square

§ 12. РОДСТВЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, ТАКЖЕ ВЫЧИСЛЯЮЩАЯ Π

Система «стенка — малый шар — большой шар» может быть заменена другой системой, которая тоже считает число $\Pi(N)$. Эта новая система состоит только из шаров и не содержит неподвижного отражателя-преграды.

Представим себе преграду как плоское зеркало. Двум шарам исходной системы соответствуют их зеркальные отражения по другую сторону зеркала. Когда шар m отражается от зеркала, то же самое происходит и с его зеркальным образом (только с другой стороны зеркала). Когда шары сталкиваются друг с другом, сталкиваются и их отражения.

Теперь удалим это зеркало, а шары-отражения заменим парой настоящих шаров с теми же массами m и M , что и массы исходных шаров-образов. Когда два малых шара движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями и затем сталкиваются, они просто обмениваются своими скоростями или, другими словами, проходят друг сквозь друга без какого-либо взаимного влияния (мы уже обсуждали это выше). Пары шаров $(M - m)$ и $(m - M)$ сталкиваются одновременно, и мы фиксируем это событие как одно столкновение. При этих условиях в системе $(M - m - m - M)$ насчитывается то же число столкновений Π , что и в ранее рассмотренной системе «стенка — $m - M$ ».

Между двумя системами — исходной со стенкой и расширенной с четырьмя шарами — имеется ряд различий.

1. Стенка в первой системе играет роль шара бесконечной массы, тогда как во второй системе нет ни неподвижного препятствия, ни шара бесконечной массы.
2. Конфигурационное пространство первой системы двумерно, тогда как для расширенной системы конфигурационное пространство имеет размерность 4: оно представляет собой прямую сумму двух идентичных копий конфигурационного пространства первой системы и обладает естественными симметриями.
3. В исходной системе необходимо различать отскоки от стенки (т. е. отражения) и соударения шаров. После столкновения со стенкой импульс системы (пары шаров) изменяется, а при соударении шаров друг с другом этого не происходит. Во второй же системе наблюдаются только столкновения шаров, а потому используется только формула (1) или (4).

Объединяет две системы то, что они выполняют одну и ту же функцию:

подсчитывают число Π !

§ 13. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Автор изобрёл бильярдный метод для нахождения числа π , когда готовил для математического коллоквиума в Eastern Illinois University доклад о столкновениях шаров (по так называемой проблеме Синая). Когда процедура вычисления π с помощью двух шаров была представлена аудитории, в результате поначалу никто не поверил. Но затем автор привёл доказательство, простота которого убедила всех и каждого.

Позднее автор рассказывал о своём открытии ещё в нескольких американских и европейских университетах с неизменной реакцией аудитории: поначалу полное недоверие, а затем полное принятие ввиду очевидности доказательства.

С экспериментальной (физической) точки зрения основная теорема данной статьи (см. §§ 2–4) полностью доказана: отношение двух реальных масс M/m , использующееся в процедуре вычисления π , не может превосходить числа атомов во Вселенной, которое много меньше чем $10^{200\,000\,000}$ (на самом же деле это число не превосходит даже 10^{200}); но мы знаем (из сети Интернет), что наш метод даёт точную последовательность первых 200 000 000 цифр числа π . Однако с математической точки зрения сформулированная здесь гипотеза представляется нам по-настоящему сложной математической проблемой, в настоящее время совершенно недоступной.

БЛАГОДАРНОСТИ

Прежде всего, мне хочется поблагодарить профессора Айру Розенгольца (Ira Rosenholtz, Eastern Illinois University), который убедил меня написать и опубликовать эту статью.

Я признателен также всем, кто приглашал меня с докладом на математические и физические семинары, коллоквиумы и заседания математических клубов. Особо я хотел бы упомянуть американских профессоров: John Wetzel; Anatoly Katok; Michael Bosherniatzan; Nikolai Chernov; Keith Burns; Paul Sally; George Berzsenyi, а также европейских профессоров: Sergio Albeverio; Yuri Kondratiev; Phillip Blanchard; Aleksandr Plakhov; Carlo Boldrighini. Я также делал доклады на эту тему в нескольких летних математических лагерях для школьников, которые проводились в Nebraska University, — в этом лагере ежегодно готовят американскую команду для участия в Международной математической олимпиаде; в «Zoom Academy», California State Fullerton; а также в летней школе «Современная математика» (Дубна, Россия). Я приношу благодарность всем организаторам этих лагерей и летней школы.

Хочу выразить также признательность моему другу профессору Чарльзу Делману (C. Delman, Eastern Illinois University), который прочитал исходную рукопись в английском варианте и предложил множество улучшений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Арнольд В. И. Математическое понимание природы. М.: МЦНМО, 2011. С. 85–87 (*Задача Бюффона и интегральная геометрия*).
- [2] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: МЦНМО, 2012. С. 4–15 (*Задача 1*).
- [3] Гальперин Г. А. Биллиардная динамическая система для числа π // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 5. М.: МЦНМО, 2001. С. 137–138.
- [4] Гальперин Г. А., Земляков А. Н. Математические бильярды // Библиотечка «Квант». Вып. 77. М.: Наука, 1990.
- [5] Перельман Я. И. Занимательная геометрия (на вольном воздухе и дома). Второе исправленное издание. Л.: Время, 1927. С. 190–193 (*Бросание иглы*).
- [6] Синай Я. Г. Введение в эргодическую теорию. М.: Фазис, 1996.
- [7] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. М.: Физматлит. 2001. С. 56 (*Задача 239(б)*).
- [8] Beckmann P. A History of Π . Golem Press, 1971.
- [9] de Buffon G. L. L. Comte Sur le jeu de franc-carreau, 1777.
См. также веб-сайт <http://www.cut-the-knot.com/fta/Buffon/buffon9.htm>.
- [10] Sinai Ya. G. Introduction to Ergodic Theory. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1976.
- [11] van der Poorten A. A proof that Euler missed // Math. Intelligencer. 1979. V. 1, № 4. P. 195–203.
- [12] Веб-сайт, посвящённый числу π : mathoverflow.net/questions/62868.
- [13] Веб-сайт, посвящённый игле Бюффона:
<http://stud4.tuwien.ac.at/~e9527412/Buffon.html>.
- [14] Веб-сайт, посвящённый соударению шаров в системе «стенка — шар m — шар M » (мультфильм создан Верой Рощиной): <http://youtu.be/4UhPTnIprk>.