Компьютерное доказательство теоремы об инцентрах

Н. Н. Осипов

В произвольном треугольнике провели биссектрисы и в каждый из шести образовавшихся треугольников вписали окружность. Теорема об инцентрах утверждает, что центры этих шести окружностей лежат на одной кривой второго порядка. В статье приводится вычислительное доказательство этой теоремы и её обобщения с использованием системы компьютерной алгебры `Maple`. Для эффективной реализации вычислений применяется алгебра комплексных чисел.

§ 1. Введение

В недавней статье [5] был приведён целый ряд сходных между собой геометрических гипотез, которые, вероятно, родились в результате экспериментов с какой-нибудь *системой динамической геометрии* типа `GeoGebra` [7]. Настоящая статья посвящена доказательству одной из этих гипотез, которую мы будем называть *гипотезой об инцентрах*[1]. Сформулируем её.

Пусть ABC — произвольный треугольник, AA_1, BB_1, CC_1 — его биссектрисы, I — инцентр треугольника ABC, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 — инцентры треугольников AB_1I, A_1BI, BC_1I, B_1CI, CA_1I, C_1AI соответственно. Гипотеза утверждает, что шесть инцентров P_j лежат на одном эллипсе.

Эта гипотеза верна. Точнее, справедлива следующая

Теорема об инцентрах. *Шесть инцентров P_j лежат на одной кривой второго порядка.*

Интуитивно очевидно, да и рисунки в `GeoGebra` показывают, что этой кривой будет эллипс. Почему именно эллипс, а не, скажем, гипербола? Этим вопросом мы не будем заниматься, но дадим некое естественное (в рамках применяемого здесь метода) обобщение теоремы об инцентрах.

[1] *Инцентром* треугольника называется центр его вписанной окружности.

Наш способ доказательства теоремы об инцентрах будет опираться на *алгебру комплексных чисел* и *символьные вычисления*. О применении комплексных чисел в планиметрии хорошо и давно известно (см., например, книги [2] и [4]). Поскольку придётся иметь дело с громоздкими буквенными выражениями, нам понадобится какая-нибудь *система компьютерной алгебры*, например `Maple` [8]. Как всё это работает, мы предварительно поясним на более простых примерах. Читатель должен уметь выполнять стандартные алгебраические операции над комплексными числами и понимать геометрический смысл этих операций.

Подчеркнём принципиальное отличие технических инструментов, которые можно применять для проверки геометрических гипотез. С помощью системы динамической геометрии мы можем доказательно опровергнуть гипотезу, выполнив все необходимые построения с достаточной точностью. Так, можно показать, что первые две гипотезы из [5] ошибочны: при варьировании соответствующих рисунков нетрудно обнаружить явные контрпримеры. Однако для строгого обоснования правдоподобной гипотезы приближённых построений, даже очень точных, недостаточно. Система компьютерной алгебры позволяет в определённом смысле осуществлять абсолютно точные геометрические построения, и у нас появляется шанс доказать гипотезу.

Разумеется, *автоматический метод* доказательства с его символьными вычислениями — не самый лучший способ обоснования геометрической гипотезы. Но что делать, когда по-другому не получается, а доказательно судить о гипотезе хочется. Гипотеза об инцентрах на данный момент имеет именно такой статус. Отметим, что некоторые гипотезы из [5] допускают чисто геометрическое обоснование, и заинтересованный читатель может попытаться найти что-то подобное и для гипотезы об инцентрах (по-видимому, разгадать загадку эллипса можно только геометрическими рассуждениями).

В конце статьи мы кратко обсудим ещё две гипотезы из [5], связанные с конструкцией хорошо известной *теоремы Морлея*. Автоматический метод проверки показывает, что эти гипотезы также верны, причём даже в более общем виде.

§ 2. Пара примеров, иллюстрирующих метод

Чтобы показать читателю, как работает автоматический метод, основанный на алгебре комплексных чисел, мы решим две относительно новых геометрических задачи[2)]. Первая из них предлагалась на региональном

[2)] На самом деле эти задачи просто первыми подвернулись под руку. Иллюстрировать метод можно задачами из довольно широкого класса, при этом, что интересно, метод нечувствителен к тому, насколько сложным может оказаться геометрическое решение задачи.

этапе XXXIX Всероссийской олимпиады школьников (задача 11.4), а вторая — это задача 5296, опубликованная в журнале «Математика в школе» (№ 2 за 2013 год).

Введём на плоскости систему декартовых координат. Если точка этой плоскости имеет координаты (a, b), то отождествим её с комплексным числом $a + bi$. Двумерный вектор (a, b) также отождествим с этим числом. Саму плоскость при этом будем называть *комплексной*, имея в виду такую интерпретацию точек и векторов.

Пусть $l(P, v)$ обозначает прямую, проходящую через точку P в направлении вектора v. Основная процедура в автоматическом методе — это вычисление точки пересечения Z прямых $l(P, v)$ и $l(Q, w)$ по формуле, которую читателю предлагается вывести самостоятельно:

$$Z = \frac{v(Q\overline{w} - \overline{Q}w) - w(P\overline{v} - \overline{P}v)}{v\overline{w} - \overline{v}w}$$

(здесь и далее черта сверху означает *комплексное сопряжение*).

Задача 1 (Ф. А. Ивлев). В окружность Ω вписан треугольник ABC. Пусть P и Q — середины двух дуг AC окружности Ω. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из точки Q на прямую AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника BMC, делит пополам отрезок BP.

Из формулировки задачи мы убрали несущественные для автоматического метода требования (типа остроугольности треугольника ABC), которые в некотором смысле необходимы при традиционном способе решения задачи.

Решение. Будем считать треугольник ABC расположенным на комплексной плоскости так, что Ω — это единичная окружность $|z| = 1$, причём $P = 1$. Положим

$$A = z_1, \quad B = z_2,$$

где z_1, z_2 — комплексные числа, для которых $|z_1| = |z_2| = 1$. Тогда

$$Q = -P = -1, \quad C = \overline{A} = \frac{1}{z_1},$$

а точку M можно получить как точку пересечения прямых $l(Q, (B - A)i)$ и $l(A, B - A)$:

$$M = \frac{z_1 z_2 + z_1 + z_2 - 1}{2}.$$

Вычислим центр O окружности ω, описанной около треугольника BMC, и середину L отрезка BP:

$$O = -\frac{z_2 - 1}{2(z_1 - 1)}, \quad L = \frac{z_2 + 1}{2}.$$

Достаточно убедиться, что $L \in \omega$, т. е. что $|OL|$ равно, например, $|OB|$. Рассмотрим число

$$w = \frac{L - O}{B - O} = \frac{z_1 z_2 + z_1 - 2}{2z_1 z_2 - z_2 - 1}$$

и покажем, что $|w| = 1$. В самом деле, имеем

$$\overline{w} = \frac{z_1^{-1} z_2^{-1} + z_1^{-1} - 2}{2z_1^{-1} z_2^{-1} - z_2^{-1} - 1} = \frac{1 + z_2 - 2z_1 z_2}{2 - z_1 - z_1 z_2} = \frac{1}{w},$$

что и требовалось. □

В этом примере все выкладки легко проделать вручную, но так бывает крайне редко: при автоматическом подходе обычно приходится иметь дело с громоздкими выражениями.

Задача 2 (С. С. Тасмуратов). В треугольнике ABC провели биссектрису CL, а в треугольники CAL и CBL вписали окружности, которые касаются прямой AB в точках M и N соответственно. Докажите равенство

$$\frac{2}{|CL|} = \frac{1}{|LN|} - \frac{1}{|AM|}.$$

Решение. Примем окружность, вписанную в треугольник CAL, за единичную; в частности, её центр $I = 0$. Пусть она касается сторон CA и CL в точках L_1 и A_1 соответственно. Положим

$$A_1 = z_1, \quad L_1 = z_2, \quad M = z_3,$$

где $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Тогда

$$A = \frac{2z_2 z_3}{z_2 + z_3}, \quad L = \frac{2z_1 z_3}{z_1 + z_3}, \quad C = \frac{2z_1 z_2}{z_1 + z_2}.$$

Для вычисления точки N сначала найдём центр J окружности, вписанной в треугольник CBL. Он может быть найден как точка пересечения прямых $l(L, (L - I)i)$ и $l(C, I' - C)$, где I' — точка, симметричная точке I относительно прямой CL. Получим

$$J = \frac{2z_1 z_3 (z_1^2 + z_1 z_2 - z_1 z_3 + z_2 z_3)}{(z_1 + z_3)(z_1^2 + z_2 z_3)}.$$

Теперь точку N можно найти как проекцию точки J на прямую AL:

$$N = \frac{z_1 z_3 (2z_1^2 + z_1 z_2 - z_1 z_3 + 3z_2 z_3 - z_3^2)}{(z_1 + z_3)(z_1^2 + z_2 z_3)}.$$

Из геометрических соображений треугольник $A_1 L_1 M$ всегда будет остроугольным. Если его считать *положительно ориентированным*, то будут справедливы равенства

$$|AM| = \frac{i(z_2 - z_3)}{z_2 + z_3}, \quad |CL| = -\frac{2iz_1(z_2 - z_3)}{(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)}$$

(доказательство оставляем читателю в качестве упражнения). Очевидно, равенство, которое требуется доказать в задаче, равносильно равенству

$$\left(\frac{1}{|AM|} + \frac{2}{|CL|}\right)^2 = \frac{1}{|LN|^2}. \tag{1}$$

Поскольку $|LN|^2 = (L - N)(\overline{L} - \overline{N})$, нам достаточно загрузить в (1) найденные выше выражения для $|AM|$, $|CL|$, L, N и затем убедиться, что получится тождество относительно z_1, z_2, z_3. Эту рутину, конечно, следует предоставить компьютеру. □

Мы привели примеры задач из класса планиметрических теорем так называемого *рационального типа*. Читатель, который хотел бы познакомиться с алгоритмическими аспектами данного подхода более детально, может посмотреть статью [3].

§ 3. Доказательство теоремы об инцентрах

Сначала поясним, зачем нужны комплексные числа, т. е. почему стандартный метод координат не приводит к успеху. Ведь первое, что приходит на ум, — это воспользоваться известными формулами для координат инцентра треугольника. Для инцентра I треугольника ABC они таковы:

$$I_x = \frac{|AB|C_x + |BC|A_x + |CA|B_x}{|AB| + |BC| + |CA|}, \quad I_y = \frac{|AB|C_y + |BC|A_y + |CA|B_y}{|AB| + |BC| + |CA|}$$

(A_x и A_y обозначают координаты точки A и т. д.). На первый взгляд применение этих формул кажется безобидным, но оптимизм поубавится, как только мы получим итоговые выражения для координат шести инцентров P_j — это довольно громоздкие *квадратные радикалы* (из-за расстояний $|AB|$ и т. п.), причём *вложенные* (потому что формулами нужно пользоваться дважды). Они останутся громоздкими даже тогда, когда мы, экономя на буквенных переменных, введём систему координат так, чтобы

$$A = (0, 0), \quad B = (1, 0).$$

Впрочем, надежда на успех ещё будет, поскольку возможности современных систем компьютерной алгебры действительно велики. Но не в нашей ситуации, когда нужно некий определитель (зависящий от координат точек P_j и составленный по аналогии с определителем (4), см. ниже) проверить на тождественное равенство нулю. Этот определитель оказывается «несъедобным» для `Maple` — при попытке его вычислить программа довольно быстро исчерпывает всю доступную память и зависает, не выдав никакого результата[3)].

Таким образом, задача состоит в том, чтобы предварительно представить координаты инцентров P_j в удобоваримом виде. Как кажется, комплексные числа — адекватный и, главное, общедоступный инструмент для решения этой задачи[4)].

Обозначим углы треугольника ABC через α, β, γ. Будем считать, что наш треугольник расположен на комплексной плоскости так, что

$$A = 0, \quad B = 1$$

(вещественную ось представим себе горизонтальной и идущей слева направо, мнимую ось — направленной вертикально вверх, точку C — лежащей в верхней полуплоскости).

Положим

$$a = \cos\frac{\alpha}{4} + i\sin\frac{\alpha}{4}, \quad b = \cos\frac{\beta}{4} + i\sin\frac{\beta}{4}, \quad c = \cos\frac{\gamma}{4} + i\sin\frac{\gamma}{4}.$$

Пусть также $\zeta = \cos 45^\circ + i\sin 45^\circ$ — число, для которого выполнено равенство

$$\zeta^4 + 1 = 0. \tag{2}$$

Числа a, b, c имеют простой геометрический смысл: они отвечают за повороты на четверть углов α, β, γ. Поскольку $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, справедливо тождество $abc = \zeta$. Используя наши стандартные обозначения для переменных, положим $a = z_1$, $b = z_2$. Тогда

$$c = \frac{\zeta}{z_1 z_2}.$$

Перейдём непосредственно к вычислениям. Точку C можно получить как точку пересечения прямых $l(A, a^4)$ и $l(B, b^{-4})$, а точку I — как точку

[3)] Так было у автора. Это, конечно, не означает, что у более искушённого в компьютерной алгебре читателя случится то же самое, если он захочет повторить подобный эксперимент. Возможно, при более грамотной эксплуатации `Maple` всё-таки справится с тем громоздким определителем, либо это сделает какая-нибудь другая система компьютерной алгебры. Но в любом случае придётся что-то придумывать — простой метод грубой силы не работает.

[4)] В общем случае для автоматического доказательства геометрических теорем можно привлечь «тяжёлую артиллерию коммутативной алгебры» (В. И. Арнольд), что обычно подразумевает применение различных алгоритмов для работы с *системами полиномиальных уравнений* (см., например, [6]).

пересечения прямых $l(A, a^2)$ и $l(B, b^{-2})$. Вычисления дают:

$$C = \frac{z_1^8(z_2^8 - 1)}{z_1^8 z_2^8 - 1}, \quad I = \frac{z_1^4(z_2^4 - 1)}{z_1^4 z_2^4 - 1}.$$

Далее рассмотрим, например, треугольник AB_1I. Как нетрудно увидеть,

$$\angle IAB_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad \angle AIB_1 = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Следовательно, инцентр P_1 треугольника AB_1I можно вычислить как точку пересечения прямых $l(A, (I - A)a)$ и $l(I, (A - I)a^{-1}b^{-1})$:

$$P_1 = \frac{z_1^6(z_2^4 - 1)}{(z_1^4 z_2^2 - 1)(z_1^2 z_2^2 + 1)}.$$

Аналогично инцентр P_2 треугольника A_1BI — это точка пересечения прямых $l(B, (I - B)b^{-1})$ и $l(I, (B - I)ab)$:

$$P_2 = \frac{z_1^2(z_2^2 - 1)(z_1^2 z_2^4 + z_1^2 z_2^2 + z_1^2 + z_2^2)}{(z_1^2 z_2^4 - 1)(z_1^2 z_2^2 + 1)}.$$

Далее находим

$$P_3 = l(B, (I - B)b) \cap l(I, (B - I)b^{-1}c^{-1}) = \frac{z_1^2(z_2^2 - 1)(z_1^4 z_2^2 - \zeta^2 z_1^2 z_2^4 - \zeta^2 z_1^2 z_2^2 + 1)}{(z_1^4 z_2^4 - 1)(z_1^2 - \zeta^2 z_2^2)}.$$

Здесь в итоговом выражении впервые появляется число ζ. В выражениях для инцентров

$$P_4 = l(C, (I - C)c^{-1}) \cap l(I, (C - I)bc),$$
$$P_5 = l(C, (I - C)c) \cap l(I, (C - I)a^{-1}c^{-1}),$$
$$P_6 = l(A, (I - A)a^{-1}) \cap l(I, (A - I)ac),$$

которые мы не приводим, оно также появится.

На декартовой плоскости с координатами (x, y) произвольную кривую второго порядка можно задать уравнением

$$kx^2 + lxy + my^2 + ux + vy + w = 0.$$

На комплексной плоскости можно использовать *комплексные координаты*

$$(z, \bar{z}) = (x + iy, x - iy),$$

в которых кривая второго порядка описывается уравнением

$$Kz^2 + Lz\bar{z} + M\bar{z}^2 + Uz + V\bar{z} + W = 0.$$

Таким образом, мы должны доказать существование *нетривиального* набора коэффициентов $K, L, \ldots, W$, для которых будут выполнены равенства

$$KP_j^2 + LP_j\overline{P_j} + M\overline{P_j}^2 + UP_j + V\overline{P_j} + W = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 6. \qquad (3)$$

Как известно (см., например, [1]), это равносильно тому, что *определитель*

$$\Delta(P_1, \ldots, P_6) = \det\bigl([P_j^2, P_j\overline{P_j}, \overline{P_j}^2, P_j, \overline{P_j}, 1]_{j=1}^6\bigr) \qquad (4)$$

системы линейных уравнений (3) с неизвестными $K, L, \ldots, W$ равен нулю.

Выражение для каждого из инцентров P_j имеет простую структуру — это рациональная дробь от z_1, z_2 и ζ. Выражение для $\overline{P_j}$ можно получить, если в выражении для P_j всюду заменить z_1 на z_1^{-1}, z_2 на z_2^{-1} и ζ на ζ^{-1}. Ясно, что при этом получится рациональная дробь такого же вида. Поэтому вычисление в `Maple` определителя (4) не может быть проблемой.

Действительно, `Maple` за несколько секунд раскрывает этот определитель, но вместо ожидаемого нуля мы видим весьма громоздкую рациональную дробь:

$$\Delta(P_1, \ldots, P_6) = \frac{f(z_1, z_2, \zeta)}{g(z_1, z_2, \zeta)}.$$

Однако ζ — не переменная, а фиксированное число, для которого имеет место равенство (2). И вот по модулю этого равенства вся дробь чудесным образом превращается в нуль:

$$\Delta(P_1, \ldots, P_6) = 0.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно $f(z_1, z_2, \zeta)$ поделить на $\zeta^4 + 1$ с остатком (как один многочлен делят с остатком на другой) и увидеть, что остаток нулевой.

Итак, доказано, что все шесть инцентров P_j лежат на одной кривой второго порядка. Как уже отмечалось, этой кривой будет эллипс. Для доказательства достаточно положить $W = 1$ и, вычислив коэффициенты K, L, M, убедиться в справедливости неравенства

$$L^2 - 4KM > 0.$$

Однако выражения для K, L, M оказываются слишком громоздкими, и на этом пути получить строгое доказательство было бы затруднительно.

§ 4. Полная теорема об инцентрах

В качестве своеобразной компенсации мы сформулируем более общий результат, включающий в себя теорему об инцентрах. Вместе с инцентрами P_j треугольников AB_1I, A_1BI, BC_1I, B_1CI, CA_1I, C_1AI будем рассматривать и центры окружностей, *вневписанных* в эти треугольники. Обозначим через P_j^X центр вневписанной в j-й треугольник окружности, лежащий против вершины X (например, $P_4^{B_1}$ — это центр вневписанной в треугольник B_1CI окружности, который расположен против вершины B_1). Точнее, нас будут интересовать шестёрки точек $(Q_1, \ldots, Q_6)$, где Q_j — это либо инцентр P_j, либо один из центров P_j^X. Одна из них, а именно $(P_1, \ldots, P_6)$, обладает тем свойством, что её точки принадлежат одной кривой второго порядка. Интересная особенность нашего доказательства этого факта состоит в том, что можно сразу предъявить ещё одну шестёрку точек с таким же свойством.

Действительно, во всех вычислениях с участием ζ важно было только то, что это число удовлетворяет равенству (2). Возьмём теперь

$$\zeta = \cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ).$$

Так как равенство (2) по-прежнему будет верным, то, например, выражение для точки пересечения

$$l(B, (I - B)b) \cap l(I, (B - I)b^{-1}c^{-1})$$

не изменится, но его *геометрический* смысл станет другим — вместо инцентра P_3 мы получим, как нетрудно видеть, центр P_3^B. Аналогично выражения, полученные ранее для инцентров P_4, P_5, P_6, теперь будут представлять центры $P_4^{B_1}$, $P_5^{A_1}$, P_6^A соответственно. Ясно, что буквенные выражения для определителей $\Delta(P_1, \ldots, P_6)$ и $\Delta(P_1, P_2, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^{A_1}, P_6^A)$ будут тождественно совпадать. Значит, если упрощение первого из них по модулю равенства (2) привело к нулю, то ровно то же случится и со вторым[5)]. Итак, мы даром получили, что все точки шестёрки

$$(P_1, P_2, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^{A_1}, P_6^A)$$

также лежат на одной кривой второго порядка. Но теперь, как видно из рисунков в `GeoGebra`, этой кривой может быть не только эллипс, но и гипербола.

Далее, хотя бы из спортивного интереса, можно отыскать все шестёрки $(Q_1, \ldots, Q_6)$ с этим свойством. Поскольку выражения для центров P_j^X ничем принципиально не отличаются от выражений для инцентров P_j (проверить это — очередное упражнение для читателя), вычисление любого

[5)] Эту важную идею *алгебраического сопряжения* лучше сначала продумать на следующем более простом примере: если выполняется равенство вида $(1 + \sqrt{2})^{2013} = r + s\sqrt{2}$, где r, s — рациональные числа, то справедливо и равенство $(1 - \sqrt{2})^{2013} = r - s\sqrt{2}$.

из определителей $\Delta(Q_1, \ldots, Q_6)$ будет не сложнее, чем вычисление определителя (4). Почему бы не применить полный компьютерный перебор?

Включаем компьютер и через некоторое время обнаруживаем в точности 32 шестёрки, для которых $\Delta(Q_1, \ldots, Q_6) = 0$. Вот их список:

$$\begin{array}{ll}
(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6), & (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5^I, P_6^I),\\
(P_1, P_2, P_3^I, P_4^I, P_5^I, P_6^I), & (P_1, P_2, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^C, P_6^{C_1}),\\
(P_1, P_2, P_3^{C_1}, P_4^C, P_5^C, P_6^{C_1}), & (P_1, P_2, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^{A_1}, P_6^A),\\
(P_1, P_2, P_3^{C_1}, P_4^C, P_5^{A_1}, P_6^A), & (P_1^I, P_2^I, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^C, P_6^{C_1}),\\
(P_1^I, P_2^I, P_3^B, P_4^{B_1}, P_5^{A_1}, P_6^A), & (P_1^I, P_2^I, P_3^{C_1}, P_4^C, P_5^{A_1}, P_6^A),\\
(P_1^I, P_2^I, P_3^{C_1}, P_4^C, P_5^C, P_6^{C_1}), & (P_1^I, P_2^I, P_3^I, P_4^I, P_5^I, P_6^I)
\end{array}$$

(здесь каждая шестёрка, за исключением первой и последней, имеет ещё по две аналогичных). Читатель в качестве развлечения может порисовать картинки в `GeoGebra` и поэкспериментировать с ними[6)].

§ 5. Две гипотезы о конструкции теоремы Морлея

Любому любителю геометрии, безусловно, хорошо знакома теорема Морлея: если в произвольном треугольнике ABC провести трисектрисы AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2, то точки пересечения пар трисектрис BB_1 и CC_2, CC_1 и AA_2, AA_1 и BB_2 образуют правильный треугольник.

Доказать эту теорему автоматическим методом не представляет никакого труда. Пусть, как и выше, α, β, γ — углы треугольника ABC. Положим

$$\begin{aligned}
a &= \cos\frac{\alpha}{3} + i\sin\frac{\alpha}{3} = z_1,\\
b &= \cos\frac{\beta}{3} + i\sin\frac{\beta}{3} = z_2,\\
c &= \cos\frac{\gamma}{3} + i\sin\frac{\gamma}{3} = \frac{\zeta}{z_1 z_2},
\end{aligned}$$

где $\zeta = \cos 60^\circ + i\sin 60^\circ$ — число, удовлетворяющее равенству

$$\zeta^2 - \zeta + 1 = 0. \tag{5}$$

Обозначим точки пересечения указанных пар трисектрис через X, Y, Z соответственно. Снова приняв $A = 0$, $B = 1$, мы вычислим точку C, а затем

[6)] Автор должен честно признаться, что не справился с таким количеством внезапно свалившихся на голову эллипсов и гипербол и не может предложить сколь-нибудь внятной их классификации.

точки Z, X, Y:

$$C = l(A, a^3) \cap l(B, b^{-3}) = \frac{z_1^6(z_2^6-1)}{z_1^6 z_2^6 - 1},$$

$$Z = l(A, a) \cap l(B, b^{-1}) = \frac{z_1^2(z_2^2-1)}{z_1^2 z_2^2 - 1},$$

$$X = l(B, b^{-2}) \cap l(C, (B-C)c^{-1}) = \frac{z_1^2(z_2^2-1)(z_1^2 z_2^2 + z_1^2 + \zeta - 1)}{(z_1^2 z_2^2 - 1)(z_1^2 z_2^2 + \zeta)},$$

$$Y = l(A, a^2) \cap l(C, (A-C)c) = \frac{z_1^4(z_2^2-1)(z_2^2+\zeta)}{(z_1^2 z_2^2 - 1)(z_1^2 z_2^2 + \zeta)}.$$

Теперь достаточно убедиться в верности равенства

$$Y - Z = \zeta(X - Z)$$

при условии (5). И оно, разумеется, оказывается верным.

Ничуть не сложнее доказать и следующие две гипотезы из [5]. Первая из них утверждает, что основания трисектрис A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одном эллипсе. Во второй гипотезе это же утверждается относительно точек пересечения пар трисектрис AA_1 и BB_1, CC_2 и AA_2, BB_1 и CC_1, AA_2 и BB_2, CC_1 и AA_1, BB_2 и CC_2 (обозначим эти точки X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 соответственно). Представив каждую из точек $A_1, \ldots, Z_2$ рациональной дробью от z_1, z_2 и ζ, мы затем автоматически обнаружим, что

$$\Delta(A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2) = \Delta(X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2) = 0.$$

На самом деле утверждения этих гипотез справедливы для произвольных чевиан AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2, удовлетворяющих условиям

$$\angle CAA_2 = \angle BAA_1, \quad \angle ABB_2 = \angle CBB_1, \quad \angle BCC_2 = \angle ACC_1.$$

Как ни странно, автоматическая проверка (она предоставляется читателю в качестве заключительного упражнения) здесь даже логически проще, чем в частном случае трисектрис.

Список литературы

[1] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.

[2] *Моденов П. С.* Задачи по геометрии. М.: Наука, 1979.

[3] *Осипов Н. Н.* О механическом доказательстве планиметрических теорем рационального типа // Программирование. 2014. № 2. (В печати.)

[4] *Понарин Я. П.* Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. М.: МЦНМО, 2014.

[5] *Штейнгарц Л. А.* Орбиты Жукова и теорема Морлея // Математика в школе. 2012. № 6. С. 53–61.

[6] *Chou S.-C.* Mechanical geometry theorem proving. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1988.

[7] `http://www.geogebra.org`.

[8] `http://www.maplesoft.com`.

Н. Н. Осипов, Сибирский федеральный университет (Красноярск)
nnosipov@rambler.ru