Об одной задаче о биссектрисах и точках Брокара

В. М. Журавлёв, П. И. Самовол

Введение

Без преувеличения можно сказать, что о равнобедренном треугольнике знает каждый школьник, посетивший несколько уроков геометрии. В самом начале изучения геометрии в школе доказывают теоремы о том, что если треугольник равнобедренный, то у него равны соответствующие углы, медианы, биссектрисы и высоты. Верны и обратные утверждения, а именно: если у треугольника два угла или две медианы (высоты, биссектрисы) равны, то этот треугольник равнобедренный. В популярной литературе по геометрии случаю равенства биссектрис уделено особое внимание, и этот случай называется теоремой Штейнера — Лемуса. По аналогии мы готовы предположить, что если в треугольнике взять два других однотипных элемента, то из их равенства будет следовать равнобедренность исходного треугольника.

Возьмём произвольный треугольник и рассмотрим в нём треугольники, образованные основаниями медиан, высот или биссектрис. Нетрудно доказать, что в равнобедренном треугольнике основания медиан, высот или биссектрис также образуют равнобедренный треугольник. Интуитивно мы ожидаем, что если рассмотреть обратные утверждения, то они также окажутся верными. Проверка для случая медиан и высот подтверждает этот факт. Тем поразительнее кажется задача, придуманная И. Ф. Шарыгиным, о том, что существуют разносторонние треугольники такие, что треугольники, образованные основаниями их биссектрис, являются равнобедренными.

На уроках геометрии в школе не дают определение антибиссектрис, хотя это понятие достаточно давно изучается и используется. В рамках этой небольшой статьи мы хотим посмотреть на равнобедренность треугольника через изучение его антибиссектрис. Дополнительно мы также рассмотрим случаи чевианных треугольников точек Брокара. Надеемся, что приведённые примеры убедят читателей, что даже такой простой объект, как равнобедренный треугольник, может преподнести ещё немало сюрпризов.

I

Совсем недавно авторы с интересом ознакомились с книгой по геометрии, изданной в начале прошлого века. В другое время, чтобы прочитать эту книгу, авторам пришлось бы поискать её раритетный экземпляр в библиотеке или ждать её появления в антикварном магазине. В веке нынешнем возможность знакомства с книгой, пусть и изданной более ста лет назад, предоставляет Интернет. В данном случае речь идёт о книге Д. Ефремова «Новая геометрия треугольника», которая была издана в Одессе в 1902 году. Книга настолько понравилась авторам, что некоторые определения, возникающие в этой статье, мы позаимствуем из неё.

В предисловии мы уже упомянули термин «антибиссектрисы». Хотя антибиссектрисы не изучаются в школьном курсе геометрии, некоторые их свойства аналогичны свойствам медиан или биссектрис. Таким образом, изучение школьниками свойств антибиссектрис вполне доступно на занятиях кружков по математике или факультативах.

Итак, введём необходимые нам определения.

Две точки на стороне треугольника, равноотстоящие от середины этой стороны, называются *изотомическими* точками. Две прямые, соединяющие вершину треугольника с изотомическими точками противоположной стороны, называются *изотомическими прямыми* треугольника.

Упражнение 1 (см. [2]). На сторонах BC, AC, AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 соответственно, причём прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Докажите, что изотомические с ними прямые AA_2, BB_2, CC_2 также пересекаются в одной точке.

Для школьников, изучавших теорему Чевы, доказательство этого упражнения не составит труда.

Прямые, изотомические с внутренними или внешними биссектрисами треугольника, называются внутренними или внешними *антибиссектрисами* этого треугольника.

Из нашего упражнения мы сразу же получаем следствие. Поскольку биссектрисы пересекаются в одной точке, внутренние антибиссектрисы также пересекаются в одной точке.

Точка пересечения трёх антибиссектрис треугольника называется *центром антибиссектрис*. Треугольник имеет четыре центра антибиссектрис: один внутренний и три внешних.

В дальнейшем для упрощения изложения мы будем рассматривать только внутренние антибиссектрисы, при этом будем называть их просто антибиссектрисами, опуская слово внутренние.

Мы знаем, что биссектриса делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. Следовательно, решение следующего упражнения практически немедленно вытекает из определения антибиссектрис.

Упражнение 2. Пусть антибиссектриса, выходящая из вершины B треугольника ABC, пересекает AC в точке K. Доказать, что $\frac{AK}{KC} = \frac{BC}{AB}$.

Вернёмся к равнобедренным треугольникам.

Теорема 1. *Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда две его антибиссектрисы равны.*

Как видим, в данном случае свойства антибиссектрис аналогичны свойствам медиан и биссектрис.

Мы уже упоминали о теореме Штейнера — Лемуса, доказывающей, что из равенства двух биссектрис следует равнобедренность треугольника. Цитируемость этой теоремы в популярной литературе связана с тем, что изначально было известно только алгебраическое доказательство этого факта, и только позднее были найдены геометрические доказательства.

Что касается нашей теоремы 1, то можно найти несколько не слишком сложных геометрических доказательств «необходимости», а именно: если треугольник равнобедренный, то его антибиссектрисы равны. Однако открытым вопросом остаётся поиск геометрического доказательства «достаточности», а именно: если две антибиссектрисы треугольника равны, то треугольник равнобедренный. В данном случае авторы хотят предложить алгебраическое доказательство «достаточности».

Для упрощения записи используем общепринятые обозначения. Пусть a, b, c обозначают длины сторон треугольника. Через k_a, k_b, k_c обозначим длины антибиссектрис, проведённых к сторонам a, b, c соответственно. Нам понадобится несколько промежуточных результатов, которые мы сформулируем в виде упражнений.

Упражнение 3. Докажите, что квадрат длины антибиссектрисы можно найти по формуле

$$k_a^2 = b^2 + c^2 - bc - \frac{a^2 bc}{(b+c)^2} = (b+c)^2 - bc\left(3 + \frac{a^2}{(b+c)^2}\right).$$

Нам известно несколько доказательств этого утверждения с использованием теоремы косинусов или формулы Стюарта. Надеемся, что читатели докажут этот факт самостоятельно.

Сейчас мы сформулируем и докажем более общий факт, из которого будет следовать доказательство «достаточности» теоремы 1.

Упражнение 4. Если $a \geqslant b \geqslant c$, то $k_a \leqslant k_b \leqslant k_c$.

Доказательство. Пусть $a \geqslant b$, тогда из упражнения 3 следует

$$k_b^2 - k_a^2 = a^2 + c^2 - ac - \frac{b^2ac}{(a+c)^2} - b^2 - c^2 + bc + \frac{a^2bc}{(b+c)^2} =$$
$$= (a-b)(a+b-c) + abc\Big(\frac{a}{(b+c)^2} - \frac{b}{(a+c)^2}\Big) \geqslant 0.$$

Значит, $k_a \leqslant k_b$. Аналогично доказываем оставшиеся неравенства. □

Итак, бóльшая антибиссектриса проведена к меньшей стороне.

Теперь ясно, что если две антибиссектрисы равны, то треугольник равнобедренный. Тем самым алгебраическое доказательство «достаточности» в теореме 1 завершено.

II

Рассмотрим теперь треугольник, образованный основаниями антибиссектрис.

Упражнение 5. Докажите, что треугольник, образованный основаниями антибиссектрис равнобедренного треугольника, также является равнобедренным.

Мы не будем останавливаться на решении этого упражнения, поскольку, как нам кажется, оно имеет массу различных геометрических решений, которые могут быть легко найдены школьниками.

Нас интересует обратная задача. В этой связи напомним упоминавшуюся задачу, придуманную И. Ф. Шарыгиным.

Упражнение 6 (см. [7, стр. 154, 158–159, задача 58]). Про данный треугольник известно, что треугольник, образованный основаниями его биссектрис, является равнобедренным. Будет ли верным утверждение, что и данный треугольник является равнобедренным?

Эта задача была опубликована в 1982 году. Несмотря на простоту формулировки, при попытке её решения обнаруживаются подводные камни. Для иллюстрации мы приведём цитату И. Шарыгина из его статьи [8]: «Пусть A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис треугольника ABC. Если $A_1B_1 = A_1C_1$, а треугольник ABC — не равнобедренный, то его угол A тупой и $\cos A$ лежит в интервале $\Big(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{17}-5}{4}\Big)$... К сожалению, автор не сумел построить конкретный пример треугольника (то есть точно указать величины всех его углов или длины сторон) со столь экзотическим свойством. Может быть, это удастся читателям журнала?»

Первый известный нам пример такого треугольника с указанием величин всех его углов был построен в [6]. Последующие публикации на эту тему появились только в начале этого века.

Упражнение 7 (С. Токарев, XXVII турнир городов). Дан треугольник ABC, в котором проведены биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1. Известно, что величины углов A, B и C относятся как $4:2:1$. Докажите, что $A_1B_1 = A_1C_1$.

Нам известно три различных опубликованных геометрических решения упражнения 7 (см. [3, 5, 9]), в [5] с применением тригонометрии. Конечно, существуют и другие примеры, хотя и не столь изящные.

Сделаем небольшую обобщающую ремарку.

Вообще говоря, если мы рассматриваем три прямые, проходящие через вершины треугольника и пересекающиеся в одной точке внутри треугольника, то для таких прямых выполняется теорема Чевы. Поэтому треугольник, образованный основаниями этих прямых, называется чевианным треугольником точки пересечения этих прямых. Так, например, чевианный треугольник точки пересечения медиан является треугольником образованным средними линиями исходного треугольника.

Как мы уже отмечали, если треугольник, образованный основаниями медиан или высот, равнобедренный, то и исходный треугольник равнобедренный. С другой стороны, если чевианный треугольник точки пересечения биссектрис (центра вписанной окружности) равнобедренный, то необязательно исходный треугольник является равнобедренным.

Исследование этого вопроса для случая антибиссектрис даёт нам вполне однозначный ответ. Антибиссектрисы не дают нам контрпримеров, и с учётом упражнения 5 верна следующая теорема.

Теорема 2. *Треугольник является равнобедренным тогда и только тогда, когда треугольник, образованный основаниями его антибиссектрис, также равнобедренный.*

Доказательство. Мы уже обсудили, что доказательство «необходимости» составляет суть упражнения 5, которое мы оставляем читателям.

Остаётся предложить алгебраическое доказательство «достаточности», а именно: если треугольник, образованный основаниями антибиссектрис, равнобедренный, то и исходный треугольник равнобедренный.

Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, а α, β, γ — противолежащие углы, A, B, C — соответствующие вершины, A_1, B_1, C_1 — основания антибиссектрис.

Предположим, что $A_1C_1 = A_1B_1$.

Из упражнения 2 следует, что

$$BA_1 = \frac{ab}{b+c}, \quad CA_1 = \frac{ac}{b+c}, \quad BC_1 = \frac{cb}{a+b}, \quad CB_1 = \frac{bc}{a+c}.$$

Применим теорему косинусов к треугольникам A_1BC_1 и A_1B_1C. Учтём, что $A_1C_1 = A_1B_1$, получим

$$\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a+b}\right)^2-2\frac{ab}{b+c}\frac{bc}{a+b}\cos\beta=\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2-2\frac{ac}{b+c}\frac{bc}{a+c}\cos\gamma.$$

Применим теорему косинусов к исходному треугольнику ABC. Имеем

$$2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2 \quad \text{и} \quad 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2.$$

Сделаем подстановку и получим

$$\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a+b}\right)^2-\frac{b^2(a^2+c^2-b^2)}{(b+c)(a+b)}=\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2-\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{(b+c)(a+c)}.$$

Теперь нам следует перенести слагаемые в одну часть уравнения (например, левую), привести к общему знаменателю, разложить числитель на множители и приравнять его к нулю. Поскольку эти выкладки носят громоздкий, технический характер, их опустим и приведём лишь разложение числителя на множители. В настоящее время такие выкладки можно провести не только исписав несколько листов бумаги, но также применив онлайн калькуляторы. Итак, мы получаем равенство

$$\begin{gathered}a(b-c)(b+c)(a^5+a^4b+a^2b^3+ab^4+a^4c+a^3bc+a^2b^2c+3ab^3c+2b^4c+\\+a^2bc^2+4ab^2c^2+2b^3c^2+a^2c^3+3abc^3+2b^2c^3+a^2b^2c+ac^4+2bc^4)=0,\end{gathered}$$

возможное только при $b = c$. Следовательно, исходный треугольник является равнобедренным.

Тем самым теорема 2 доказана. □

Фактически мы получаем неисчерпаемый материал для исследования ситуаций, когда из равнобедренности чевианного треугольника следует равнобедренность исходного треугольника. Конечно, в данном случае необходимо рассматривать не произвольные точки, а так называемые «центры» треугольника. С энциклопедией центров треугольника Кларка Кимберлинга можно ознакомиться на сайте

`http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`.

В настоящее время она насчитывает более 5000 центров треугольника.

Результаты по чевианным треугольникам точек Жергонна, Нагеля и Лемуана можно найти в [10]. Здесь мы сообщим, что из равнобедренности чевианного треугольника точки Жергонна или точки Нагеля следует равнобедренность исходного треугольника. В случае равнобедренности чевианного треугольника точки Лемуана удаётся построить контрпример, т. е. существует разносторонний треугольник, у которого чевианный треугольник точки Лемуана является равнобедренным.

В заключение мы рассмотрим эту задачу для чевианного треугольника точек Брокара.

III

Напомним определение. Точки P и Q, лежащие внутри треугольника ABC, называются *первой и второй точкой Брокара*, если выполнены равенства $\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$ и $\angle QAB = \angle QCA = \angle QBC$ соответственно (см. рис. 1).

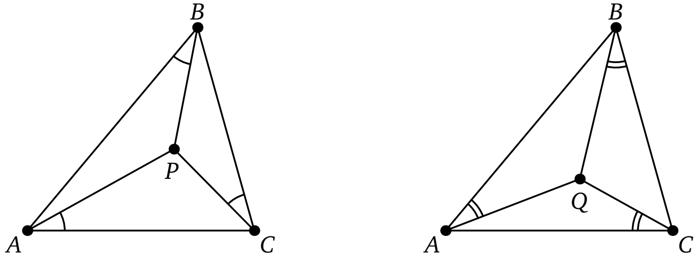

Рис. 1

Упражнение 8. Пусть чевиана, выходящая из вершины B и проходящая через первую точку Брокара P треугольника ABC, пересекает AC в точке B_1 (см. рис. 2). Длины сторон треугольника ABC равны a, b, c. Найдите CB_1.

Несмотря на простоту формулировки, найти ответ на поставленный вопрос не так-то легко. При этом использовать определение точек Брокара не вполне удаётся. Всё встаёт на свои места, как только мы сделаем дополнительные построения.

Решение. Пусть $CB_1 = x$.

Построим на сторонах треугольника ABC во внешние стороны треугольники, подобные исходному, так что

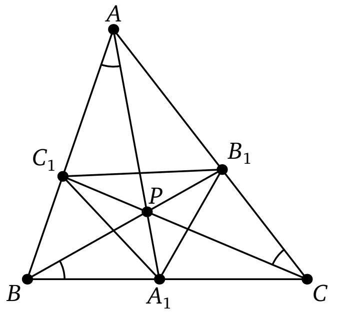

Рис. 2

$$\triangle ABC \sim \triangle B_2CA \sim \triangle BCA_2 \sim \triangle BC_2A,$$

при этом $BC \parallel AB_2$, $AB \parallel A_2C$, $AC \parallel BC_2$ (см. рис. 3).

Тогда имеем $\dfrac{AB_2}{AC} = \dfrac{AC}{BC}$, следовательно, $AB_2 = \dfrac{b^2}{a}$.

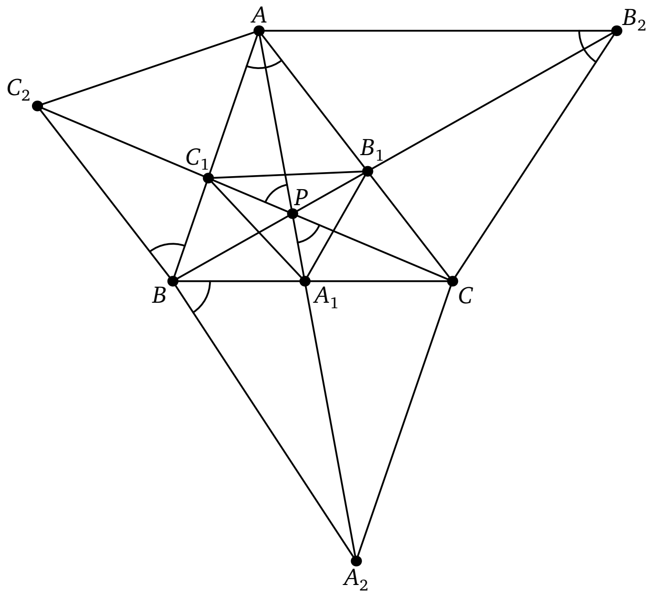

Рис. 3

При таком построении также получаем, что $\triangle AB_2B_1 \sim \triangle CBB_1$ (см. [1], [4, стр. 50–51]). Тогда $\dfrac{AB_2}{BC} = \dfrac{AB_1}{B_1C}$, следовательно, $\dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{b-x}{x}$. В итоге

$$CB_1 = x = \frac{a^2b}{a^2+b^2} \quad \text{и} \quad AB_1 = b - x = \frac{b^3}{a^2+b^2}.$$

Рассматривая другие пары подобных треугольников, найдём, что

$$AC_1 = \frac{cb^2}{b^2+c^2}, \quad C_1B = \frac{c^3}{b^2+c^2}, \quad A_1B = \frac{ac^2}{a^2+c^2}, \quad CA_1 = \frac{a^3}{a^2+c^2},$$

где точки A_1 и C_1 определены аналогично B_1. Построим чевианный треугольник первой точки Брокара P. Посмотрим, при каких условиях он может быть равнобедренным (см. рис. 3).

Используем метод, который мы уже применяли в теореме 2.

Применим теорему косинусов к исходному треугольнику ABC. Имеем

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \quad \text{и} \quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Применяя теорему косинусов к треугольникам A_1B_1C, A_1BC_1 и AB_1C_1, найдём

$$A_1B_1^2 = \left(\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{a^3}{a^2+c^2}\right)^2 - 2\frac{a^2b}{a^2+b^2}\cdot\frac{a^3}{a^2+c^2}\cos\gamma =$$

$$= \left(\frac{a^2 b}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{a^3}{a^2+c^2}\right)^2 - \frac{a^4(a^2+b^2-c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}.$$

Аналогично

$$A_1C_1^2 = \left(\frac{c^3}{b^2+c^2}\right)^2 + \left(\frac{ac^2}{a^2+c^2}\right)^2 - \frac{c^4(a^2+c^2-b^2)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)},$$

$$B_1C_1^2 = \left(\frac{b^3}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{cb^2}{b^2+c^2}\right)^2 - \frac{b^4(b^2+c^2-a^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}.$$

Если исходный треугольник ABC равносторонний, т. е. $a=b=c$, то первая и вторая точки Брокара совпадают с центром треугольника и очевидно, что их чевианный треугольник правильный.

Для простоты изложения в дальнейших рассуждениях будем считать, что треугольник ABC не является равносторонним.

Предположим, что чевианный треугольник первой точки Брокара P является равнобедренным.

Рассмотрим случай, когда $A_1B_1 = A_1C_1$. Получаем

$$\left(\frac{a^2 b}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{a^3}{a^2+c^2}\right)^2 - \frac{a^4(a^2+b^2-c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} = \\ = \left(\frac{c^3}{b^2+c^2}\right)^2 + \left(\frac{ac^2}{a^2+c^2}\right)^2 - \frac{c^4(a^2+c^2-b^2)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}.$$

Теперь нам следует перенести слагаемые в одну часть уравнения, привести к общему знаменателю, разложить числитель на множители и приравнять его к нулю. Если проделать эти вычисления, то в числителе мы получим выражение

$$b^2(a^2+c^2)\big(-a^6b^4+a^2b^6c^2-2a^6b^2c^2-a^4b^2c^4+3a^2b^4c^4-2a^6c^4+b^6c^4+a^2b^2c^6\big).$$

Введём обозначение для множителя, являющегося многочленом от трёх переменных

$$F(a,b,c) = -a^6b^4+a^2b^6c^2-2a^6b^2c^2-a^4b^2c^4+3a^2b^4c^4-2a^6c^4+b^6c^4+a^2b^2c^6.$$

Если

$$A_1B_1 = A_1C_1,$$

то

$$F(a,b,c) = -a^6b^4+a^2b^6c^2-2a^6b^2c^2-a^4b^2c^4+3a^2b^4c^4-2a^6c^4+b^6c^4+a^2b^2c^6 = 0.$$

Для случаев $A_1B_1 = B_1C_1$ и $B_1C_1 = A_1C_1$ мы получим аналогичные соотношения, отличающиеся лишь циклической перестановкой переменных.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3 (1). *Чевианный треугольник первой точки Брокара является равнобедренным, если стороны треугольника удовлетворяют одному из трёх соотношений:*

$$F(a, b, c) = 0, \quad F(b, c, a) = 0, \quad F(c, a, b) = 0.$$

Более того, можно убедиться, что в равнобедренном треугольнике, который не является равносторонним, чевианные треугольники его точек Брокара *не являются* равнобедренными.

Упражнение 9. Докажите, что если $b = c \neq a$, то

$$A_1B_1 \neq A_1C_1, \quad A_1B_1 \neq A_1C_1, \quad A_1B_1 \neq A_1C_1.$$

Для решения упражнения достаточно повторить доказательство теоремы 3, рассмотрев соответствующие разности квадратов сторон чевианного треугольника точки Брокара. Необходимые вычисления можно провести, используя рис. 4 к упражнению 10.

Приведём пример разностороннего треугольника, у которого чевианный треугольник первой точки Брокара является равнобедренным. Для этого в соотношении $F(a, b, c) = 0$ достаточно положить $b = 2$ и $c = 1$. Чтобы найти a, необходимо решить уравнение $13a^6 + 2a^4 - 58a^2 - 32 = 0$. С помощью замены переменной оно сводится к кубическому уравнению, которое можно решить, используя формулы Кардано. Нетрудно проверить, что оно имеет положительный действительный корень $a \approx 1{,}5094556$. При этом неравенства треугольника будут выполнены.

Рассуждения, которые мы проводили для первой точки Брокара, можно проделать и для второй точки Брокара. Аналогично мы можем построить на сторонах треугольника ABC во внешние стороны треугольники, подобные исходному, так что

$$\triangle ABC \sim \triangle CAB_4 \sim \triangle C_4AB \sim \triangle CA_4B,$$

при этом $BC \parallel AC_4$, $AB \parallel CB_4$, $AC \parallel BA_4$. Надеемся, что читатель самостоятельно нарисует соответствующий рисунок при таком описании. Тогда точка Q будет общей точкой пересечения прямых AA_4, BB_4и CC_4 с чевианным треугольником $A_3B_3C_3$. Проделав аналогичные вычисления, найдём длины отрезков

$$AB_3 = \frac{bc^2}{b^2 + c^2}, \quad CB_3 = \frac{b^3}{b^2 + c^2}, \quad AC_3 = \frac{c^3}{a^2 + c^2},$$
$$C_3B = \frac{ca^2}{a^2 + c^2}, \quad A_3B = \frac{a^3}{a^2 + b^2}, \quad CA_3 = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Если мы потребуем, чтобы чевианный треугольник второй точки Брокара был равнобедренным, то придём к соотношениям, которые аналогичны соотношениям из теоремы 3(1), они отличаются только порядком переменных.

Теорема 3 (2). *Чевианный треугольник второй точки Брокара является равнобедренным, если стороны треугольника удовлетворяют одному из трёх соотношений:*

$$F(a,c,b)=0, \quad F(b,a,c)=0, \quad F(c,b,a)=0.$$

Возникает естественный

Вопрос: *если чевианный треугольник первой точки Брокара равнобедренный, то будет ли равнобедренным чевианный треугольник второй точки Брокара*?

Ответ на этот вопрос отрицательный.

При решении соответствующей системы из двух соотношений мы получим, что решение возможно, только если обе точки Брокара совпадают, и мы получаем, что исходный треугольник является равносторонним.

Действительно, предположим, что выполнено

$$\begin{cases} F(a,b,c)=0, \\ F(a,c,b)=0. \end{cases}$$

Тогда

$$0=F(a,b,c)-F(a,c,b)=(b^2-c^2)(a^6b^2+a^6c^2+a^4b^2c^2+b^4c^4).$$

Значит, $b=c$ и из $F(a,b,b)=0$ следует, что $a=b=c$.

Поскольку

$$F(a,b,c)-F(b,a,c)=(b^2-a^2)(a^4b^4+3a^4b^2c^2+3a^2b^4c^2+3a^4c^4+7a^2b^2c^4+3b^4c^4)$$

и

$$F(a,b,c)-F(c,b,a)=(c^2-a^2)(b^2+c^2)(a^2+b^2)(a^2b^2+2a^2c^2+b^2c^2),$$

в оставшихся случаях мы получим тот же результат.

Мы видим, что при исследовании равнобедренности чевианных треугольников точек Брокара мы получаем ситуацию, существенно отличающуюся от известных нам ранее. По всей видимости, это связано с тем, что точки Брокара зависят от вершин «несимметрично». С другой стороны, определение середины отрезка между точками Брокара более симметрично. И ситуация «исправляется», если мы рассмотрим чевианный треугольник точки, являющейся серединой отрезка, соединяющего первую и вторую точки Брокара.

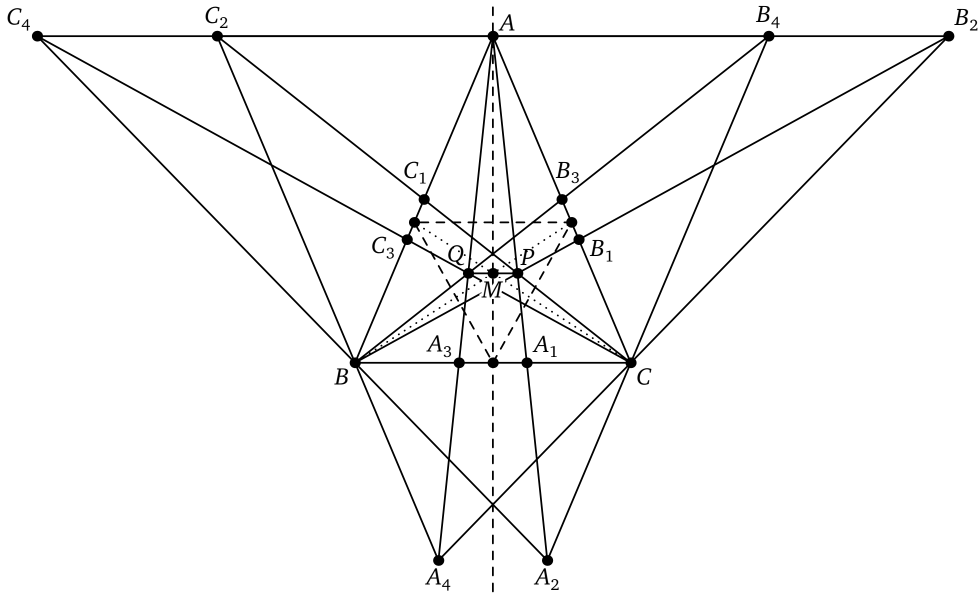

Рис. 4

Упражнение 10. Докажите, что в равнобедренном треугольнике чевианный треугольник середины отрезка, соединяющего первую и вторую точки Брокара, является равнобедренным.

Решение. Поскольку исходный треугольник равнобедренный (рис. 4), его первая и вторая точки Брокара симметричны относительно оси симметрии. Следовательно, точка M, являющаяся серединой отрезка, соединяющего первую и вторую точки Брокара, будет лежать на этой оси. Тогда, в силу симметрии, чевианный треугольник точки M будет равнобедренным.

Для самостоятельного исследования предлагаем читателям следующую задачу.

Задача для исследования. Про треугольник известно, что в нём чевианный треугольник точки, являющейся серединой отрезка, соединяющего первую и вторую точки Брокара, является равнобедренным. Верно ли, что данный треугольник также равнобедренный?

Список литературы

[1] *Акопян А. В., Заславский А. А.* Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.

[2] *Ефремов Д.* Новая геометрия треугольника. Одесса, 1902.

[3] Квант. № 6, 2006, решение M2001.

[4] *Прасолов В. В.* Точки Брокара и изогональное сопряжение. Сер. «Библиотека „Математическое просвещение“». Вып. 4. М.: МЦНМО, 2012.

[5] *Челябов И. М., Бакмаев Ш. А.* Вариации на тему «Треугольник Шарыгина» // Математика в школе. 2006. № 10, С. 66–68.

[6] *Челябов И. М.* О некоторых геометрических задачах // Вестник Дагестанского государственного университета. Естественные науки. Вып. 4. Махачкала: ИПЦ ДГУ, 1999.

[7] *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия // Библиотечка Квант. № 17, 1982.

[8] *Шарыгин И. Ф.* Вокруг биссектрисы // Квант. № 8, 1983.

[9] Mathematics Competitions. 2006. V. 19, № 1. P. 46.

[10] *Zhuravlev V., Samovol P.* Counterexamples for Cevian Triangles // Mathematics Competitions. 2013. V. 26, № 2.

[11] `http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html`.

В. М. Журавлёв, ОАО «Туполев», Москва, Россия
`zhuravlevvm@mail.ru`

П. И. Самовол, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva, Israel
`pet12@012.net.il`