Задачник

Условия задач

В этом разделе вниманию читателей предлагается подборка задач разной степени сложности, в основном трудных. Надеемся, что эти задачи окажутся интересными как для сильных школьников, интересующихся математикой, так и для студентов-математиков.

Мы обращаемся с просьбой ко всем читателям, имеющим собственные подборки таких задач, присылать их в редакцию. И, разумеется, мы с удовольствием будем публиковать свежие авторские задачи.

В скобках после условия задачи приводится фамилия автора (уточнения со стороны читателей приветствуются).

1. На плоскости начерчен угол величиной в n градусов, где n, $n < 180$, — натуральное число.

   а) Для каких n этот угол можно разделить с помощью циркуля и линейки на n равных углов?

   б) Пусть m — произвольное натуральное число. Для каких n данный угол можно разделить с помощью циркуля и линейки на m равных углов?

   в) Пусть m и n — натуральные взаимно простые числа, причём $m/n<180$, и k — ещё одно натуральное число. На плоскости начерчен угол величиной в m/n градусов. Для каких k данный угол можно разделить с помощью циркуля и линейки на k равных углов? (*Г. А. Гальперин*)

2. Последовательность функций задана следующим образом:

$$Q_1(x) = x, \quad Q_{n+1}(x) = \frac{Q_n(x+1)}{Q_n(x)}.$$

Пусть
$$Q_n(x)-1=\frac{A(x)}{B(x)},$$
где $A(x)$, $B(x)$ — многочлены. Найдите отношение старших членов этих многочленов. (*А. А. Шапиро*)

3. а) Пусть П — d-мерный параллелепипед. Найдите сумму количеств граней параллелепипеда П всех возможных размерностей:
$$(\text{число вершин}) + (\text{число рёбер}) + (\text{число двумерных граней}) +$$
$$+ (\text{число трёхмерных граней}) + \ldots + (\text{число } (d-1)\text{-мерных граней}).$$
Ответ дайте в замкнутой форме (без знаков суммирования, индексов и т. п.).
б) d-Мерный параллелепипед П («дом») с размерами $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \times \ldots \times n_d$ разделён гиперплоскостями, параллельными его рёбрам, на единичные кубики («*квартиры*»). У каждой квартиры имеются вершины, одномерные рёбра, а также грани всех остальных размерностей, начиная с двумерных и кончая $(d-1)$-мерными, — назовём их все «стенками» (размерностей $k=0,1,2,\ldots,d-1$). Стенка, общая для двух или большего числа квартир, считается за одну. Найдите сумму количеств всех стенок у всех квартир дома П. Ответ дайте в замкнутой форме (без знаков суммирования, индексов и т. п.). (*Г. А. Гальперин*)

4. Даны положительные числа $x_1,\ldots,x_n$; a — их среднее арифметическое, b — их среднее геометрическое. Обозначим через M_3 среднее арифметическое их кубических корней, через D_1 — средний квадрат уклонения чисел x_i от a, т. е.
$$D_1=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a)^2}{n},$$
и через D_3 — средний квадрат уклонения кубических корней чисел x_i от M_3, т. е.
$$D_3=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i^{1/3}-M_3)^2}{n}.$$
Докажите неравенства:

а) $$\frac{n\cdot D_1}{n-1}\leqslant a-b\leqslant n\cdot D_1;$$

б) $$\left(\frac{n}{n-1}\right)^2\leqslant a-b\leqslant\frac{n^2}{n-1}\cdot M_3\cdot D_3\quad\text{при } n\geqslant 3.$$

(*А. Д. Беренштейн*)

5. Дано выпуклое тело T в пространстве и точка M внутри него. Докажите, что найдётся плоское сечение T, для которого M есть центр тяжести. (*М. Л. Концевич*)

6. Город имеет форму квадрата, разделённого на n^2 квадратных кварталов. Улицы (двусторонние) идут между кварталами от одного края города к другому, и вокруг города идёт односторонняя улица. Велосипедист едет по городу, соблюдая правила уличного движения, то есть едет по правой стороне улицы, и на перекрёстках не поворачивает налево (на внешней односторонней улице он может ехать только так, что дома находятся справа от него). При каких n можно утверждать, что велосипедист может объехать весь город, побывав на каждой стороне каждой улицы по одному разу (на внешней улице — на её единственной стороне)? Постарайтесь найти возможно более широкий класс таких n. (*Фольклор*)

7. Пусть $P(x) \neq \mathrm{const}$ — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида $4k+1$, делящих его значение в целой точке. (*И. И. Богданов*)

8. На полке в некотором порядке стоят тома, пронумерованные числами от 1 до n. Библиотекарь берёт том, стоящий не на своём месте, и ставит его на правильное место; при этом некоторые тома сдвигаются.
   а) Докажите, что процесс перестановки томов остановится. (*Фольклор*)
   б) Постарайтесь получить оценку на число шагов этого процесса, например полиномиальную. (*А. Я. Белов*)

9 (Задача на исследование).
   а) Из бесконечно тонкой проволоки спаяли каркас многогранника M, который считается жёстким (хотя и сделан из бесконечно тонкой проволоки). Существует ли прорезь на плоскости α, через которую этот многогранник можно протащить насквозь? (Плоскость не должна распадаться на части. «*Протащить насквозь*» означает переместить многогранник из верхнего полупространства в нижнее непрерывным движением так, чтобы в каждый момент времени пересечение $M \cap \alpha$ содержалось внутри прорези.) Рассмотрите случай каждого из пяти правильных многогранников, а также проволочный каркас решётки $n \times n \times n$, состоящий из n^3 единичных кубиков.
   б) А существует ли клубок проволоки (т. е. связный набор отрезков, спаянных вместе произвольным образом), который нельзя протащить сквозь плоскость α ни через какую прорезь, проделанную в α?
   (*М. М. Белова, А. Я. Белов*)

10. Какую наибольшую размерность может иметь векторное подпространство пространства $(n\times n)$-матриц над полем вещественных чисел, состоящее только из вырожденных матриц? (*Фольклор*)
11. Найдите $\int\limits_0^1 \ln(-\ln x)\,dx$. (*Фольклор*)
12. Двое художников играют в следующую игру. На каждом шаге первый художник отмечает произвольную точку на плоскости и соединяет её дугами с некоторыми ранее отмеченными точками (быть может, ни с одной); при этом пересекать ранее проведённые дуги нельзя. Второй художник красит поставленную первым художником точку так, чтобы все уже соединённые точки были раскрашены в разные цвета. Пусть n — произвольное натуральное число.

    а) Может ли первый художник заставить второго использовать более n цветов? (*В. К. Ковальджи*)

    б) Верно ли, что он может сделать это за полиномиальное по n число шагов? (*А. Я. Белов*)