# Математический мир

## Из книги «Жизнь математика. Слово о друге, Владимире Михайловиче Алексееве»*

В. М. Тихомиров

### Мехмат

Выступая в 1981 году на заседании Московского математического общества, посвящённом памяти Владимира Михайловича Алексеева, я сравнил мехмат с пушкинским лицеем. Мне кажется, что мехмат пятидесятых–шестидесятых годов можно сопоставить с лицеем пушкинского периода — по атмосфере высокого духовного и творческого подъёма. Такая атмосфера воспринималась и воспринимается большинством из тех, кто был её свидетелем, как особенный дар судьбы. Мехмат стал нашим «отечеством», каким для пушкинских друзей было Царское Село.

Уместно начать разговор о мехмате с самых истоков, со времени зарождения московской математической школы, столь неразрывно связанной с математическим отделением физико-математического (а затем — механико-математического) факультета Московского университета.

Феномен московской математической школы, а точнее — математической школы в Московском университете, школы Егорова — Лузина — потрясает. Эта школа возникла в 1914–16 годах. До той поры в Москве разрабатывалось лишь одно математическое направление, имевшее международное значение, — дифференциальная геометрия.

* М.: МЦНМО, 2012.

А затем московское научное сообщество внезапно резко изменило область исследований и пошло по пути, намеченному молодыми в ту пору французскими математиками — Борелем, Бэром и Лебегом. В течение каких-то *семи лет* оно выдвинуло целую плеяду выдающихся исследователей, в числе которых были представители старшего поколения — И. И. Привалов и В. В. Степанов и совсем молодые П. С. Александров, Н. К. Бари, А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник, Д. Е. Меньшов, И. Г. Петровский, М. Я. Суслин, П. С. Урысон, А. Я. Хинчин, Л. Г. Шнирельман и другие. Каждый из названных учёных (кроме рано умершего Суслина) выбрал затем свой собственный путь, стал обретать своих учеников (достаточно назвать И. М. Гельфанда, А. И. Мальцева и С. М. Никольского — учеников А. Н. Колмогорова, а также Л. С. Понтрягина и А. Н. Тихонова — учеников П. С. Александрова) и к середине 1930-х годов (когда французская школа переживала смену поколений, а немецкая математическая школа была разгромлена гитлеризмом) московская математическая школа — школа одного университета — заняла лидирующее положение во всём математическом мире.

Как же объяснить этот беспрецедентный феномен? Тому были и глобальные, всемирные причины.

Февральская революция 1917 года была с воодушевлением воспринята многими представителями русской интеллигенции. Были отменены сословные привилегии, а также законы и установления, утверждавшие национальное и религиозное неравенство. К активной творческой деятельности были призваны огромные людские массы, не имевшие ранее возможности в ней участвовать. Надежды на то, что осуществятся идеалы свободы, равенства и справедливости, воодушевляли и склоняли к творчеству, в частности к научному творчеству. Этот энтузиазм, эта креативность, эта пассионарность сохранялись ещё долгое время и после Октябрьской революции.

Но была и поразительная, так сказать, «локальная» причина, связанная с творческой деятельностью одного лишь человека. Имя его Николай Николаевич Лузин. Его деятельность — прекрасная иллюстрация к теме о роли личности в истории.

Но сначала небольшое отступление в прошлое. К 1914 году в Москве работали в области математики несколько известных профессоров, среди которых прежде всего надо назвать Д. Ф. Егорова (1869–1931).

Дмитрий Фёдорович Егоров родился в 1869 году в Москве. Он закончил Московский университет в 1891 году. Егоров преподавал в Московском университете начиная с 1893 года, получил профессорское звание в 1903 году, был президентом Московского математического общества с 1923 по 1931 год. В 1931 году он был арестован и умер в тюремном госпитале в Казани.

Д. Ф. Егоров был глубоко верующим человеком и носителем исключительно высоких нравственных принципов. Даже в самых тяжёлых ситуациях он не кривил душой.

Егоров являл собой старый тип традиционного профессора. Он был точен во всём, строг, очень серьёзен и замкнут.

Николай Николаевич Лузин был человеком совсем другого склада.

Лузин родился в 1883 году в Томске. В гимназии математика была в числе наименее любимых им предметов. Родителям пришлось нанимать репетитора. Им оказался студент университета, увлечённый математикой (Томск был университетским городом: университет в Томске был организован в 1888 году). Студенту-репетитору довелось совершить переворот в душе своего ученика. Впоследствии Лузин писал: «Он приоткрыл передо мной математику не как систему механических знаний, заучиваемых наизусть, а как науку, поражающую воображение». Лузин решил избрать математику своей профессией и поступил в Московский университет. «Блистательные лекции по чистой математике, — говорил он впоследствии, — оказали на меня огромное впечатление», — и математика представилась ему как наука, полная заманчивых тайн. Он стал учеником Д. Ф. Егорова.

В 1911 году Егоров доказал одну из самых фундаментальных теорем теории функций, в которой развивалось учение Лебега. Не привожу её формулировку, ибо она известна каждому математику. Егоров познакомил Лузина с азами теории функций действительного переменного, и тот вывел из теоремы Егорова фундаментальное C-свойство измеримых функций.

По окончании университета Лузин был оставлен для подготовки к профессорскому званию, а затем Егоров направил его в заграничную командировку, сначала во Францию, а потом в Германию.

В 1905–06 и в 1912–14 годах Лузин посещает Париж, в 1910–12 годах он был в Гёттингене. В Париже Лузин слушал лекции выдающихся математиков — Пуанкаре, Адамара, Пикара, Дарбу и многих других. Он познакомился и имел плодотворные научные контакты с Борелем и особенно с Лебегом, к которому он испытывал чувства благоговейного восхищения на протяжении всей своей жизни.

Вернувшись в Москву, Лузин круто изменил стиль московской математической жизни. Он был «изобретателем» совершенно новых методов работы с молодёжью, которые складывались из ряда особенностей.

Во-первых, Лузин ставил перед своими студентами проблемы высочайшего уровня, перед которыми пасовали маститые мировые учёные, ставил их перед юношами, едва переступившими порог университета. Вот как описывает Павел Сергеевич Александров первую встречу со своим учителем.

«Я впервые встретился с ним, будучи студентом 2-го курса. Впечатление от этой встречи было, можно прямо это сказать, потрясающим, и я запомнил его на всю жизнь. Обратившись к нему после окончания лекции за советом, как мне заниматься математикой дальше, я был прежде всего поражён внимательностью и — не могу найти другого слова — уважением к собеседнику, как ни странно звучит это слово, когда речь идёт о беседе уже знаменитого, хотя и молодого ещё учёного с 18-летним студентом. Выслушав меня, Лузин посредством умело поставленных вопросов очень скоро разобрался в характере моих математических склонностей и сразу же в доступной мне форме обрисовал основные направления, которые он мог мне предложить для дальнейших занятий; очень осторожно он сам склонил меня к выбору одного из этих направлений и — как я могу теперь сказать — правильно».

Лузин поставил перед Александровым проблему континуума для борелевских множеств, которая интересовала самого Лебега и которую тщетно пытались решать такие крупные математики, как Юнг и Хаусдорф.

Аналогичным образом он поступал и с другими своими учениками. При этом он действительно возжигал в душах своих учеников творческий огонь.

Во-вторых, Лузин стал применять метод индивидуальных занятий. Однажды Андрей Николаевич Колмогоров решил задачу, обсуждавшуюся на семинарах Лузина. «Узнав об этом моем достижении, — пишет Андрей Николаевич, — Н. Н. Лузин с некоторой торжественностью пригласил меня в число своих учеников, и я стал еженедельно приходить к нему в часы, отведённые для одной из групп учеников». Колмогоров приходил к Лузину вместе с Л. В. Келдыш и Е. Холодковским, но каждый из них получал свою собственную задачу.

Наконец, Лузин содействовал тому, что математики объединились в единый сплочённый коллектив, увлечённый наукой. Ученики назвали его «Лузитанией». Много позже, в годы войны, в письме Александрову Колмогоров выразился так: для лузитанцев было характерно «единое биение сердец».

Наш с В. М. Алексеевым общий учитель — Андрей Николаевич Колмогоров — многое перенял от Николая Николаевича Лузина. При этом надо добавить, что в пятидесятые годы на мехмате сложилась большая группа математиков, увлечённых наукой, соединённых также «единым биением сердец».

Когда Володя Алексеев стал студентом, на мехмате было восемь математических кафедр: высшей геометрии и топологии (заведующий кафедрой П. С. Александров), теории чисел (А. О. Гельфонд), дифференциальной геометрии (В. Ф. Каган), теории вероятностей (А. Н. Колмогоров), алгебры (А. Г. Курош), теории функций и функционального анализа (Д. Е. Меньшов), дифференциальных уравнений (В. В. Степанов), математического анализа (А. Я. Хинчин) и истории математики (С. А. Яновская). Среди профессоров, работавших в те годы на мехмате, были такие замечательные учёные, как Нина Карловна Бари, Израиль Моисеевич Гельфанд, Михаил Алексеевич Лаврентьев, Лазарь Аронович Люстерник, Иван Георгиевич Петровский, Лев Семёнович Понтрягин, Пётр Константинович Рашевский, Сергей Львович Соболев, Сергей Павлович Фиников и другие. Трудно усомниться в том, что ни в одном университете мира не было такой концентрации столь крупных математиков.

> Как это случилось и следует ли этого ожидать в будущем? В тридцатые годы в нашей стране утвердился тоталитарный режим. Социальные условия в СССР всюду, кроме основных центров, были тяжкими, и это привело к невиданной концентрации творческой интеллигенции в нескольких больших городах, особенно в Москве. Все названные мною учёные (и вообще крупнейшие деятели науки, культуры и инженерии) жили фактически в пределах Садового кольца, радиус которого равен примерно пяти километрам. В пределах этого «радиуса» жила доля интеллектуальной элиты всей страны, сопоставимая по численности с остальной её частью. Хотя явление такой концентрации интеллекта по-своему замечательно, причины, его породившие, чудовищны. Такое, конечно, не должно повториться нигде и никогда.

Но нам — студентам мехмата в пятидесятые годы — выпало счастье учиться на таком поразительном факультете. Число семинаров исчислялось десятками и иногда приближалось к сотне. И что это были за семинары!

Топологический кружок П. С. Александрова, ведший свою историю от той поры, когда П. С. Александров и П. С. Урысон создавали свою топологическую школу, семинар по теории функций Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова, родоначальником которого был сам Н. Н. Лузин, семинар по теории вероятностей А. Н. Колмогорова и А. Я. Хинчина, семинары В. В. Немыцкого и В. В. Степанова по обыкновенным уравнениям и И. Г. Петровского, С. Л. Соболева и А. Н. Тихонова по уравнениям с частными производными, семинар А. Г. Куроша по алгебре, М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата по комплексному анализу, семинар С. А. Яновской и А. П. Юшкевича по истории математики, наконец, быть может, самый замечательный семинар И. М. Гельфанда по всей математике — всё это семинары воистину всемирного значения.

А сколько было тогда спецкурсов и каких! Некоторые студенты умудрялись сдавать их около десятка, а рекорд, кажется, был установлен Михаилом Михайловичем Постниковым, который сдал четырнадцать спецкурсов!

Это были годы смены научных приоритетов, когда вдруг начала проявляться тяга к математической физике. Среди тех, кто был связан тогда «единым биением сердец» в области теории динамических систем и математической физики, с кем В. М. Алексеев имел глубокие научные контакты, назову Диму Аносова, Диму Арнольда, Алика Березина, Юлика


*Студенты Володя Алексеев и Володя Золотарёв проводят математическую олимпиаду для школьников*

Добрушина, Боба Минлоса, Серёжу Новикова, Яшу Синая, Алика Шварца (я назвал выше Дмитрия Викторовича Аносова, Владимира Игоревича Арнольда, Феликса Александровича Березина, Роланда Львовича Добрушина, Роберта Адольфовича Минлоса, Сергея Петровича Новикова, Якова Григорьевича Синая, Альберта Соломоновича Шварца так, как их все звали в пору их студенческих и аспирантских лет). Потом появились их многочисленные ученики. Убеждён, что большинство из них с благодарностью называют В. М. Алексеева в числе своих друзей или учителей. Мехмат одарил В. М. Алексеева счастьем творчества, любовью к своей профессии, радостью труда и человеческого общения.

Особые чувства восхищения и уважения Владимир Михайлович питал к своему учителю Андрею Николаевичу Колмогорову (об этом ещё многое будет сказано); он находился в близких дружеских отношениях со многими математиками старшего поколения. Иван Георгиевич Петровский очень дорожил мнением В. М. Алексеева. Владимир Михайлович отвечал ему чувством глубокой и почтительной любви.

Дружеские узы связывали Владимира Михайловича с профессорами мехмата и коллегами В. М. по кафедре математического анализа, где он начинал свою педагогическую деятельность, в особенности со Львом Абрамовичем Тумаркиным и Михаилом Александровичем Крейнесом. Владимир Михайлович пользовался очень большой любовью математиков своего и более поздних поколений. Впоследствии он был всегда окружён прекрасной молодёжью.

Поступив на мехмат, Володя сразу же включился в студенческий конкурс по решению задач (к сожалению, такие конкурсы далее не проводились). Сохранилась грамота, в которой говорится, что она «Дана Алексееву Владимиру Михайловичу, студенту 1 курса механико-математического факультета, получившему на конкурсе по решению задач 1950/51 уч. г. вторую премию. Председатель жюри конкурса акад. А. Н. Колмогоров». Первое место занял студент второго курса, который в те годы воспринимался как, быть может, самый способный, и не только на своём курсе. Но потом он как-то исчез из виду, не оставив заметного следа.

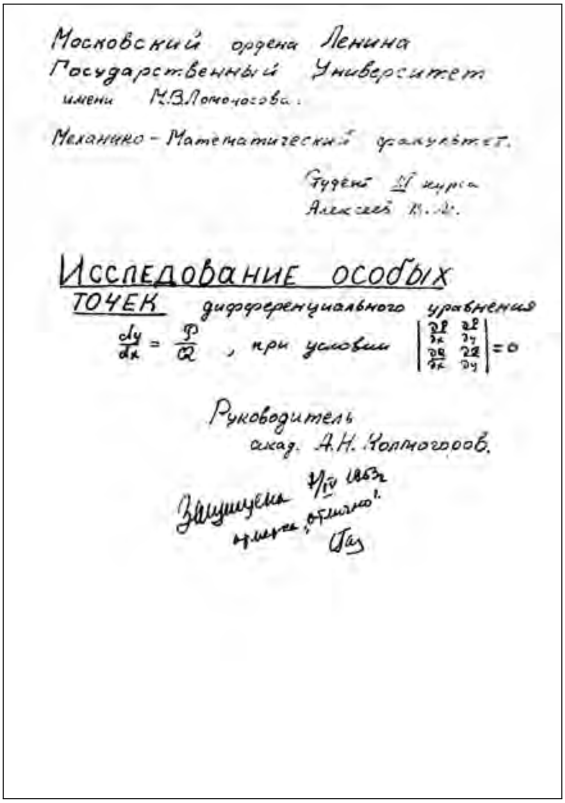
К числу особенностей характера Владимира Михайловича следует отнести его нелюбовь проигрывать. Когда он показывал мне как-то колмогоровскую грамоту, в голосе его слышалась досада: «вот, первого места не занял...».

> Жажда первенства вообще характерна для математиков. Один из крупнейших математиков своего времени — Адамар учился в престижнейшем парижском Lycée Louis-le-Grand (в котором кто только ни учился: Бодлер, Борель, Сирано де Бержерак, Вольтер, Дега, Делакруа, Галуа, Гюго, Лебег, Мольер, Робеспьер, маркиз де Сад...), и по окончании третьего класса Адамар принял участие в Concours Général — всефранцузском состязании, некоем аналоге наших Всесоюзных (ныне Всероссийских) олимпиад. Адамар стал по математике вторым. Он тяжело переживал свою неудачу. Колмогоров передавал слова Адамара, сказанные с глубоким огорчением девяностолетним старцем: «Я оказался вторым. Тот, первый, тоже сделался математиком. Но гораздо более слабым — он и всегда был слабее». (Этот эпизод рассказан в статье Арнольда о Колмогорове, см. «Колмогоров в воспоминаниях». М.: Наука, 1993, с. 170.) Вот и Володя был огорчён, что занял лишь второе место на мехматском студенческом конкурсе.

Володя с самого первого курса становится руководителем школьных кружков, один из которых он вёл с будущим многолетним деканом мехмата, своим сокурсником Олегом Лупановым. Работа со школьниками и студентами продолжалась до последних дней его жизни.

Со второго курса начинается научная работа В. М. Алексеева, которой он стал заниматься в семинарах А. Н. Колмогорова, хотя «приписан» был к кафедре дифференциальных уравнений.

В архиве В. М. Алексеева сохранилась его курсовая работа за третий курс. Я воспроизвожу здесь факсимиле титульного листа (стр. 12). Надпись



Московский ордена Ленина
Государственный Университет
имени М.В.Ломоносова.

Механико-Математический факультет.

Студент III курса
Алексеев В.М.

Исследование особых точек дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{P}{Q}$, при условии $\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix}=0$

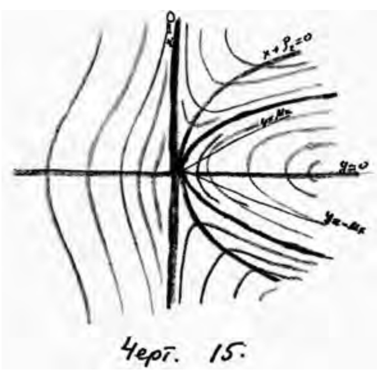
Руководитель
акад. А.Н. Колмогоров.

Защищена 7/IV 1953 г.
оценка „отлично".

*Титульный лист курсовой работы за 3-й курс*

на титульном листе «Защищена 7/IV 1953 г.» и т. д. выполнена рукой Самария Александровича Гальперна.

В работе 23 страницы и 27 чертежей, любовно отрисованных карандашами трёх цветов. Образец такого чертежа — «Черт. 15», по необходимости в чёрно-белом варианте, я также позволю себе здесь воспроизвести. Это полноценная научная работа, выполненная на высоком профессиональном уровне.




Здесь, пожалуй, уместно сделать первое отступление об Андрее Николаевиче Колмогорове.

1953 год можно назвать «годом великого перелома» в творческой судьбе Колмогорова. Предшествующее десятилетие, с 1943 по 1952 годы, не было столь творчески насыщенным, как предыдущие два (с 1923 по 1942 годы; здесь не место анализировать причины этого). Но с 1953 года начался период его необычайного творческого взлёта, продолжавшегося примерно десять лет. Это оказало определяющее влияние на судьбу Владимира Михайловича Алексеева уже в том же 1953 году, когда Колмогоров поставил перед Алексеевым новую проблему. Но его курсовая работа третьего курса была связана с «остаточными явлениями» предшествующего периода творческих поисков Андрея Николаевича.

В течение нескольких лет Андрей Николаевич много работал над постановкой на механико-математическом факультете математического практикума. Этот практикум активно просуществовал лет семь, а потом постепенно сошёл на нет. (Материалы практикума недавно были обнаружены в бумагах Колмогорова, и если они будут опубликованы, можно будет получить впечатление о глубине замысла их создателя.)

Андрей Николаевич брал темы для практикума из «горячих точек» теоретической и прикладной математики того времени. Это были предельные циклы и особенности решений дифференциальных уравнений (несомненно, навеянные интересом И. Г. Петровского к этим проблемам), уравнения с малым параметром (тогда публиковались работы на эту тему И. С. Градштейна, А. А. Дородницына, А. Н. Тихонова и других), методы сеток решения уравнений с частными производными — эта тема была необычайно актуальна в те времена (в частности, благодаря работам по атомной проблематике), затрагивались также проблемы теории аппроксимации, статистики и многое другое.

На младших курсах некоторым сильным студентам Андрей Николаевич давал курсовые, так или иначе связанные с практикумом, и нередко случалось, что в этих работах студентами второго и третьего курсов бывали получены результаты, находившиеся на передовых рубежах науки, значительно развивавшие, а то и исправлявшие работы мэтров математики.

Среди тех, кто поступил на мехмат в 1950 году и учился на отделении математики, выделялись два студента: Володя Алексеев и Коля Бахвалов — впоследствии академик РАН Николай Сергеевич Бахвалов (1934–2005). (Кого ни спросить из сокурсников, кто запомнился на курсе, почти без исключения все начинали так: «Володя Алексеев, Коля Бахвалов, ...» Таких студентов я называю *лидерами своих курсов*.) Оба они — и Володя, и Коля — писали на третьем курсе работы у Андрея Николаевича. Одна работа — Алексеева — была посвящена особым точкам дифференциальных уравнений в вырожденном случае (и должна была дополнить многие исследования, в частности работу И. Г. Петровского на эту тему), другая — Бахвалова — была посвящена численным методам. Возможно, что одной из своих целей на будущее Колмогоров ставил задачу реформирования численного анализа. Но именно тогда, весной 1953 года, к Колмогорову пришли в изобилии новые увлечения: суперпозиции, теория информации, $\varepsilon$-энтропия, классическая механика и многое другое, и это привело к тому, что он отказался от своего замысла, касающегося численного анализа. Андрей Николаевич прямо сказал об этом Бахвалову и посоветовал (если тот хочет продолжать исследования по прикладному анализу) выбрать себе нового научного руководителя, указав при этом на Сергея Львовича Соболева как на возможного кандидата. И Бахвалов действительно стал учеником Сергея Львовича.

> Чуть позже, уже в аспирантские годы и ранние годы работы на мехмате, Николай Сергеевич вместе с Николаем Николаевичем Ченцовым присоединился к семинару Николая Михайловича Коробова (и тем самым образовался знаменитый семинар «трёх Коль»). Этот семинар был посвящён численным методам. На этом семинаре очень чувствовалось влияние Колмогорова. В частности, многие начальные работы Бахвалова были выполнены под прямым воздействием Андрея Николаевича.

Курсовая работа студента III курса В. М. Алексеева, несомненно, представляла научный интерес. Свидетельством тому служит и то, что некоторое время спустя, когда он был уже преподавателем мехмата, Владимир Михайлович дал напечатать эту работу на машинке и при этом тщательно выполнил многочисленные чертежи. По-видимому, работа готовилась им к печати. Мне представляется, что дело чести учеников Владимира Михайловича — окончательно подготовить эту работу к печати. Она посвящена исследованию особых точек дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{Q}},$$

где $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — многочлены второго порядка, при условии что отображение $(x, y) \to (\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ вырожденно.

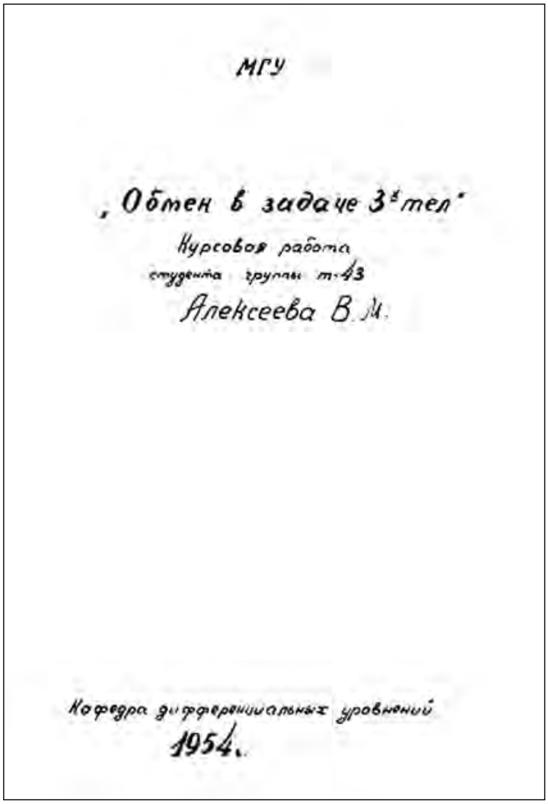
Решающее событие в научной биографии Алексеева произошло в том же 1953 году: он обрёл тему всей своей жизни.

Сохранилась его курсовая работа и за четвёртый курс. Титульный лист (стр. 15) снова выполнен от руки (не Володиной, но об этом чуть позже).

Не обойтись без отступлений.

### Отступление первое. Что это за группа m-43?

Мне затруднительно быть документально точным, многое в моих суждениях построено на предположениях.


МГУ

„Обмен в задаче 3х тел"

Курсовая работа
студента группы м-43
Алексеева В.М.

Кафедра дифференциальных уравнений
1954 г.

*Титульный лист курсовой работы за 4-й курс*

Начиная с некоторых пор (незадолго до того, как Володя Алексеев стал студентом мехмата) на мехмате образовалось некое таинственное специальное отделение. Секретное отделение, которое курировали Органы. Это отделение возглавлял человек с запоминающейся фамилией — Пандóпуло. Там обучали студентов, которым в будущем предстояло заниматься всякого рода секретными разработками. Математиков готовили в шифровальщики.

> Вспоминаю. 1987 год, лето. Я впервые в Париже. Андрею Николаевичу Колмогорову оставалось жить лишь три месяца, но он дал мне множество советов, касающихся Франции и Парижа в особенности. И вот я медленно прогуливаюсь с моим новым знакомым, американцем, тоже математиком, по вечернему Парижу. Слева и справа от нас неисчислимые бары, кафешки с крутящимися грилями, рестораны, сидящие одиночки, пары, группы с бокалами и дымящимися вкусностями. Отовсюду слышится музыка...
>
> Мы математики, и первое, что приходит в голову спросить — откуда родом ты? кто твой учитель, твой «супервайзер»? И выясняется вдруг, что супервайзером моего собеседника является не кто иной, как Стоун, Маршал Стоун —

> математик, чья звезда взошла в середине тридцатых годов. И как взошла! Его труды оплодотворили творчество и Колмогорова, и Гельфанда, и Александрова, и Тихонова и ещё, и ещё. Кто не знает знаменитейшую теорему Стоуна — Вейерштрасса, бикомпактное расширение Стоуна — Чеха, теорему Стоуна о полугруппах операторов и вообще его вклад в теорию операторов? Выясняется, что Стоун жив, в полном здравии. «А сколько ему лет?» И тут оказывается, что он полный ровесник Андрея Николаевича, оба родились в апреле 1903 года! Пережив восхищение от неожиданной информации, я задал вопрос: «Почему в последние годы о Стоуне ничего не слышно? Что с ним случилось?» И тут выясняется, что он *возглавил секретные работы по кодированию*, блестяще с этим справился, но практически прекратил открытые научные исследования.
>
> ...Два десятилетия нашей истории — от начала тридцатых годов до марта 1953 года — период неслыханной, неправдоподобной, невероятной концентрации власти в руках одного человека (как это произошло и какие имело последствия, не будем здесь обсуждать). Служба шифрования и дешифрования у нас была создана, судя по всему, где-то в конце тридцатых годов. Быть может, наши секретные агенты в Англии и США узнали о такой службе в этих странах. Особую роль там играли математики: в Америке Стоун, в Англии — Тьюринг. И когда (в этом состоит моё предположение) об этом доложили Сталину, он согласился с мнением или высказал его сам, что кадры шифровщиков и дешифровщиков надо выбирать из *математиков*.
>
> В сороковые годы возникла потребность в расширении числа тех, кто должен разрабатывать теорию и практику кодирования. И было решено использовать мехмат. Так образовались не такие группы, как скажем, группа 1–07, в которой я начал учиться на мехмате, а что-то таинственное, вроде m-43.

Для того чтобы попасть в спецгруппу, нужна была чистая анкета. Сначала анкеты были просто страшные, из многих страниц, и нужно было указывать, в частности, где расположены могилы родителей и дедушек с бабушками. Потом всё несколько ослаблялось, но тех, у кого в паспорте в графе «национальность» стояло слово «еврей», среди учащихся в спецгруппах не было.

После окончания второго курса Володя был принят в специальную группу.

Впервые мне довелось разговориться с Володей осенью 1953 года. Тогда состоялась свадьба Миши Лидова и Дианы Седых. Миша был моим соседом по квартире и близким другом, несмотря на разницу в возрасте (он родился в 1926 году). Его судьба была необычной (о ней я написал в очерке, опубликованном в «Историко-математических исследованиях» (Вторая серия, выпуск 12 (47), 2007)). Миша поступил на мехмат после армии, сначала на заочное отделение, а в 1952 году после демобилизации перевёлся на очное. Впоследствии он сыграл выдающуюся роль в наших космических исследованиях. Дианка (так я зову её всю жизнь) училась на Володином курсе. Свадьбу справляли в Мишкиной комнате в нашей квартире.

*В. М. Алексеев —*
*студент одного из старших курсов МГУ*

Было тесно, но как-то разместились. Я оказался рядом с Володей. Пили в охотку (не все смогли подняться из-за стола по окончании пирушки, кое-кого, как говорится, без сознания, пришлось транспортировать в мою комнату — не оставлять же на полу у брачного ложа). Не уверен, что в другой обстановке Володя говорил бы со мной так откровенно. А тогда он поведал мне с некоторым ужасом о том, что он оказался в специальной группе и тем самым был лишён свободы выбора. Тогда ему казалось, что обратного хода нет. (К счастью, это оказалось неверным — усилиями Колмогорова и Петровского он был вызволен из секретных организаций.)

Таково первое отступление.

**Отступление второе. Что это за «Обмен в задаче трёх тел»?**

История вопроса весьма интересна и вполне детективна, и нам хочется сохранить неопределённость развития сюжета, рассказывая его от начала (когда задача была поставлена Алексееву Колмогоровым) и до конца, когда задача была полностью решена, и основным «решателем» этой проблемы оказался В. М. Алексеев.

Курсовая работа 1954 года начинается со слов: «Под задачей трёх тел мы понимаем задачу определения поведения трёх тел, взаимодействующих друг с другом по закону Ньютона. В настоящей работе нас будет интересовать не определение траекторий этих тел, а характер поведения расстояний между телами при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$. Описанная задача кратко называется проблемой „финальных движений в задаче трёх тел“». В своих более поздних работах В. М. Алексеев пишет, что «как с математической, так и с космогонической точки зрения весьма интересно описать возможные типы *эволюции* системы, т. е. дать ответ на вопрос, в каких комбинациях могут сочетаться типы поведения при $t \to \pm\infty$», и ещё: «Давний и стойкий интерес, который проявляют к этим вопросам как специалисты, так и неспециалисты, вполне объясним. Здесь затрагиваются проблемы, возникающие в области, где математика и механика граничат с философией: происхождение и судьба Солнечной системы, эволюция звёздных скоплений и т. д.».

Сразу же после вступительных слов своей курсовой автор начинает разбор разных вариантов в проблеме финальных движений, и он перечисляет в таблице десять потенциальных возможностей. Их можно интерпретировать на понятном каждому языке поведения людей в любовных треугольниках, и мы предпочтём именно такую трактовку. Вот какие случаи рассматриваются в таблице Алексеева.

1. Трое уживаются вместе во все времена (математики говорят тогда «с минус бесконечности до плюс бесконечности»). Этот случай называется *устойчивым.*
   Автор комментирует в таблице: «Неизвестно, возможны ли такие движения на множестве меры $\mu > 0$» и уже за пределами таблицы добавляет: «А. Н. Колмогоров высказал гипотезу, что нет». Следуя традициям детективного жанра, воздержимся здесь пока от комментариев.
2. «Треугольник» существовал всё время до определённого момента, когда один стал удаляться от оставшейся пары всё дальше и дальше, уходя в бесконечность. Это стали называть *частичным распадом.*
3. Пара участников существовала рядом до некоторого времени, как вдруг из бесконечной дали прилетел третий и навсегда остался с этой парой. Это называется *сильным захватом.*
4. «Треугольник» существовал всё время, а потом все разлетелись кто куда. Это *сильное рассеяние.*
5. Трое слетелись из бесконечной дали и остались вместе на всё остальное время. Это тоже *сильный захват.*

6. Пара существовала всё время, как вдруг из бесконечной дали прилетел третий, вышиб одного, остался с другим, а вышибленный удалился в бесконечную даль. Это называется *обменом.*
7. Трое прилетают из бесконечной дали, двое образуют пару, чтобы быть рядом во все последующие времена, а третий улетает. Это случай *захвата.*
8. Пара существовала бесконечное время, из бесконечности прилетел третий, и все разлетелись. Это называется *полным распадом.*
9. Трое прилетают из бесконечности и улетают в бесконечность.
10. Пара существовала бесконечное время, третий прилетел и улетел, а пара осталась вместе. Две последние тривиальности не имеют названия.

(Как потом выяснилось, этим не исчерпываются возможные случаи финальных движений в задаче трёх тел.)

Далее в курсовой пишется: «Особое место занимают случаи обмена и захвата. Шази[1] высказал утверждение, что ни обмен, ни захват в задаче трёх тел невозможны. Относительно захвата это мнение было опровергнуто сначала О. Шмидтом и Хильми, применявшими численное интегрирование, потом К. Ситниковым, построившим пример захвата без помощи численного интегрирования». Далее говорится о том, что обмен с положительной константой энергии можно построить методом Ситникова и что наибольшая проблема состояла в возможности обмена при отрицательной константе энергии. Введение к курсовой работе завершалось словами: «Настоящая работа посвящена построению именно такого обмена в задаче трёх тел с константой энергии $h < 0$. Тем самым утверждение Шази окончательно опровергается».

Передохнём. Что мы видим? Во-первых, что Андрей Николаевич Колмогоров поставил *перед студентом четвёртого курса* мировую проблему, разрешение которой должно было быть с интересом воспринято и Ньютоном, и Якоби, и Пуанкаре, и вообще любым математиком и астрономом, которые размышляли над устройством мироздания.

Проблема трёх тел существовала всегда, но именно проблема захвата приобрела в сороковые годы особую актуальность. Дело в том, что Отто Юльевич Шмидт — математик, геофизик, путешественник, главный редактор Большой Советской Энциклопедии, организатор науки и просвещения (его А. Н. Колмогоров называл человеком эпохи Возрождения), — бывший долгое время в числе сталинских фаворитов, внезапно потерял его доверие. Он был смещён Сталиным со своих организационных постов в марте 1942 года,

[1] Выдающийся французский математик и астроном, академик Парижской академии наук.


*Профессора и преподаватели выпуска мехмата 1955 года*


*Выпускники кафедры теории функции и функционального анализа 1955 года* но не арестован. И тогда он решил всерьёз заняться темой, которая интересовала его давно: созданием модели рождения Солнечной системы. Его основная идея базировалась именно на возможности захвата. Но Шази «доказал» (и все так считали), что захват невозможен. Шмидт не согласился с этим. Он провёл численные расчёты, которые убедили его в собственной правоте. Ещё более точные расчёты провёл сподвижник Шмидта Г. Ф. Хильми. Но для математиков расчётные доказательства не были убедительны. Колмогоров работал в сороковые годы в шмидтовском Институте геофизики (это было связано с его исследованиями по турбулентности), и эта, если хотите, научная драма развёртывалась на его глазах. Колмогоров поставил перед учеником П. С. Александрова Кириллом Александровичем Ситниковым, замечательным топологом, постоянно бывавшим в сороковые годы на загородной даче Александрова и Колмогорова в Комаровке задачу математически обосновать возможность захвата. И в одном частном случае Ситников решил её.

На этом закончим с «во-первых».

А во-вторых? А во-вторых, четверокурсник решил эту проблему, с которой было связано так много интригующих сюжетов. Повторим слова курсовой: «тем самым утверждение Шази окончательно опровергается», и дорога для гипотезы Шмидта была тем самым в этой части очищена.

Но это было только начало. Оставалось ещё множество вопросов, касающихся финальных движений. В настоящее время проблема финальных движений полностью решена (о том, как это происходило и что это значит, мы будем ещё рассказывать). На решение и развитие этой проблемы ушла фактически вся творческая жизнь Владимира Михайловича Алексеева, и это в высшей степени характеризует два беспримерных свойства его личности — стойкость и верность. Об этом мы далее не раз расскажем подробнее.

В том же 1954 году произошло знаменательное событие: советская делегация (в составе П. С. Александрова, А. Н. Колмогорова, С. М. Никольского и Д. Ю. Панова) впервые после 1932 года приняла участие в Международном математическом конгрессе. Конгресс состоялся в Амстердаме. Там Колмогоров выступил с докладом, завершавшим работу Конгресса. С этого времени начался новый этап в теории динамических систем.

В своём докладе Колмогоров рассказал о начальном этапе развития нового витка теории. Затем исследования Колмогорова были дополнены усилиями В. И. Арнольда и Ю. Мозера, и в итоге был создан раздел математического анализа, получивший название КАМ-теории (теории Колмогорова — Арнольда — Мозера). Процитирую одно место из колмогоровского доклада, где он рассказывает об интересующем нас сюжете. «Замечу, — говорил в своём докладе Андрей Николаевич, — что из более элементарных вопросов специалисты по качественной теории дифференциальных уравнений мало занимаются кон-

> кретными задачами об уходящих траекториях различных специальных типов. Ярким примером этого является то обстоятельство, что опровержение утверждений Шази о невозможности „обмена“ и „захвата“ в задаче трёх тел [Колмогоров процитировал в этом месте две работы Шази] было достигнуто тяжёлым (и без точных оценок логически неубедительным!) путём численного интегрирования [Колмогоров цитирует работы Беккера двадцатого года и Шмидта сорок седьмого], и лишь недавно пример „захвата“ был построен Ситниковым весьма просто и почти без вычислений [в работе пятьдесят третьего года]». Результат Алексеева не был к тому моменту опубликован, и потому о нём ничего не было сказано.

Дипломная работа В. М. Алексеева явилась продолжением его курсовой работы четвёртого курса. Она была посвящена обмену и захвату в проблеме трёх тел. На базе этих исследований была написана статья в «Доклады Академии наук СССР». Она явилась первой публикацией Владимира Михайловича (Обмен и захват в задаче трёх тел. ДАН СССР, т. 108, №4, 1956).

Характеристикой творческого взлёта Андрея Николаевича Колмогорова может служить то, что в том же 108-м томе в ДАН публикуются заметки, в первой из которых делается решающий вклад в опровержение гипотезы Гильберта в его 13-й проблеме (ДАН СССР, т. 108, №2, 1956), во второй намечается программа исследований по $\varepsilon$-энтропии (ДАН СССР, т. 108, №3, 1956), а в томе, где опубликована статья Алексеева, помещена заметка И. М. Гельфанда, А. Н. Колмогорова и А. М. Яглома, значительно развивающая шенноновскую теорию информации.

## Восхождение

Наибольший взлёт творческих достижений Владимира Михайловича Алексеева относится к периоду 1966–69 гг. Статья «Квазислучайные динамические системы», опубликованная в трёх номерах «Математического сборника», занимает около 170 страниц. Тогда же была исчерпана проблематика финальных движений. В 1968 году В. М. Алексеевым был сделан обзорный доклад на заседании Московского математического общества (8 апреля 1968 года), и в том же году была завершена докторская диссертация, где были подведены итоги огромной работы. Работа была защищена в марте 1969 года на заседании Совета механико-математического факультета МГУ. Официальными оппонентами выступили Дмитрий Викторович Аносов, Андрей Николаевич Колмогоров и Виктор Борисович Лидский.

Приведём список публикаций В. М. Алексеева, в которых, согласно автореферату, изложены основные результаты диссертации. Это две заметки в ДАН СССР, одна заметка в «Сообщениях» в УМН (в совокупности всё это занимает меньше десяти страниц) и одна большая, содержащая 63 страницы статья «Квазислучайные динамические системы I. Квазислучайные диффеоморфизмы» в «Математическом сборнике».

Огромная, около пятисот страниц, диссертация Владимира Михайловича была изложена в трёх упомянутых статьях в «Математическом сборнике». Бóльшая часть была опубликована в конце 1968 и в начале 1969 года. (Правила того времени позволяли не откладывать защиту до полного опубликования статей по диссертации.)

К переживаниям по окончании такого рода свершений относятся слова Поэта (я цитирую стихотворение Пушкина, которое так и называется — «Труд»):

Миг вожделенный настал: окончен мой труд многолетний.
Что ж непонятная грусть тайно тревожит меня?
Или, свой подвиг свершив, я стою как подёнщик ненужный,
Плату принявший свою, чуждый работе другой?
Или жаль мне труда, молчаливого спутника ночи,
Друга Авроры златой, друга пенатов святых?

По окончании труда начался новый этап в жизни Алексеева, он искал новые темы для занятий, но шлейф его основной темы тянулся до последних мгновений его жизни. К новым темам Владимир Михайлович лишь едва приступил.

Приведём (прокомментировав потом) отзыв А. Н. Колмогорова на диссертацию В. М. Алексеева. Этот отзыв является, по моему мнению, замечательным литературным документом.

ОТЗЫВ
на диссертацию В. М. Алексеева
«Квазислучайные динамические системы»

Введение к диссертации содержит обзор современной проблематики теории классических динамических систем. Работа В. М. Алексеева примыкает к четырём группам работ.

1. Попытки Шази доказать невозможность некоторых случаев предельного поведения при $t \to \pm\infty$ в «задаче трёх тел» были сначала опровергнуты путём построения расчётных противоречащих примеров (Шмидт для «захвата» и Хильми — для «обмена». Отсутствие ссылки на работы Хильми является моим единственным упрёком диссертанту в отношении полноты исторического обзора). Исчерпывающее доказательство возможности захвата было дано К. А. Ситниковым, а обмена — как при положительной, так и при отрицательной константе энергии —

В. М. Алексеевым. В рамках элементарных представлений, не учитывающих возможности «осциллирующего» поведения, нерешённым оставался наиболее деликатный вопрос о возможности захвата при отрицательной константе энергии (захват кометы системой Солнце—Юпитер). Этот вопрос как раз решён в диссертации.

2. Сама возможность осцилляции в этой задаче была доказана К. А. Ситниковым. Своеобразное с теоретико-множественной точки зрения устройство фазового пространства этой задачи в отношении поведения при $t \to +\infty$ было намечено А. Н. Колмогоровым (см. указание на с. 38 диссертации). Для обнаружения возможности «осцилляций» мною было предложено разобрать специальный случай, которому посвящена третья глава представленной диссертации. В. М. Алексеев не ограничился осуществлением этой программы, но получил окончательные результаты и в отношении совместного учёта поведения траекторий при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$. Это потребовало значительно более тонких методов.
3. Эти более тонкие методы автора диссертации возникли в развитие идей Я. Г. Синая, Смейла и Д. В. Аносова (обзор работ этих авторов дан на с. 4–10 диссертации). В. М. Алексеев указывает и более старый источник своих идей — «символическую динамику» Дж. Биркгофа. «Квазислучайный» характер поведения траекторий при движении по геодезическим многообразиям отрицательной кривизны был замечен давно. Более определённо эти аналогии со случайными процессами получили развитие в работах Я. Г. Синая при использовании введённого мною понятия «энтропии» динамической системы. Роль «бернуллиевских динамических систем» в классической проблематике выяснилась в работах Я. Г. Синая и Смейла. Из этих источников и развился тонкий аппарат, исследованный в первой главе диссертации.
4. Работы А. Н. Колмогорова, В. И. Арнольда и Ю. Мозера о роли в классических динамических системах почти периодических решений менее непосредственно связаны с диссертацией, хотя и необходимы для замыкания полной таблицы возможных типов поведения изучаемых систем. Кроме того, в них впервые появились подмножества фазового пространства с локальным устройством по типу произведения гладкого элемента на канторовское множество, играющие большую роль в диссертации.

Конкретные результаты второй и третьей глав существенно основаны на общих идеях первой главы, где в общей форме развивается метод изучения динамических систем с помощью «топологических марковских цепей». Трудно дать краткое изложение этой теории. В § 6 первой главы дан ряд примеров применения метода. Эта глава сама по себе представляет большой интерес.

Третья глава диссертации посвящена классической задаче трёх тел. В случае отрицательной константы энергии при $t \to +\infty$ возможны три типа поведения системы (нумерация соответствует таблице к с. 373 диссертации):

2) одно из расстояний ограничено, два других стремятся к бесконечности;
3) все расстояния ограничены;
4) «осциллирующее поведение».

Рассматривая поведение системы при $t \to \pm\infty$, получаем девять логически возможных комбинаций: (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4). Случай (2,2) распадается при этом на два: (2,2)-а — без «обмена» и (2,2)-б — с «обменом». До недавнего времени были известны только примеры случаев (2,2)-а и (3,3). В своей работе, не вошедшей в диссертацию, В. М. Алексеев впервые строго доказал возможность случая (2,2)-б. В 1960 году К. А. Ситников построил пример «осциллирующего поведения», т. е. установил возможность хотя бы одного из случаев (2,4), (3,4), (4,4) и хотя бы одного из случаев (4,2), (4,3), (4,4).

Основной результат третьей главы диссертации заключается в доказательстве *возможности всех десяти случаев*. В частности, установлена возможность «захвата» (случай (2,3)), которая отрицается ещё в изданном в 1967 году сборнике «Успехи астрономии в СССР». Случаи (2,2)-а, (2,2)-б и (3,3) осуществляются с положительной вероятностью. Про остальные либо доказано, либо правдоподобно, что их вероятность нулевая. Но в качестве пограничных случаев они интересны и важны.

Уже перечисленные результаты убедительно свидетельствуют о значительности достижений В. М. Алексеева в этой трудной области, в которой работал ряд крупных учёных. Результаты получены при помощи рассмотрения одного специального случая «задачи трёх тел» (движущаяся по оси симметрии масса — нулевая). Сам же случай ограниченной задачи трёх тел, с другой стороны, является частным случаем задачи об одномерном осцилляторе, подчинённом уравнению

$$\ddot{x} = -Q(x, t), \tag{1}$$

где $Q$ периодически зависит от времени.

Исследованию этого уравнения подчинена глава вторая. В применении к решению уравнения (1) результаты о предельном поведении решений при $t \to \pm\infty$ собраны на с. 357 в виде следствия 9. Оказывается, что уже здесь это поведение может быть весьма разнообразным, а распределение в фазовом пространстве точек, дающих начало разного типа траекториям, обладает рядом неожиданных свойств. Есть все основания думать, что открытые здесь явления имеют широкое распространение в динамических системах классической механики. В частности, набросанная на с. 378-381 общая картина устройства фазового пространства общей задачи трёх тел, вероятно, сможет быть окончательно уточнена на основе методов, развитых В. М. Алексеевым.

Подводя итог, мы видим, что докторант, полностью овладев всем очерченным кругом проблем и методов, получил и ряд завершающих результатов. В отношении тонкости методов он стоит на самом высоком из достигнутых к настоящему моменту уровне. В соответствии с этим диссертацию В. М. Алексеева следует признать полностью удовлетворяющей требованиям, предъявляемым к диссертациям на степень доктора физико-математических наук, а диссертанта — достойным присуждения ему этой степени.

А. Колмогоров
6 декабря 1968 г.

Как и обещал, прокомментирую этот отзыв.

Он начинается с описания четырёх направлений, которые зародились за пятнадцать лет до этого в период новой творческой активности Колмогорова и принесли замечательные плоды.

Первое направление — финальные движения. О нём мимоходом было сказано в докладе Колмогорова на заключительном заседании Международного математического конгресса в Амстердаме (в большом зале, который был известен ранее докладчику «как место исполнения великих произведений мировой музыки под управлением Менгельберга»). В этом направлении в ту пору были получены лишь изначальные, в основном эвристические результаты, за исключением теоремы К. А. Ситникова 1953 года о захвате. А в 1968 году тема оказалась почти исчерпанной, и роль диссертанта была фундаментальной.

Колмогоров приводит в отзыве классификацию движений, отличающуюся от той, которая содержалась в курсовой работе Алексеева 1954 года. И в алексеевской, и в колмогоровской классификации десять позиций, но они составлены по разным классификационным признакам, и в алексеевской классификации отсутствовал элемент осцилляционного поведения, который тогда существовал в виде гипотезы, когда максимальное расстояние между телами неограничено, но не стремится к бесконечности. В своём отзыве Колмогоров выделяет в качестве «отдельной группы работ» те, где была обнаружена эта казавшаяся нереальной в 1954 году возможность осцилляции.

Эта тема была также стимулирована Колмогоровым, и он (что для него, вообще говоря, нехарактерно) подчёркивает свою роль в этом круге вопросов.

Следующие две группы вопросов оказались на долгое время в эпицентре математики шестидесятых годов. Решение задачи о финальных движениях потребовало разработки новых методов в теории динамических систем. Одно из крупнейших открытий в теории дифференциальных уравнений, имеющих грандиозные последствия для всей математики и естествознания, состоит в том, что во многих динамических системах, несмотря на их полную детерминированность, могут возникать движения, напоминающие случайные процессы. Истоки этой идеологии относятся ещё к началу прошлого века, а достаточно полное осмысление такого рода явлений относится к шестидесятым годам. В числе людей, которым принадлежат классические результаты в этом направлении, следует назвать В. М. Алексеева. Колмогоров в своём отзыве называет основных участников работ в этом направлении: помимо В. М. Алексеева — Я. Г. Синая, С. Смейла, Д. В. Аносова. Андрей Николаевич очень ценил (и писал, что они имеют «выдающийся интерес») работы Я. Г. Синая, где были вскрыты аналогии движений по геодезическим многообразиям отрицательной кривизны со случайными процессами (и Колмогоров снова подчёркивает в отзыве, что при этом использовалось введённое *им* понятие энтропии динамической системы).

И наконец, Андрей Николаевич говорит о КАМ-теории и её роли в классической механике. Эти исследования, как он пишет, «менее непосредственно связаны с диссертацией, хотя и необходимы для замыкания полной таблицы возможных типов изучаемых систем». И здесь надо вернуться к самому началу наших обсуждений, когда при рассмотрении первого случая финального поведения трёх тел (когда эти три тела «уживаются во все времена») Володя Алексеев в курсовой работе, защищавшейся в 1954 году, пишет, что А. Н. Колмогоров высказывал гипотезу, что подобная устойчивость невозможна. Но она оказалась возможной благодаря той самой КАМ-теории, первые результаты по которой были опубликованы в том же 1954 году!

Работы В. М. Алексеева были высоко оценены специалистами, и он был приглашён часовым докладчиком на Международный математический конгресс в Ницце, проходивший с 1 по 10 сентября 1970 года. К великому сожалению, В. М. Алексееву не было позволено тогда пересечь железный занавес.

Владимир Михайлович с улыбкой рассказывал мне, что незадолго до открытия Конгресса ему позвонил Ж. Лере — один из крупнейших математиков прошлого века. Лере очень высоко отозвался о достижениях В. М. Алексеева и при этом обратился к нему с личной просьбой: «Пожалуйста, будьте снисходительны и милосердны к Шази». С подобной просьбой к В. М. Алексееву можно было и не обращаться: деликатность и милосердие были ему присущи с самых младых ногтей.

После Конгресса Лере прислал Владимиру Михайловичу письмо (посланное из Парижа 23 ноября 1970 года), исполненное французской любезности и благодарности.

Мой дорогой Коллега,

Я весьма благодарен Вам за присылку текста Вашего доклада на Конгрессе.

Мы почли своим долгом усовершенствовать его французский перевод. Я буду Вам весьма признателен, если по получении корректур и Вашей рукописи с нашими поправками Вы тщательно проверите, не исказили ли они, быть может, Вашу мысль.

Недавно я довёл до сведения семьи Шази, что благодаря Вам его имя на Конгрессе в Ницце упоминалось в самых тёплых выражениях, и мы Вам за это очень признательны: [двоеточие было поставлено печатно, а затем от руки приписано: «Chazy était un si brave homme!». В. М. перевёл это выражение так: «Шази был таким добрым малым!» — *Прим. авт.*]

Труды Конгресса выйдут в свет в 1971 году; Ваша статья не могла бы появиться в «Journal de Mathématiques pures et appliquées» ранее. Нам представляется, что Труды Конгресса получат такое же распространение, как и наши научные журналы, и я поэтому не думаю, что было бы уместно воспроизводить Вашу статью в одном из них.

На меня произвела большое впечатление глубина Ваших работ. «Journal de Mathématiques» будет, безусловно, рад опубликовать в будущем одну из них.

Соблаговолите верить, мой дорогой Коллега, моей самой дружеской признательности.

Жан Лере

Творческая жизнь Владимира Михайловича Алексеева в её основной части может быть озаглавлена так же, как был назван им его доклад на Международном конгрессе в Ницце: «Финальные движения в задаче трёх тел и символическая динамика». Выше приводились две классификации финальных движений: одна из курсовой работы 1954 года, другая — из колмогоровского отзыва конца 1968 года. В краткой справке приведена ещё одна классификация — Шази, в которой 16 позиций. Теорема о финальных движениях, приведённая в справке, утверждает, что «реализуются все $16 = 4 \times 4$ логически возможных комбинаций финальных типов движения по Шази при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$». Как мы помним, работа 1954 года начиналась с почти чистого листа, с фактически ничем не заполненной таблицы Шази, а завершилась полным её заполнением. Решение проблемы потребовало огромных усилий.

И снова (и мне всегда как-то особенно приятно это осознавать) один из важнейших элементов всей теории, приведший к её полному завершению, был заложен Андреем Николаевичем Колмогоровым. Как это не раз с ним случалось, по-видимому, мимоходом, между делом, может быть в разговоре за столом (скорее всего, с Кириллом Александровичем Ситниковым), когда вдруг возник вопрос о возможности осцилляции в задаче трёх тел, Колмогоров предложил рассматривать так называемую *равнобедренную задачу трёх тел*, когда два тела равной массы расположены симметрично относительно вертикальной оси, находясь обе в перпендикулярной плоскости, в то время как третье тело малой массы (а ещё лучше — нулевой массы) имеет скорость вдоль вертикальной оси (при этом треугольник, соединяющий центры тел, всегда является равнобедренным). В силу симметрии такое расположение будет сохраняться во все времена. Обладая замечательной «интуицией процессов» (он причислял её к особому типу одарённости), Колмогоров не сомневался в том, что два симметричных тела, двигаясь по эллиптическим орбитам с небольшим эксцентриситетом, смогут возмущать движение третьего тела так, что в итоге получится осциллирующее движение. Ситников заинтересовался задачей и, проведя кое-какие подсчёты, убедил себя в том, что интуиция Колмогорова не подвела. Но долгое время текста написано не было, и я помню, как на протяжении большого времени Андрей Николаевич старался добиться от Кирилла Александровича публикации. И добился.

Если масса третьего тела нулевая, а положение в момент времени $t$ равно $z(t)$, то движение этого «тела» описывается достаточно простым уравнением:

$$\ddot{z} = -\frac{z}{(z^2 + r(t)^2)^{3/2}}. \qquad (*)$$

В. М. Алексеев разработал глубокую теорию подобных уравнений, что, в частности, привело и к исчерпанию темы финальных движений.

Вот один из сформулированных в справке результатов.

*Для достаточно малого эксцентриситета $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $N$, что для любой последовательности $M = \{m_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $m_n > N$, существует решение $z(\cdot, M)$ уравнения $(*)$, нули $\tau_k$ которого удовлетворяют равенству $\left[\dfrac{\tau_{k+1} - \tau_k}{2\pi}\right] = m_k \ \forall\, k \in \mathbb{Z}$.*

Подобные утверждения и носят название символической динамики. Утверждение теоремы Алексеева является свидетельством того феномена, о котором говорилось выше: *динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями* (*причём столь простыми, как* $(*)$), *могут иметь очень сложную структуру решений, напоминающую случайный процесс.* Окончательный результат дался В. М. ценой огромного труда. Затем некоторое упрощение доказательств было получено Ю. Мозером. Об этом выразительно сказано в статье K. Zare, S. Chesley. «Order and chaos in the planar isosceles three-body problem». Chaos, Vol. 8, № 2 (1998): «Приложение символической динамики к задаче Ситникова было осуществлено Алексеевым, дополнившим работу Ситникова, посвящённую этой модели. Алексеевым же результаты были распространены на случай, когда третье тело имеет ненулевую массу. Сведя задачу к отображению [последования] и обнаружив присутствие структуры „подковы Смейла“, Мозер дал красивую геометрическую интерпретацию результатов Алексеева. Доказательство Мозера основывается на преобразовании, введённом Мак-Гэхи, которое выявляет наличие [фиктивной] гиперболической периодической орбиты в бесконечности. Эта орбита имеет два инвариантных многообразия, пересекающихся в гомоклинической точке, что и приводит к появлению структуры „подковы Смейла“ в её непосредственной окрестности».

Изящество работы Мозера не умаляет работы Алексеева: мозеровское доказательство ad hoc явно эксплуатирует симметричность задачи, в то время как метод горизонтальных и вертикальных полосок Алексеева даёт мощный инструмент исследования самых разных динамических систем, где имеются квазислучайные явления: например, в задаче захвата кометы системой Солнце — Юпитер никакие искусственные приёмы вроде преобразования Мак-Гэхи неприменимы.

Над завершением своей диссертации В. М. работал около трёх лет, начало семидесятых годов — несомненная вершина его творческой деятельности. Затем он стал искать новые темы исследования, в частности заниматься биологической и медицинской тематикой, и избрал новое место своей работы на мехмате — кафедру общих проблем управления.

---

В. М. Тихомиров, мехмат МГУ
`vmtikh@googlemail.com`